

やさしい海洋潮汐モデリング

Ocean tide modelling for beginners

松本 晃治

K. Matsumoto

国立天文台電波研究部

Division of Radio Astronomy, National Astronomical Observatory of Japan

Email: matumoto@miz.nao.ac.jp

Abstract:

This short article first describes how the Moon or Sun induces tides on the Earth. The complexity of orbit of the outer bodies calls for the concept of constituent. The origins of some major constituents are given together with their frequencies and initial phase at certain epoch. Then described are some limitations of ocean tidal modelling by using satellite altimeter data as well as proposed solution to overcome them. In particular, some results from assimilation model NAO.99b are shown.

1. はじめに

海洋潮汐とは、いわゆる潮の干満である。固体地球も潮汐で変形するが、海洋に引き起こされる潮汐のことを特に海洋潮汐と呼ぶ。「潮汐」の字が「朝のしおと夕のしお」を示す通り、海を眺めていると一日 2 回潮の満ち干が起るように見える。この漢字の成り立ちは中国沿岸では半日周潮(約半日周期の潮汐)が卓越していることと関係があるようである(内藤、私信)。もしも日周潮が卓越する場所で漢字が発明されていたら別の表現になっていたかもしれない。潮汐の研究の歴史は古く、潮汐が月・太陽の引力によって引き起こされる事を Newton が明らかにしたのはなんと 1687 年までさかのぼる。しかし、最近になって人工衛星データが利用可能になるまでは全球的な海洋潮汐の様子を cm 精度で知ることは出来なかった。本稿では潮汐が引き起こされるメカニズムを簡単に説明し、人工衛星高度計データを用いた高精度海洋潮汐モデリングの手法を、NAO.99b モデル(Matsumoto et al., 2000)を例にとってやさしく解説する。

2. 潮汐を引き起こす力

潮汐をやや難しく表現すると、「外部天体の引力の作用によって生じる等ポテンシャル面の変化によって、物質の流れや変形が生じる現象」となる。「外部天体」は地球の場合主に月と太陽である。図 1 を見ていただきたい。外部天体として月を例にとると、緑のベクトルは月からの引力を示し、赤のベクトルは地球と月が共通重心のまわりに相互に公転運動することによって生じる遠心力を示す。ちなみに、この共通重心は地球内部にあり、月-地球間の距離にもよるが、地球重心から約 4330km から 4940km 離れたところにある。点による遠心力ベクトルは地球上どこでも同じであり、地球重心では引力と遠心力はつりあっている。潮汐を引き起こす力、すなわち起潮力は赤と緑のベクトルの和で表される。つまり、冒頭の表現中「引力

の作用」の本質は、月や太陽の引力が地球上の場所によって少しずつ異なることである。もし地球が海水で覆われ、かつ運動が静的に行われるとすると、海面の形は等ポテンシャル面に一致し、その形は第一近似で図1のような回転楕円体になる。

起潮力ポテンシャルは力の分布を与えるだけで、地球・月・観測点の相対的な位置関係が時間的に変化しなければ、潮汐は生じない。地球の場合、時間的変化を与える要因のうち最も重要なのは自転である。たとえば、図1が地球の回転軸の真上から見た図で、月が地球の赤道面内にあるとすれば、地球が一回転する間に地表にいる観測者は凸と凹を2回ずつ経験することが理解できるだろう。実際の地球は公転面に対して自転軸が23.45度傾斜しているため、事情はやや複雑になる。詳細は他の教科書に譲るが、潮汐の変形を受けた等ポテンシャル面の形を地球に張り付いた座標系で見ると、幾何学的な性質によって図2の3種類の関数に分けることができる。左から zonal、tesseral、sectorial と呼ばれる2次の球面調和関数である。赤い部分が出っ張っている部分、青い部分が引っ込んでいる部分である。Sectorial が半日周潮に対応するのはもうお分かりだろう。同様に、tesseral、zonal は日周潮(約一日周期の潮汐)、長周期潮(一日より長い周期の潮汐)に対応する。

3. 分潮という考え方

起潮力ポテンシャル U を具体的な式で表すと次のようになる。

$$U = \frac{3GM R^2}{4r^3} \left\{ 3 \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) + \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos H + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2H \right\} \quad (1)$$

ここで G は万有引力定数、 M は外部天体の質量、 R は地球半径、 r は地球重心と外部天体重心との距離、 φ は観測点の緯度、および H はそれぞれ外部天体の赤緯および時角である。地球の自転によって H がほぼ一日の周期で変動することから、第1項が長周期潮、第2項が日周潮、第3項が半日周潮に対応することが分かる。また、 U が r と を含んでいることから、地球の自転だけでなく天体の公転運動によっても U は時間変化することがわかる。たとえば、月の軌道は短期的には楕円であり、月が近地点にあ

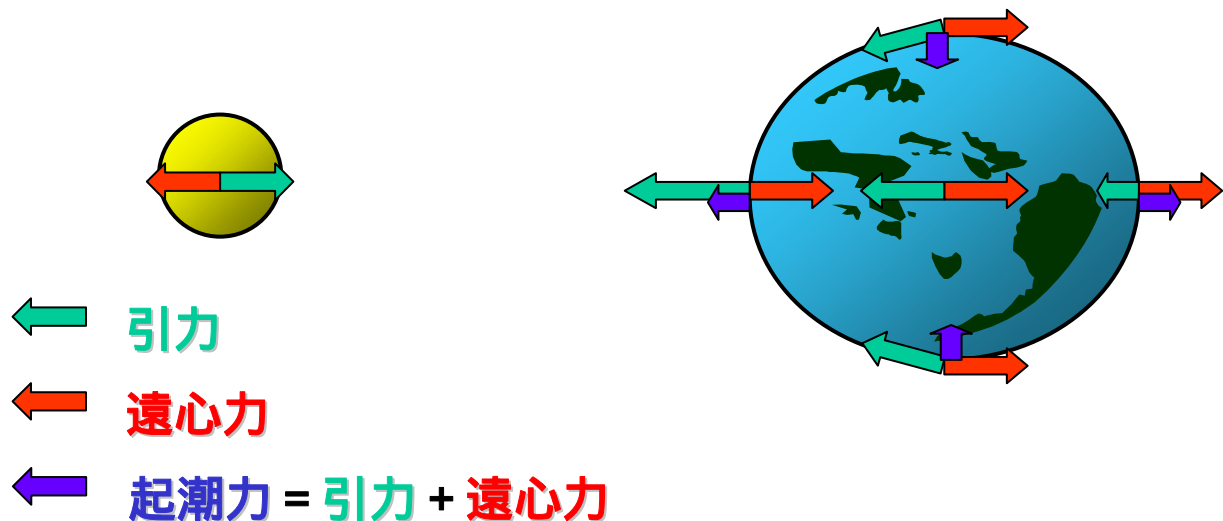


図1. 起潮力

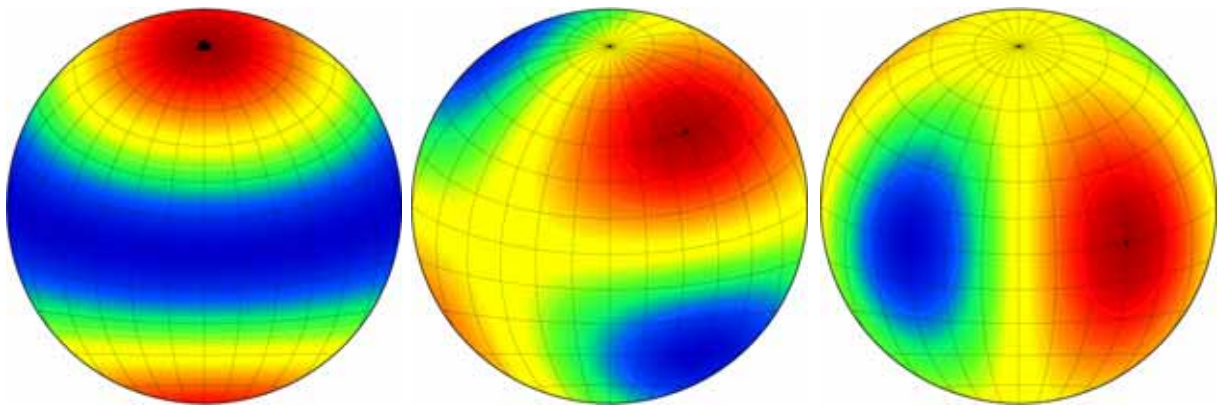


図 2. 2 次の球面調和関数。左から、zonal、tesseral、sectorial。

る時の方が遠地点にある時より起潮力は大きくなる。起潮力が r の 3 乗に反比例すること、月の平均的な離心率が 0.0549 であることを考えると、ざっと $(1.0549/0.9451)^3 = 1.39$ 倍大きくなることになる。また、月軌道面の黄道面に対する傾斜は約 5 度で、月の赤緯も最大で南北 28.75 度の間を約 1 ヶ月かけて動くことになる。このように、3 つの基本周波数を持つ潮汐は、外部天体の距離や赤緯の変化に伴って振幅が大きく変化する。この変化は角速度が少し異なる複数の波を考え、それらの重ねあわせとして表現することで定式化できる。このようにして分けた周期成分を分潮と呼ぶ。以下、いくつか具体例を示す。

実際の月の平均速度 ($H =$ 、周期 = 平均太陰日 = 1.03505 日、角速度 = 14.4920521 deg/hour) で地球の赤道面 ($\delta = 0$) において円軌道 ($r =$ 一定) を描く仮想的な月を考えると、半日周潮として角速度が 2 の成分が出る。これを M_2 分潮と呼ぶ。半日周潮帯で月軌道の離心率を考慮に入れるためには角速度が 2 とは平均近点月 (月の近地点通過周期 = 27.55455 日、角速度 = 0.5443743 deg/hour) だけ離れた分潮を付け加えればよい。これらを N_2 分潮 (角速度 = 28.4397295 deg/hour)、 L_2 分潮 (角速度 = 29.5284790 deg/hour) と呼ぶ。これらは楕率潮と呼ばれる。月の赤緯は分点月 s (春分点通過周期 = 27.321582 日、角速度 = 0.5490165 deg/hour) で変化する。(1) 式の第 3 項に $\cos^2 \delta$ があるため、半日周潮帯における月による赤緯潮は 2 に $2s$ を加えた角速度 (30.0821373 deg/hour) を持つ分潮で表すことができる。これが月による ${}^m K_2$ 分潮である。

ここまで外部天体として月を考えてきたが、太陽についても同様な議論が出来る。太陽の平均速度 ($H = t$ 、周期 = 平均太陽日 = 1.0 日、角速度 = 15.0 deg/hour) で地球の赤道面において円軌道を描く仮想太陽に基づく主要潮は S_2 分潮であり、その楕率潮は T_2 、 R_2 分潮である。太陽の赤緯は分点年 h (周期 = 365.242199 日、角速度 = 0.0410686 deg/hour) で変化する。赤緯潮 ${}^s K_2$ の角速度は $2(t+h) = 30.0821373$ deg/hour となる。これは月による ${}^m K_2$ 分潮の周期と同じであるため、二つを合わせて K_2 分潮と呼んでいる。

日周潮についても簡単に説明すると、 ${}^m K_1$ 分潮と O_1 分潮は月起源の赤緯潮である。 Q_1 分潮は O_1 分潮の楕率潮であり、 J_1 と M_1 分潮は ${}^m K_1$ 分潮の楕率潮である。 K_2 分潮と同様に K_1 分潮も日月合成潮である。す

なわち、太陽起源の赤緯潮 $^{\circ}K_1$ 分潮は mK_1 分潮とあわせて K_1 分潮と呼ばれる。 P_1 分潮は $^{\circ}K_1$ 分潮の楕率潮である。

実際の天体の軌道は非常に複雑で離心率や軌道面の傾斜角などが時間変化するために、これらの効果を表すためには非常に多くの分潮を重ね合わせる必要がある。実際、Tamura (1987)は起潮力ポテンシャルを 1200 分潮に展開した。ただし、振幅の大きい主要な分潮を数十選ぶことで実用上は問題ないことが多い。

一般に、地球上のある点 (λ, φ) における潮汐の高さ ζ は次の式で表すことができる。

$$\zeta(\lambda, \varphi, t) = \sum_i A_i(\lambda, \varphi) \cdot \cos\{\omega_i t + \chi_i - G_i(\lambda, \varphi)\} \quad (2)$$

ここで、 i は分潮の番号、 $A_i(\lambda, \varphi)$ は振幅、 $G_i(\lambda, \varphi)$ グリニッジ位相、 t は 2000 年 1 月 1 日 0 時 0 分 0 秒から起算した時間、 ω_i は角速度、 χ_i は天文引数と呼ばれる初期位相である。表 1 に主要な日周潮、半日周潮の分潮名、角速度、周期、天文引数、起源をまとめた。長周期潮は一般に振幅が小さいため、ここでは割愛した。

表 1. 主要な日周潮、半日周潮の分潮名、角速度、周期、天文引数、起源

分潮名	周波数 (deg/hour)	周期			2000.01.01 00:00:00 における天文引数(deg)	起源
		hour	min	sec		
Q1	13.3986609	26	52	6.084	358.039995	月、楕率
O1	13.9430356	25	49	9.63	126.4841785	月、赤緯
M1	14.4966939	24	49	59.694	241.5236112	月、楕率
P1	14.9589314	24	3	57.205	350.0224311	太陽、赤緯
K1	15.0410686	23	56	4.091	9.9677947	月・太陽、赤緯
J1	15.5854433	23	5	54.516	138.4119783	月、楕率
OO1	16.1391017	22	18	21.867	73.4514109	月、赤緯
2N2	27.8953548	12	54	19.348	239.5636061	月、楕率
μ 2	27.9682085	12	52	18.327	272.9137207	月、離心率変化
N2	28.4397295	12	39	30.054	8.0077897	月、楕率
2	28.5125832	12	37	33.616	41.3579043	月、離心率変化
M2	28.9841042	12	25	14.164	136.4519732	月、主要潮
L2	29.5284790	12	11	29.833	84.8961568	月、楕率
T2	29.9589333	12	0	59.217	2.9548684	太陽、楕率
S2	30.0000000	12	0	0	359.9902258	太陽、主要潮
K2	30.0821373	11	58	2.045	199.9355894	月・太陽、赤緯

4. 人工衛星で測る海洋潮汐

第2節では瞬時にポテンシャル面に一致する地球全体を覆う海というものを考えたが、現実の地球には複雑な海陸分布があり、海水の運動は静的ではなくダイナミックであるため、ポテンシャルに対する海水の応答はもっと複雑である。一般にこの複雑な海洋潮汐を表現するために、全海洋を細かいグリッドに分け、各グリッドについて主要分潮の振幅とグリニッジ位相を与えるという手法をとる。以下、海洋潮汐モデルとはこのようなグリッドモデルのことを指すものとする。

1980年代に開発された Schwiderski (1980)モデルでは験潮データが利用された。ところが、験潮所の多くは海岸線に沿って設置されており、海底圧力計を利用した外洋の潮汐観測も数が限られている(図3)。さらに、個々の観測の質のばらつきが大きい。このような事情から、全球的な海洋潮汐の場がよく知られるようになるには、海面の高さを測る測器と搭載した人工衛星の登場を待たねばならなかった。このような衛星海面高度計は1970年代から登場し始め、徐々にその観測精度が向上していった。特に、1992年に打ち上げられた TOPEX/POSEIDON(以下、T/P)という衛星は、地上1336km上空から海面の高さを数cmという驚異的かつ一様な精度で測ることが出来、このデータを用いた海洋潮汐の研究が大幅に進んだ。図4は、T/Pの軌道を地上に投影したものである。繰り返し軌道を取るように制御されており、9.9156日かけて図の軌道を描き、同じ場所に戻ってくる。すなわち、T/Pは、軌道直下の海上に固定されたある点について約10日に1回海面高度データを計る「宇宙からの験潮システム」とも呼べるものである。

T/Pによる海面高度観測においては、原理的に9.9156日の半分の周期、すなわち4.9578日より短い周期の変動は、より長い周期の変動へとエイリアスされる。必然的に日周潮・半日周潮も長周期化するが、海洋学的な長周期変動の研究が第一目標であるT/Pの軌道は、主要な分潮のエイリアシング周期が半年を越えないように設計されている。主要分潮の中では K_1 分潮のエイリアシング周期が173.2日と比較的長く、 S_{sa} 分潮の周期182.6日に近くなっている。原理的には9年余りの観測でこれら二つの分潮を分離

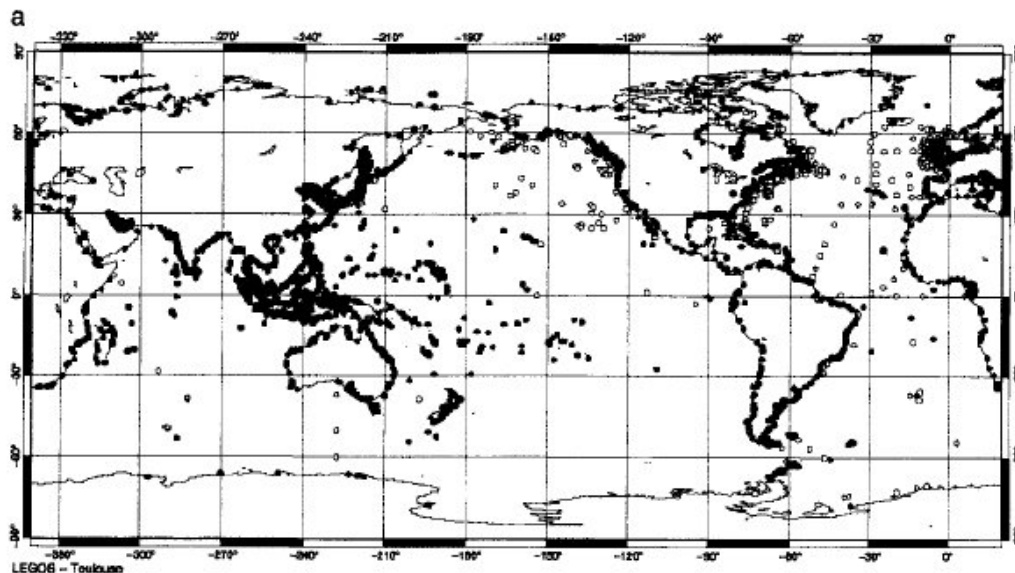


図3 過去およそ100年間に集められた験潮データの存在位置

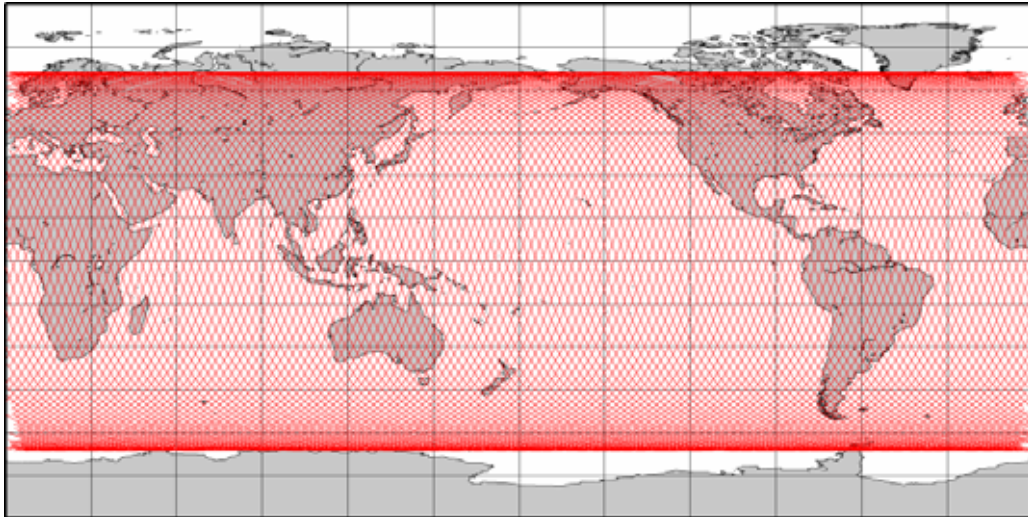


図 4. TOPEX/POSEIDON の軌道。

することが出来るが、実際はSsa分潮が主に気象学的な要因で駆動されており、スペクトルが鋭いピークにならないために K_1 分潮が汚染されるという問題が起きる。Ray (1998)が議論しているように、潮汐はある程度広い周波数帯域を持っているため、海洋学的に興味のある低周波領域にエイリアシングによって長周期化する分潮が全く存在しないように軌道設計を行うことは極めて困難である。T/Pの場合も「 K_1 問題」という乗り越えるべき壁はあるにせよ、その軌道は潮汐研究にとって絶妙に設計されていると理解すべきである。

5. 海洋潮汐モデリング手法のカテゴリー

Shum et al. (1997)は、T/Pに基づく8個の海洋潮汐モデルの差は水深1000mより深い外洋では小さいが1000mより浅い海域では大きいことを指摘した。 M_2 分潮についての差のRMSは外洋で0.97cm、浅海で9.78cmであった。実に一桁の違いがあり、これは浅海での海洋潮汐モデルの精度に大きな問題があることを示していた。T/Pに基づく90年代の海洋潮汐モデルは大きく(1)経験的モデル、(2)数値モデル、(3)同化モデルという3つのグループに分けることができるが、浅海潮汐の精度の問題をこれらモデリング手法と関連付けて考えてみよう。

経験的モデルは観測値に基づいて構築される。例えばCSRモデル(Eanes and Bettadpur, 1994)、Desai and Wahr (1995)モデル、GOT99.2bモデル(Ray, 1999)などが例として挙げられる。全球をある大きさのグリッドに切り、グリッド毎に海面高度データを潮汐解析する手法である。グリッドサイズをある程度大きくすると複数の軌道を解析に含めることができエイリアシングの影響を軽減できるという利点があるが、一方で解像度が衛星軌道に制限されるという欠点もある。T/Pの軌道間隔は赤道上で 2.83° (314 km)と比較的広く、空間的波長が短くなる浅海潮汐の複雑な分布を捉えることが出来なくなるのである。同様に、モデルの適用領域も軌道に制限される(T/Pの場合、 66°S から 66°N の範囲)。

数値モデルは流体力学方程式を数値的に解くことにより、起潮力に対する海洋の応答を求める。FES.94.1(Le Provost et al, 1994)モデルはこのカテゴリーに分類される。現代の計算機能力を考えると、数値モデルにとって解像度は大きな問題とはならない。しかし、海底地形や消散過程のパラメタリゼーシ

ヨンの不確実性が浅海潮汐モデリングを難しくしている。

浅海潮汐の問題を解決するのに筆者が最も有望だと考えたのが同化モデルである。同化モデルとは経験的モデルと数値モデルを組み合わせたようなモデルであり、観測と理論の弱点を互いに補強しながらモデルが構築される。すなわち、経験的モデルの解像度や適用領域の問題が数値モデルによって解決され、数値モデルの不確実性が観測値によって補正されるのである。また、非潮汐性海面変動によって汚染された潮汐解析解が流体力学によって補正できるというデータフィルタ効果も期待できる。しかし、90年代後半の同化モデルは空間的に短波長成分が卓越するという浅海潮汐の特徴をあまり考慮に入れていなかった。T/P データでは軌道に沿った解像度は 5.8km と非常に高く、筆者らのモデル (Matsumoto et al, 2000) ではこの特性をできるだけ生かすように、軌道に沿って解像度の高い潮汐解析を行い、その結果を数値モデルに同化することで浅海潮汐の精度向上を試みている。

6. 潮汐解析とデータ同化

第3節では潮汐を分潮の重ねあわせで表す考え方を示したが、これが衛星海面高度計データの潮汐解析に適しているとは限らない。たとえば、10日に一個しか観測の得られないT/Pの数年間のデータを用いて多くの振幅の小さい分潮まで考慮に入れて潮汐を求めようとする、未知数の数に対して観測の数が十分でない状況におちいる。また、太陽同期軌道をとるERS-2衛星では S_2 分潮のエイリアシング周期が になるなど、原理的には分潮に分解する方法(調和解析法とよばれる)では解析不能となるケースも出てくる。

衛星海面高度計データの潮汐解析方法として標準的に用いられている手法は応答法である。応答法の基本的な考え方は、起潮力ポテンシャルに対する海洋の応答の結果が海面高度の変化であると解釈し、その応答(アドミッタンス)を調べるというものである。調和解析法と異なり潮汐を有限な数の分潮の重ねあわせで表すことに固執せず、アドミッタンス関数が周波数領域で滑らかであると仮定することによって比較的少ないパラメータで日周潮帯・半日周潮帯それぞれの完全な定義が可能となる。数学的な取り扱いの詳細については、松本(2004)を参照されたい。図5はT/Pの軌道に沿って 0.5° の解像度をもって応答法で解析した M_2 分潮の振幅を表している。

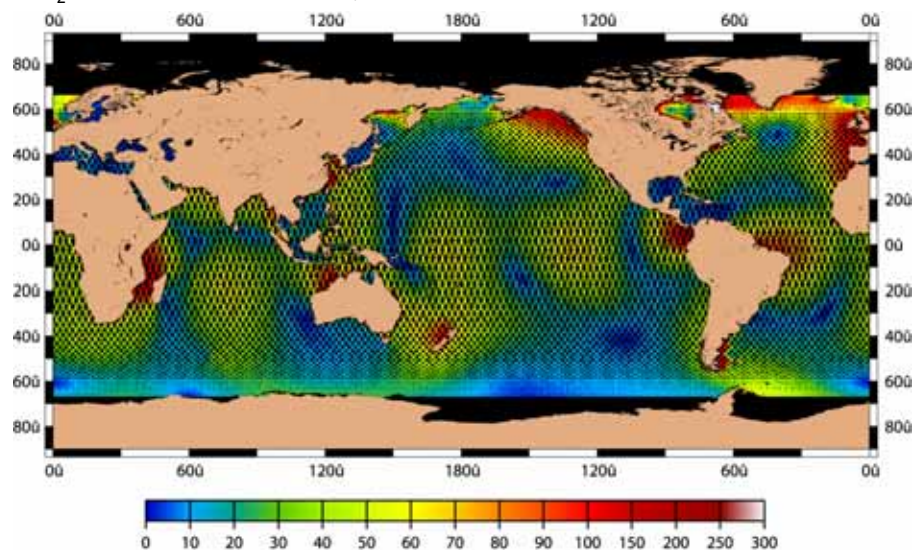


図5. T/Pの軌道に沿って 0.5° の解像度をもって応答法で解析した M_2 分潮の振幅。単位はcm。

次の段階にて図5で示したような潮汐解を数値モデルと組み合わせることになる。これが同化である。数値モデルについての詳細も松本(2004)に譲るが、流体力学的にはナビエ・ストークスの式から出発し、潮汐波を表すのに適した簡略化を施した流体力学方程式に基づく数値モデルであると思っただければよい。ただし、測地的には荷重による2次的な効果について従来のモデルで行われていた簡略化を廃し、より現実的な見積もりを行うように配慮した。

さて、ここで言う数値モデルによる海洋潮汐の計算とは、起潮力を駆動力とした海の運動を分潮別に時間積分し、定常状態になったところでその分潮の振幅と位相を求めるといったものである。ある時刻に予測される潮位を ζ_{MODEL} とし、一方 T/P の潮汐解から計算される潮位を $\zeta_{T/P}$ とすると、同化というプロセスはこの二つの量を数値モデルの中で混ぜ、その結果を新しい潮位とすることに相当する。式で表すと次のようになる。

$$\zeta = f \cdot \zeta_{T/P} + (1-f) \cdot \zeta_{MODEL} \quad (3)$$

この操作はT/P潮汐解析解の存在するグリッドについて、各タイムステップで行われる。 f は観測値の重みを決定する量であり、0から1の値をとる。 f が大きければそれだけ急速に観測値に近づくので良さそうに思えるかもしれないが、必ずしもそうではない。観測にも誤差があるということ、潮汐解析解の存在しない周りの領域との間の急激な不整合が生じるということから、 $f=1$ (観測に100%の重みを与える)とすることは一般に危険であるとされている。NAO.99bモデルの場合の最大値は0.8に制限されている。図6に同化の結果得られた M_2 分潮の振幅と位相を示す。

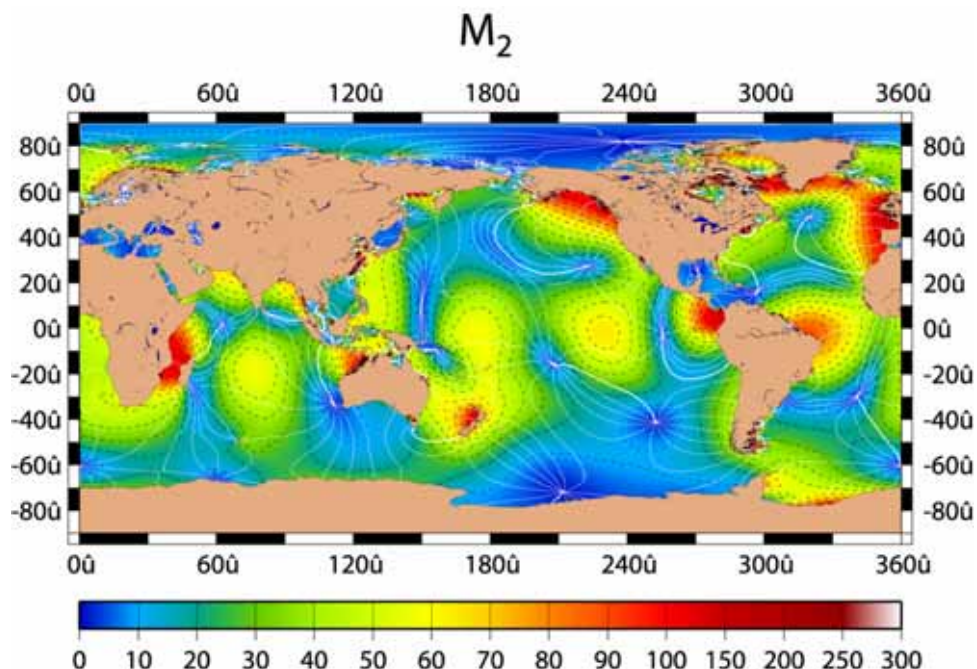


図6. データ同化の結果得られた M_2 分潮モデルの潮汐マップ。振幅の単位はcm、グリニッジ位相のコンター間隔は30°。

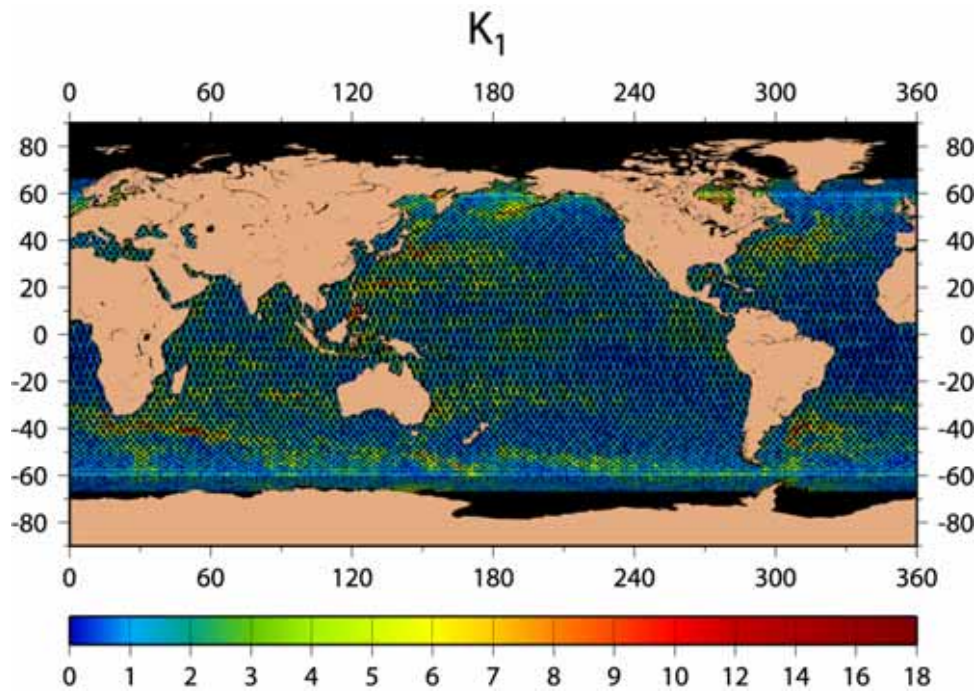


図 7. 同化によるデータフィルタ効果を示す図。K₁分潮についてT/P潮汐解析解と同化を終えたNAO.99bモデルとのベクトル差をプロットしたもの。単位はcm。

図 7 は第 5 節で述べたデータフィルタ効果を示す図である。すなわち、非潮汐性の海面変動で汚染されたT/P潮汐解析解が同化によってうまく補正されているかどうかを見るために、比較的エイリアシング周期の長いK₁分潮についてT/P潮汐解析解と最終モデルNAO.99bとのベクトル差をプロットしてある。大きな差は主に黒潮や湾流などの西岸境界流に見られ、同化による補正が成功していることを示している。ベクトル差の全球RMSはM₂、S₂、O₁分潮についてそれぞれ 1.86cm、1.27cm、1.27cmであるのに比べ、K₁分潮については 2.31cmと大きくなっている。これは第 4 節で述べた「K₁問題」で深く関係していると考えられる。

最後にモデルの評価について簡単に述べる。比較対照として GOT99.2b (Ray, 1999)と CSR4.0 (Eanes and Bettadpur, 1994 の改良モデル)を選び、験潮データとの比較と共線残差減少テストを行った。験潮データに対する RMS misfit を 8 分潮について Root Sum Square (RSS)をとった値を比較すると、外洋の験潮データに対しては RSS は 2.3cm ~ 2.5cm と大きな差はないが、浅海の験潮データについての RSS 値は NAO.99b、GOT99.2b、CSR4.0 の順に 3.1cm、3.4cm、5.2cm となった。この比較によって浅海における NAO.99b モデルの優位性が示された。共線残差減少テストは、軌道直下の空間に固定された観測点について、潮汐補正済みの海面高データの残差を、ある観測期間について調べるものであり、「より良い潮汐モデルは、より小さい残差を与える」という仮定に基づいている。上記 3 つのモデルの構築には使用されなかった T/P サイクル 240 から 258 のデータを用いて比較を行った。水深が 1000m より深い海域については 3 つのモデルから計算される残差の RMS はどれも約 8.6cm であり、外洋ではモデル間の大きな差はないという験潮データとの比較結果と調和的である。一方、水深 200m より浅い海域についての残差の RMS は NAO.99b、GOT99.2b、CSR4.0 の順に 11.2cm、14.0cm、15.8cm であった。このテストでも

NAO.99b モデルの浅海における優位性が示された。ただし、深海に比べて浅海の RMS 値が大きいことは浅海における不確実性が依然として残っていることを示している。この原因の一つとして、Matsumoto et al. (2000)では無視されている非線形潮汐が考えられる。

参考文献

- [1] S.D. Desai and J. Wahr, “Empirical ocean tide models estimated from TOPEX/POSEIDON altimetry”, *J. Geophys. Res.*, 100 (C12), 25205-25228, 1995.
- [2] R.J. Eanes and S. V. Bettadpur, “Ocean tides from two years of TOPEX/POSEIDON altimetry (abstract)”, *EOS Trans. AGU*, 75 (44), Fall Meet. suppl., 61, 1994.
- [3] C. Le Provost, M. L. Genco, F. Lyard, and P. Canceil, “Spectroscopy of the world ocean tides from a finite element hydrodynamic model”, *J. Geophys. Res.*, 99 (C12), 24777-24797, 1994.
- [4] K. Matsumoto, T. Takanezawa, and M. Ooe, “Ocean Tide Models Developed by Assimilating TOPEX/POSEIDON Altimeter Data into Hydrodynamical Model: A Global Model and a Regional Model Around Japan”, *Journal of Oceanography*, 56, 567-581, 2000.
- [5] R.D. Ray, “Spectral analysis of highly aliased sea-level signals”, *J. Geophys. Res.*, 103 (C11), 24991-25003, 1998.
- [6] R.D. Ray, “A global ocean tide model from TOPEX/POSEIDON altimetry: GOT99.2”, *NASA Tech. Memo.*, 209478, 1999.
- [7] E. W. Schwiderski, “Ocean tides, I, Global ocean tidal equations”, *Mar. Geod.*, 3, 161-217, 1980.
- [8] C.K. Shum, P. L. Woodworth, O. B. Andersen, G. Egbert, O. Francis, C. King, S. Klosko, C. Le Provost, X. Li, J. Molines, M. Parke, R. Ray, M. Schlax, D. Stammer, C. Tierney, P. Vincent, and C. Wunsch, “Accuracy assessment of recent ocean tide models”, *J. Geophys. Res.*, 102 (C11), 25173-25194, 1997.
- [9] Y. Tamura, “A harmonic development of the tide-generating potential”, *Marees Terrestres Bulletin d'Informations*, 99, 6813-6855, 1987.
- [10] 松本晃治, 「海洋潮汐モデル NAO.99b の構築と普及」, *日本測地学会誌*, 50, 187-200, 2004.