

やさしい地球重力場決定

An introduction to the Earth's gravity field determination

山本 圭香, 福田 洋一

K. Yamamoto, Y. Fukuda

京都大学大学院理学研究科, Graduate school of science, Kyoto University

Email: yamamoto@kugi.kyoto-u.ac.jp, fukuda@kugi.kyoto-u.ac.jp

Abstract:

In this paper, we review the basic concept of the gravity field determination by the analysis of satellite tracking data. The gravity field of the Earth is estimated from the perturbation of satellite orbits. In a conventional method, several geopotential models are determined by analyzing satellite orbits of more than three decades. The quality of the observational data has been improved by the satellite gravity missions and a highly precise and accurate gravity field can be determined with comparative ease. The result obtained from a dedicated gravity satellite has a higher spatial or time resolution than the previous results obtained from the orbit data for tens of years in the past.

1. 重力場のあらわし方

重力は、地球の引力と自転による遠心力の合力として定義される[1]。これをポテンシャルの勾配を使って記述すると、以下のようになる。

$$\text{grad}W = \text{grad}V + \text{grad}\Phi \quad (1)$$

ここで、 W 、 V 、 Φ はそれぞれ、地球の重力ポテンシャル、引力ポテンシャル、遠心力ポテンシャルである。ジオイドは、近似的には、平均海水面とほぼ一致する等ポテンシャル面、より正確には、正規楕円体の重力ポテンシャルを $U=U_0$ としたとき、 $W=U_0$ となる等ポテンシャル面として定義される。式(1)からわかるように、地球の重力は引力ポテンシャルと遠心力ポテンシャルの 2 つが与えられれば求められる。これらは次式で表される。

$$V = G \iiint_{\text{earth}} \frac{\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} \quad (2)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (3)$$

このうち、式(3)であらわされる遠心力ポテンシャルは、地球の自転角速度が精度良く観測できることから、比較的正確に求めることができる。一方、式(4)からわかるように、引力ポテンシャルは、地球の内部の密度分布 $\rho(\mathbf{x})$ が不明であるため正確に計算することができず、さまざまな観測手法に頼る必要がある。よって、地球重力場の決定は引力ポテンシャルを如何に正確、精密に決定するかに依存している。地上での観測で測定されるのは遠心加速度を含んだ重力加速度であるが、人工衛星からの観測は遠心力の影響を受けないため、引力加速度をそのまま求めることができる。本稿では、人工衛星データを用いた重力場決定(以下、本文中に登場する重力場決定は引力ポテンシャル決定のことである)について概説する。

引力ポテンシャル V は以下のように球面調和関数展開され、調和関数の重ね合わせとしてあらわすことができる。

$$V = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \bar{P}_l(\sin \phi) (\bar{C}_{lm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{lm} \sin(m\lambda)) \quad (4)$$

地球重力場モデルは、通常、(4)式における球面調和関数係数 C_{lm} 、 S_{lm} (Stokes 係数)の組として与えられる。精密な地球重力場決定とは、すなわち、高次までの Stokes 係数を精度良く決定することである。

2. 衛星の軌道解析による地球重力場決定

2-1. 概要

地球を質点と考え、人工衛星が地球の引力だけによって運動し、そのほかの力をまったく受けないという理想的な場合を考えたとき、人工衛星の軌道は Kepler の法則(面積速度一定の法則)にしたがって地球を焦点の 1 つとする楕円軌道を描く。しかし、現実には、人工衛星の軌道は、さまざまな摂動力のため、Kepler 軌道からはずれている。この摂動力には、地球の引力の非球状成分、月や太陽の引力の影響、大気空気抵抗、太陽輻射圧などが含まれる。衛星自体を加速度計と考え、これらの摂動力のうちの地球の引力成分から地球の重力場を見積もるとというのが、衛星の軌道解析による地球重力場測定の原理である[2]。

2-2. 歴史的背景

1957 年のスプートニク 1 号衛星の打ち上げ以来、地球を周回する人工衛星は、地球の重力場決定に用いられてきた。初期の成果としては、1958 年に打ち上げられたバンガード 1 号衛星の軌道解析結果が代表的である。軌道解析による J_2 ($= -C_{20}$) 項の決定により、地球の扁平率が $1/297$ から $1/298.25$ へと改められ、より球に近いことがわかった。また、古在由秀は J_3 ($= -C_{30}$) 項の決定により、地球の形が赤道対称な楕円型ではなく、西洋梨型をしていることを発見した。その後、1960 年代に登場したマイクロ波測距、1970 年代に登場したドップラー測距などにより、軌道の決定精度が向上し、また計算機の発展や計算アルゴリズムの開発も伴ってより高次の重力場決定が可能となった。また近年、衛星重力ミッションにより、さらに高次までの重力場決定が可能となった[2][3]。

2-3. 軌道解析による重力場決定

衛星の軌道データから地球重力場のパラメータ C_{lm} , S_{lm} を計算するには、任意の基準座標系に対して基本ベクトル方程式

$$\vec{\rho} + \mathbf{X}_T - \mathbf{X}_S = \mathbf{O} \quad (5)$$

を立てて考える[4]。この方程式は、Figure 1 で示されるように、地上観測点 T (地球表面の軌道追跡ステーション、あるいはアルティメータの footprint) の位置 $\mathbf{X}_T(t)$ を、位置ベクトル $\vec{\rho}(t)$ を介して、衛星の地心位置 $\mathbf{X}_S(t)$ と結びつけるものである。ここで、 $\vec{\rho}(t)$ は、時刻 t における観測値(range, range rate, angular information) である。 \mathbf{X}_T は地球上での観測点の運動および地球の運動の理論から、 \mathbf{X}_S は、衛星の軌道運動の理論から求められ、それぞれ多数のパラメータに依存するモデルに基づいている。

\mathbf{X}_T の記述には、次のようなパラメータが必要である。

- ・元期 t_0 で定義された conventional terrestrial reference system における地上観測点の地心位置
- ・地上観測点における地殻の運動(時間間隔 $t-t_0$ におけるプレートの運動、潮汐変形、海洋荷重の影響)
- ・Celestial ephemeris pole (CEP) の、terrestrial system pole (CTP) に対する運動。この軸のまわりの地球の回転、歳差、章動角。

慣性系における衛星の地心位置 $\mathbf{X}_S (= \mathbf{X}_I)$ とする) は、衛星の運動方程式

$$\frac{m_s d^2 \mathbf{X}_I}{dt^2} = \mathbf{F}_I \left(t; \mathbf{X}_I, \frac{d\mathbf{X}_I}{dt} \right) \quad (6)$$

の積分から計算できる。ここで、 m_s は衛星の質量、 \mathbf{F}_I は慣性系において衛星を加速させる力の総和であり、

$$\mathbf{F}_I / m_s = \mathbf{a} = \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_S + \mathbf{a}_A \quad (7)$$

のように表される。 \mathbf{a}_G , \mathbf{a}_B , \mathbf{a}_E , \mathbf{a}_O , \mathbf{a}_D , \mathbf{a}_S , \mathbf{a}_A はそれぞれ、地球の引力加速度、太陽、月、主要天体を含む3体加速度、固体地球潮汐加速度、海洋潮汐加速度、大気ドラッグによる加速度、太陽輻射圧による加速度、地球のアルベド圧力による加速度である。これらの加速度のモデルはすべて、それぞれ多様なパラメータによって構成されている。非常に精密な軌道が必要ならば、さらに小さな摂動加速度のモデル化も必要である。

このうち、最大の加速度を及ぼすのは(4)であらわされる地球の引力加速度であり、

$$\mathbf{a}_g = \nabla V_0 + \nabla(V - V_0) \quad (8)$$

V_0 は中心力項(degree 0 の項)である。他の加速度の表現法については、たとえば[5]を参照。

元期 t_0 における衛星の位置 $\mathbf{X}_I(t_0)$ 、速度 $\dot{\mathbf{X}}_I(t_0)$ および衛星にはたらく力 \mathbf{F}_I から、微分方程式(6)の数値積分により、時刻 $t > t_0$ における衛星の位置 $\mathbf{X}_I(t)$ および速度 $\dot{\mathbf{X}}_I(t)$ が求められる。

以上のようにして方程式(5)の左辺の各項が求められるが、観測誤差やモデルの不完全さにより、現実には(5)の右辺はゼロとならない。

$$\bar{\rho} + \mathbf{X}_T - \mathbf{X}_S = \Delta \mathbf{M} \neq \mathbf{0} \quad (9)$$

$\Delta \mathbf{M}$ が小さい場合、非線形方程式(9)を線形近似し、多数のデータから観測方程式系を作り、線形最小二乗法によって解くことができる。式(9)の中の観測量の成分を $\bar{q}(t, \mathbf{P})$ とし、 $\bar{q}(t, \mathbf{P}_R) = \bar{q}_{calc}(t, \mathbf{P}_R)$ のまわりで Taylor 級数展開する。ここで、 \mathbf{P}_R はパラメータの初期値、あるいは基準値である。つまり、

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_R + \Delta \mathbf{P} \quad (10)$$

であり、 $\Delta \mathbf{P}$ が推定すべき値である。 \mathbf{P}_R が十分に \mathbf{P} に近ければ、高次の項は無視でき、

$$\bar{q}(t, \mathbf{P}) = \bar{q}_{calc}(t, \mathbf{P}_R) + \sum_i \frac{\partial \bar{q}}{\partial P_i} \Delta P_i \quad (11)$$

として線形化できる。

$$\Delta \bar{q}(t) \equiv \bar{q}(t, \mathbf{P}) - \bar{q}_{calc}(t, \mathbf{P}_R) = \sum_i \frac{\partial \bar{q}}{\partial P_i} \Delta P_i \quad (11)$$

とし、多数の観測時刻に対してこのような方程式を立てる。観測時刻、観測値がバイアスによる影響を受けないと仮定すると、最小二乗法によって解くべき方程式系は、

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{P} \quad (12)$$

と行列表示できる。ここで、 \mathbf{A} は、 \mathbf{q} の各推定パラメータに関しての変微分行列である。

具体的な最小二乗法の解法についてはここでは触れないが、切断波数 L までの重力場パラメータだけに注目しても、その数は、 $(L+1)(L+2)$ (たとえば $L = 100$ の場合約 10000)となる。また、重力場パラメータ以外にも方程式(12)は多数のモデルパラメータを含んでいる。これをさまざまな衛星の軌道データから得られた膨大な観測値から最小二乗的に解くには膨大な計算量が必要である。そのため、数々の効率的な手順、アルゴリズムが考案されてきた。その詳細については、たとえば[4]、[6]を参照。

過去30年の間に、いくつかの機関が衛星の軌道解析結果から重力場モデルを決定してきた。これらのモデルは、異なる軌道要素を持った、大部分は測地衛星でない衛星の軌道解析を総合して得られたもの

である。非常に多くの計算量が必要であり、こうした重力場を決定できるのはごくわずかのグループに限られていた。このようにして決定されたモデルの1つである GRIM5-S1 モデル[7]は、30年間にわたる21衛星のデータを使用して得られたものである。

3. 衛星重力ミッション

3-1. CHAMP による重力場決定

2-3.で示したような多数の衛星の軌道解析による従来の重力場決定には、いくつかの問題がある。

第1に、高度による地球重力場の減衰である。これは式(4)中の $(R/r)^l$ が $l+1$ のべき乗で減衰することによるものである。このため、重力場は l が大きくなるにつれて急速に減衰する。Figure2に示されるように、この減衰は軌道高度が高いほど顕著であり、従来の重力場決定に使用される衛星は、その大部分が測地衛星ではなく、軌道高度が高いため、この影響を大きく受ける。さらに、地球の重力場は $1/r^3$ で次第に減衰する(Kaula's rule)ことも伴い、高軌道衛星からの高次の調和関数係数の正確な決定は困難である。

第2は、非引力加速度の影響の問題である。式(7)からわかるように、地球の引力加速度だけでなく、他の非引力加速度もまた、衛星の軌道の摂動に影響をおよぼすため、軌道解析によるより精密な地球の重力場決定は、これらの非引力加速度も精密に見積もる必要がある。従来の方法では、これらの非引力加速度はモデルに依存しており、地球重力場の決定精度は非引力加速度モデルの誤差の影響を大きく受ける。これらの理由から、従来の重力場決定法は、長波長域の重力場に対してのみ有効であり、その精度にも限界があった[8][9]。

2000年に打ち上げられた CHAMP 衛星[10]は、これらの欠点を補うための H-L SST (High-Low Satellite-to-Satellite Tracking)方式を採用した初の重力ミッション衛星であり、高度による地球重力場の減衰を抑えるための低軌道衛星使用、非引力加速度測定のための加速度計の搭載、GPS 衛星による軌道決定を特徴としている。CHAMP 衛星からの重力場決定法は、基本的には、2-3.で述べた手順と同様におこなわれるが、非引力加速度モデルの代わりに加速度計データを使用し、また、従来の dynamic な軌道決定とは異なり、GPS を用いた kinematic な軌道決定が採用されている。こうして決定された地球重力場モデル EIGEN-CHAMP03S [11]は、1衛星(CHAMPのみ)の、わずか33ヶ月間のデータしか使用していないにもかかわらず、その観測データの質の向上により、従来の数十年にわたる多数の衛星の軌道解析データを用いたモデルよりも長波長域での精度が約1桁も向上している。

CHAMP 衛星では、精密な加速度計データが得られるため、従来の方法とは異なるエネルギー法を用いた決定されたジオポテンシャルモデル TUM01S [12]も登場した。このモデルは、エネルギーに関する方程式

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 - \int_i \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dt - Z - c \quad (13)$$

を解くことによって求められている。ここで、 V は static gravitational potential、 $\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2$ は衛星の運動工

ネルギー(を質量で割ったもの)、 $\int \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dt$ は衛星にはたらくすべての非保存加速度(引力加速度+非引力加速度)によるエネルギーの散逸項、 Z は衛星にはたらく遠心力ポテンシャル、 c は積分定数(未知数として重力パラメータと同時に推定される)である。従来の方法では、方程式を1次のTaylor展開によって近似して線形化するため、高次項の無視による近似誤差が大きく、多数回の反復改良が必要であるのに対し、この方程式を使用する利点は、方程式が求める重力パラメータ C_m 、 S_m に対して線形なことである。このため、近似による誤差は生じず、原理的には(full matrix を解けば)、one step で解を求めることが可能である。しかし、方程式に速度の2乗の項 $(dx/dt)^2$ が含まれるため、速度の誤差に対する感度が高い[13]。

3-2. GRACE による重力場決定

軌道データを用いた重力場決定では、低軌道衛星を用いても、重力場の減衰のため、高次項の決定は困難である。高次項の効果を増幅する古典的手法である微分概念に基づいた重力ミッションが、L-L SST (Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking)方式を採用した GRACE ミッション[14]および SGG (Satellite Gravity Gradiometry)方式による GOCE ミッション[8]である。

GRACE ミッションでは、2つの低軌道衛星の相対的な動きを高精度で測定する。慣性座標系において、dual-1-way-ranging によって得られる GRACE 衛星の観測量(range, range rate, range acceleration)は次のように表すことができる。

$$R = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{R}} \quad (14)$$

$$\dot{R} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} \quad (15)$$

$$\ddot{R} = \ddot{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \left(\frac{\dot{\mathbf{R}}}{R} - \frac{\dot{R}\hat{\mathbf{R}}}{R} \right) \quad (16)$$

ここで、 \mathbf{R} 、 $\dot{\mathbf{R}}$ 、 $\ddot{\mathbf{R}}$ はそれぞれ range, range rate, range acceleration ベクトル、 $\hat{\mathbf{R}}$ は2衛星を結ぶ方向の単位ベクトルである。(16)式の range acceleration に注目し、右辺第1項と第2項(遠心加速度項)をそれぞれ定常成分とそこからの変動成分に分離すると、GRACE 軌道(nearly coplanar, and polar circular, equiradial)の場合、第1項と第2項の定常成分はほぼ等しい大きさ($R = 200$ km のときおよそ 0.3 m/s^2)で符号が逆であるため、(16)式においては互いにキャンセルし合う。微小な重力の調和関数の変動に関して、第2項は、高い order (= m) の調和関数については第1項とほぼ同じ大きさであり考慮しなくてはならないが、低い m に対しては無視できて、

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = (\mathbf{a}_q - \mathbf{a}_p) \cdot \hat{\mathbf{R}} \quad (17)$$

で近似できる。 \mathbf{a}_p \mathbf{a}_q は 2 衛星 p q の加速度である。(17)式は重力パラメータ C_{lm} 、 S_{lm} に関して線形であり、線形最小二乗法によって解くことができる[15]。

GRACE 衛星データから復元可能な重力場は、長波長から中波長域で高い精度を持っている。最新の重力場モデルには、CSR による GGM02S [16]、GFZ による EIGEN-GRACE02S [17]があり、どちらも CHAMP 衛星によるモデルよりも半波長 1000 km の波長域で約 1 桁、CHAMP 以前の重力場よりも 2 桁ほど精度が良い。

また、1 ヶ月の時間分解能で提供される GRACE monthly gravity field solution は、前月の重力場に対しての変動分を 1 次の Taylor 展開によって線形近似し、最小二乗法によりその変動分を見積もるという方式で解かれている[18]。

3-3. GOCE ミッションの概要

2006 年に打ち上げが予定されている GOCE ミッション[8]は高次の重力場の決定を主要な目的とし、重力偏差計を用い、1 衛星中の 1 組の加速度計の試験質量の 3 軸方向の差を測定する。その信号は引力加速度の勾配(引力ポテンシャルの 2 階微分)である。非引力成分は衛星内の加速度計に同じ影響を及ぼすので、理想的には差をとることにより除去可能である。回転の効果は観測結果に影響を及ぼすが、得られた引力ポテンシャルの 2 階微分の 3×3 行列の対称成分、非対称成分を使えば、引力の信号から分離できる。また、CHAMP、GRACE よりもさらに低い軌道のため、より大きな重力場シグナルが得られる。GOCE による重力場決定の詳細については、たとえば[19]、[20]を参照。

4. まとめ

衛星重力ミッションの登場によって観測データの質が向上し、それに伴い、従来と比べ比較的容易に高次の重力場を高精度で決定することが可能となった。CHAMP、GRACE、GOCE で決定される重力場は、それぞれ長波長域、中波長域、短波長域に高い精度を持っており、最終的にこれらの 3 衛星の結果を総合して得られる重力場は地球科学の研究に大きく寄与するものと思われる。

参考文献

- [1] W. A. Heiskanen, H. Moritz, *Physical Geodesy*, W.H Freeman and Company, San Francisco, 1967.
- [2] 日本測地学会, *CD-ROM テキスト測地学*, 2004.
- [3] 古在由秀, *地球をはかる(岩波科学の本 7)*, 岩波書店, 1973
- [4] C. Reigber, "Gravity Field Recovery from Satellite Tracking Data" in *Theory of Satellite Geodesy and Gravity Field Determination (Lecture Notes in Earth Sciences 25)* edited by F. Sansò, R. Rummel, Springer-Verlag, Berlin, 197-234, 1989.
- [5] W. M. Kaula, *Theory of Satellite Geodesy*, Blaisdell Publ. Comp., Waltham, Mass., 1966.
- [6] N. Sneeuw, "Space-wise, Time-wise, Torus and Rosborough Representations in Gravity Field Modelling",

- Space Science Rev., 108, 37-46, 2003.
- [7] R. Biancale, G. Balmino, J. M. Lemoine, J. C. Marty, B. Moynot, F. Barlier, P. Exertier, O. Laurain, P. Gegout, P. Scheintzer, Ch. Reigber, A. Bode, Th. Gruber, Koig, R., F. H. Massmann, J. C. Raimondo, R. Schmidt, S. Y. Zhu, "A New Global Earth's Gravity Field Model from Satellite Orbit Perturbations: GRIM5-S1", *Geophys. Res. Lett.*, 27, 3611-3614, 2000.
- [8] European Space Agency, *The Four Candidate Earth Explorer Core Missions-Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Mission*, ESA SP-1233 (1), 1999.
- [9] National Research Council, *Satellite Gravity and the Geosphere - Contributions to the study of the Solid Earth and Its Fluid Envelope*, National Academy Press, 1997.
- [10] Ch. Reigber, H. Lühr, P. Schwintzer, "CHAMP mission status", *Adv. Space Res.*, 30, 129-134, 2002.
- [11] Ch. Reigber, H. Jochmann, J. Wunsch, S. Petrovic, P. Schwintzer, F. Barthelmes, K.-H. Neumayer, R. König, Ch. Förste, G. Balmino, R. Biancale, J.-M. Lemoine, S. Loyer, F. Perosanz, "Earth Gravity Field and Seasonal Variability from CHAMP" in *Earth Observation with CHAMP - Results from Three Years in Orbit* edited by Ch. Reigber, H. Lühr, P. Schwintzer, J. Wickert, Springer, Berlin, 25-30, 2004.
- [12] Ch. Gerlach, L. Földvary, D. Švehla, Th. Gruber, M. Wermuth, N. Sneeuw, B. Frommknecht, H. Oberndorfer, Th. Peters, M. Rothacher, R. Rummel and P. Steigenberger, "A CHAMP-only gravity field model from kinematic orbits using the energy integral", *Geophys. Res. Lett.*, 30, L018025, 2003.
- [13] P. N. A. M. Visser, N. Sneeuw, C. Gerlach, "Energy integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates", *J. Geod.*, 77, 207-216, 2003.
- [14] B. D. Tapley, S. Bettadpur, M. Watkins Ch. Reigber, "The Gravity Recovery and Climate Experiment: Mission overview and early results", *Geophys. Res. Lett.*, 31, L09607, 2004.
- [15] J. B. Thomas, "An Analysis of Gravity-Field Estimation Based on Intersatellite Dual-1-Way Biased Ranging", JPL Publication 98-15, 1999.
- [16] Center for Space Research, "GGM02 Notes", <http://www.csr.utexas.edu/grace/gravity/ggm02/>, 2004.
- [17] Ch. Reigber, R. Schmidt, F. Flechtner, R. König, U. Meyer, K.-H. Neumayer, P. Schwintzer, S. Y. Zhu, "An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE: EIGEN-GRACE02S", *J. Geodynamics*, 39, 1-10, 2005.
- [18] S. Bettadpur, *Level-2 Gravity Field Product User Handbook*, GRACE 327-734 (CSR-GR-03-01), CSR, 2003.
- [19] R. Klees, R. Koop, P. Visser, J. van den IJssel, "Fast Gravity Field Recovery from GOCE Gravity Gradient Observations", *J. Geod.*, 74, 561-571, 2000.
- [20] P. N. A. M. Visser, J. van den IJssel, R. Koop, R. Klees "Efficient Gravity Field Recovery from GOCE Gravity Gradient Observations", *J. Geod.*, 74, 561-571, 2000.

Figures

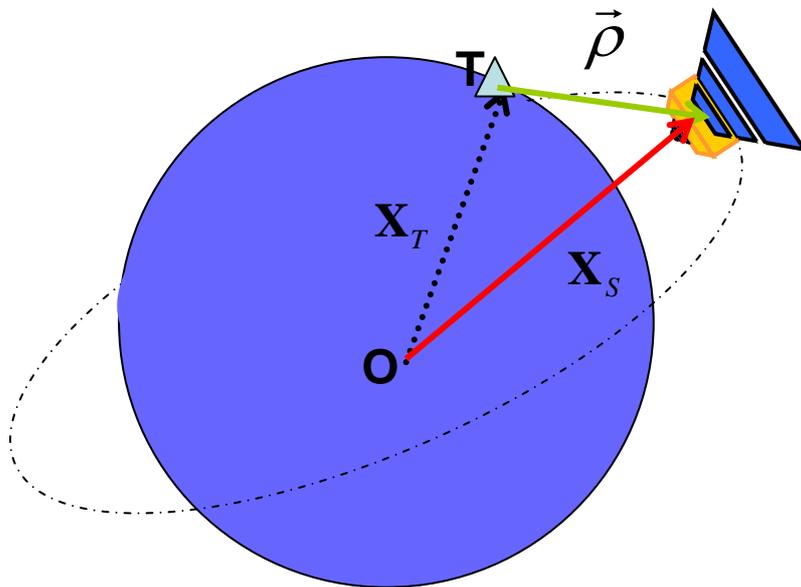


Figure 1 方程式(5)のパラメータ同士の関係。

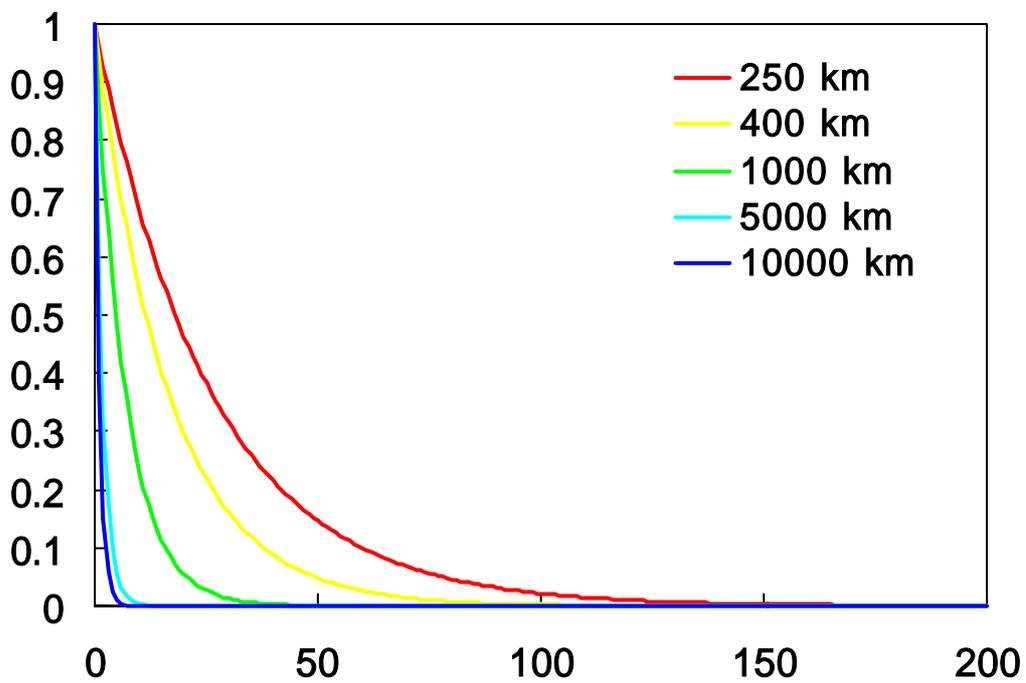


Figure 2 軌道高度による $(R/r)^{n+1}$ 項の減衰の様子の違い。縦軸: $(R/r)^{n+1}$ の値、横軸: 重力場の次数 (degree)。