

ADEOS-II を利用した地球重力ポテンシャルモデルの検証

中村 信一^{*1}, 内村 孝志^{*1}, 片桐 征治^{*1}, 鈴木 明信^{*1}, 山本洋介^{*2}
S. Nakamura ^{*1}, T.Uchimura ^{*1}, S.Katagiri ^{*1}, A Suzuki ^{*1}, Y. Yamamoto ^{*2}

^{*1} 宇宙航空研究開発機構, Japan Aerospace Exploration Agency

^{*2} 富士通株式会社, Fujitsu Limited

Email: nakamura.shinichi@jaxa.jp ^{*1}

Abstract:

In the orbit determination of ADEOS-II, we estimated the gravitational resonance for the geopotential model. We modified the geopotential model using the estimation results, and re-determined the ADEOS-II orbit. As the result, for the geopotential model (JGM-3) used in JAXA high-precise orbit determination system (GUTS), modification of the geopotential model made little difference in orbit calculation results. In order to identify this cause, we repeated the same analysis using a lower precision geopotential model (GEM-10B) and confirmed that the modification of the geopotential model improved the orbit determination accuracy. This result indicated that observation data of polar orbit satellites like ADEOS-II are well reflected in the recent geopotential model. Then, we concluded that geopotential model (JGM-3) was not a cause of the accuracy degradation in the resolution of the JAXA high-precise orbit determination experiment.

1. 概要

ADEOS-II のデータを利用した軌道決定の際に、重力共鳴項推定を実施した。その結果を受けて改良した地球重力ポテンシャルモデルの元で ADEOS-II の軌道の再決定を行った。その結果、JAXA 高精度軌道決定システム(GUTS)で利用している地球重力ポテンシャルモデル(JGM-3 モデル)では、重力共鳴項推定による地球重力ポテンシャルモデルの修正を行ったにもかかわらず、軌道生成値にほとんど差がない事が判明した。この原因を探るため、地球重力ポテンシャルモデルを精度の荒いモデル(GEM-10B)に変更して同様の解析を行ったところ、軌道決定精度の向上が見えた。結論として、昨今の地球重力ポテンシャルモデルはADEOS-IIのような極軌道衛星の観測データを十分に反映させていると解釈できる。JAXA 高精度軌道決定実験の分解能においては地球重力ポテンシャルモデル(JGM-3)が精度劣化の原因ではないと言える。

2. イントロダクション

2 - 1 ADEOS-II の所量

$a=7182.842783\text{km}$, $e=0.001149$, $i=98.700547\text{deg}$,

$v=7446\text{ m/s}$, $n=1.036\times 10^{-3}\text{ rad/sec}$,

$$P=6.067\times 10^3\text{ sec}=\frac{1}{14.24}\text{ day}$$

太陽同期準回帰軌道、回帰周期は4日

ここで、注目すべき事は以下である。

周期 P より、1日に約 14 回、ADEOS-II は地球を回っている。つまり、地球を東経、西経に 14 分割した線上を飛行していると考えてよい。後に、この 14 という数字が出てくるが、根元は周期である。

2 - 2 地球重力ポテンシャルモデルの系譜

衛星の軌道決定に利用する地球重力ポテンシャルモデルは、過去多くの衛星の軌道解析を考慮しながら精度を上げてきた。

最近の地球重力ポテンシャルモデルの進化を整理すると、以下の通りである。

年	モデル名	分解能(deg)
1974	GEM-6	16 × 16
1976	GEM-8	25 × 25
1977	GEM-9	22 × 30
1978	GEM-10B	36 × 36
1987	GEM-T1	36 × 36
1994	GEM-T3	50 × 50
1996	JGM-3	70 × 70
1998	EGM96	360 × 360

JAXA の高精度軌道決定実験システム(通称 GUTS)が現在、利用している地球重力ポテンシャルモデルは JGM-3 である。我々の今回の解析では、GEM-10B と JGM-3 が登場する。

分解能についての詳細な説明は後とするが、JGM-3 の 70deg × 70deg の分解能とは、地球円周を 70 当分したサイズのメッシュで重力場を決めている事に相当する。

参考までに、概念的な模式図を以下に示す。視覚的に見ると、JGM-3 の方が、多少の細かい構造まで反映している。劇的に地球重力ポテンシャル構造が変わる訳ではないので、衛星軌道決定という立場では、地球重力ポテンシャルに対して大きく精度が上がったようには見えないが、実際に衛星を飛行させて軌道を決定してみると、その違いが明らかになる。

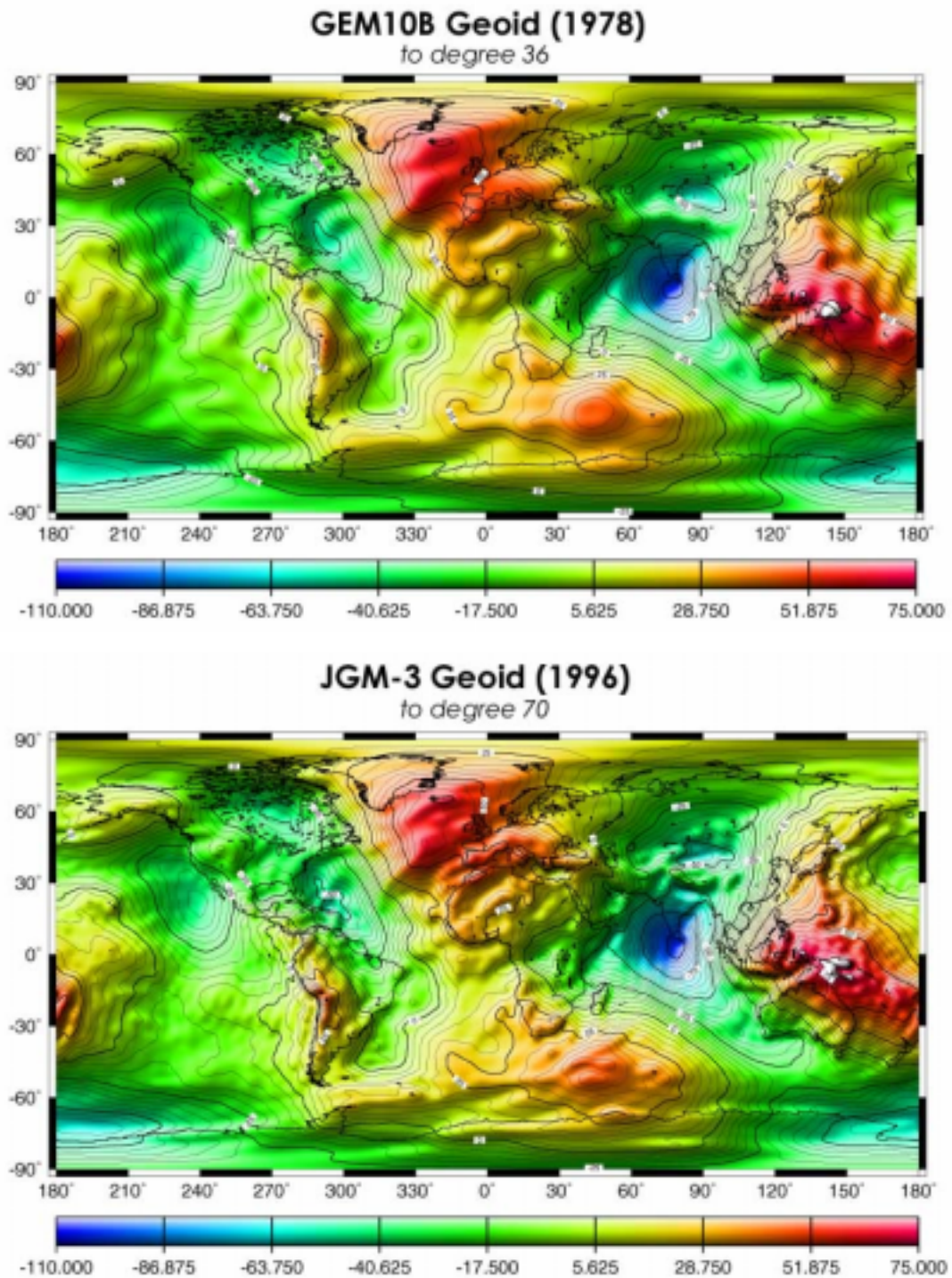


図1. 地球重力ポテンシャルモデルのイメージ
上段が GEM-10B, 下段が JGM-3 である。

2 - 3 地球重力場

地球重力場を考える。座標系は地球中心を原点とした座標(r , θ , ϕ)を採用する。ここに、 θ は

赤道から計った角度(緯度)と定義するため、通常の極座標とは異なる。重力場なので、基本は Laplace 方程式である。地球重力ポテンシャルモデルを と書くと、次式で与えられる。

$$\Delta\Phi = 0$$

この解のうち、距離(r)が無限大で正則な解は以下で与えられる(導出は省略)。

$$\Phi = \frac{Gm_e}{r} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Gm_e}{r} J_n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_n(\sin\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{Gm_e}{r} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\sin\theta)$$

ここに、G は重力定数($6.672 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$)、 m_e は地球質量($5.974 \times 10^{24} \text{ kg}$)、 a_e は地球半

径(6378136m)、 P_n^m は Legendre 陪関数、 J_n, C_{nm}, S_{nm} は Legendre 陪関数による展開係数である。

軌道力学の慣習に従い、 $m=0$ の展開係数を $J_n = -C_{n0}$ と表記した。

先の、地球重力ポテンシャルモデルにおける分解能、例えば JGM-3 では 70×70 とは、上記の展開において $n=70, m=70$ の項まで考慮した事に相当する。

2 - 4 重力共鳴

(1) 概念的理解

ADEOS-II に限定して説明を行う。

ADEOS-II は、一日に地球を 14 周している。地球を東経、西経方向に 14 分割したならば、その上を通過していると考えてよい。

一方で、地球重力ポテンシャルモデルにおいて、Legendre 陪関数の $m=14$ 次の係数 (C_{nm}, S_{nm}) は、地球の重力ポテンシャルにおいて、地球の東経、西経を 14 に分割した基底を張る周期関数(Legendre 関数)の振幅を表す。

ADEOS-II 衛星の飛行する場所と、その場所の地球重力ポテンシャルモデルの周期成分が一致するのが、Legendre 陪関数の $m=14$ 次である。もしも、1週目で重力の山の上を通過したならば、2週目も重力の山の上を通過するので、ADEOS-II は大きな重力場の上を飛行していると感じる。つまり、ADEOS-II が感じる実際の地球重力と、我々が解析に利用する地球重力ポテンシャルモデルの間に差があったならば、その差が大きく現れてくる。

(2) 定式化

地球重力ポテンシャルによる軌道長半径の変化は、以下の式で与えられる[3]。

$$\frac{da}{dt} = 2\bar{n}aF_{nmpq}(i)G_{npq}(e)S'_{nmpq}(\omega, l, \Omega, \theta)(n-2p+q)/a^n \quad \cdots(1)$$

$$\text{ここで、} \quad S'_{nmpq} = \begin{bmatrix} -C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} \sin\{(n-2p)\omega + (n-2p+q)l + m(\Omega - \theta)\}$$

$$+ \begin{bmatrix} S_{nm} \\ C_{nm} \end{bmatrix} \cos\{(n-2p)\omega + (n-2p+q)l + m(\Omega - \theta)\}$$

(上段 n-m:偶数 下段 n-m:偶数) ($n \geq p, q \geq 0$)

F_{nmp} : 傾斜角関数 G_{npq} : 離心率関数 \bar{n} : 平均運動

C_{nm}, S_{nm} : n, m におけるポテンシャル係数 i : 近地点引数 l : 平均近点離角

Ω : 昇交点赤経 θ : グリニッジ恒星時

式(1)において、 S'_{nmpq} を除き定数と考えることができる。また、離心率 $e \approx 0$ の場合は $q=0$ の項のみを考慮し、 $G_{npq} \approx 1$ とおく。この時、 ω, l, Ω を時間の一次関数として式(1)を積分すると次式が得られる^[文献2]。

$$\Delta a_{nmp0} = \frac{2\bar{n}aF_{nmp}(n-2p)}{a^n[(n-2p)\dot{\omega} + (n-2p)\bar{n} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta})]} S_{nmp0} \quad \dots(2)$$

$$\text{ここで、} \quad S_{nmp0} = \begin{bmatrix} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{bmatrix} \cos\{(n-2p)\omega + (n-2p)l + m(\Omega - \theta)\}$$

$$+ \begin{bmatrix} S_{nm} \\ C_{nm} \end{bmatrix} \sin\{(n-2p)\omega + (n-2p)l + m(\Omega - \theta)\}$$

(上段 n-m:偶数 下段 n-m:偶数)

式(2)から、分母が 0 に近くなる係数の項が表れる。ADEOS の場合には、日周回数 $\bar{n} \approx 14$ (Rev/日) $\dot{\theta} \approx 1$ (Rev/日) $\dot{\omega}, \dot{\Omega} \approx 0$ (Rev/日: $\dot{\theta}$ に比し小なため) として式(2)の分母に代入すると以下のようなになる。

$$(n-2p)\dot{\omega} + (n-2p)\bar{n} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}) = 14(n-2p) - m \quad \dots(3)$$

従って、式(3)の $14(n-2p) - m \approx 0$ になる条件は以下となる。

$$m = 14, 28, 42, \dots$$

$$m = 14 \text{ の時には } n \text{ は奇数次 } (15, 17, \dots) \quad \dots(4)$$

$$m = 28 \text{ の時には } n \text{ は偶数次 } (28, 30, \dots) \quad \dots(5)$$

上記の時、(2)式の分母が小さくなり、 C_{nm}, S_{nm} の値は小さいが摂動量 a は大きくなるため、この現象を共鳴現象(この項を共鳴項と呼んでいる)。

なお、共鳴項の総和としての共鳴現象は、衛星の回帰日数の周期で変化する。このため共鳴項 C_{nm}, S_{nm} に誤差がある場合、地球重力ポテンシャルの軌道に及ぼす影響が支配的な軌道では軌道決定における軌道長半径(及び緯度引数)誤差の大きさは、回帰日数(ADEOS : 4 日)の周期で変化すると考えられている。また、共鳴項は誤差感度係数が大きくなるため、準回帰型衛星の軌道から他の重力ポテンシャル係数に比較して精度よく推定できると考えられている。

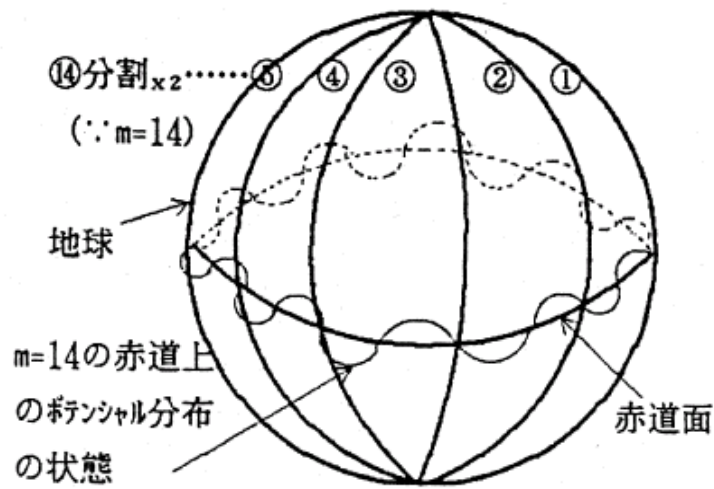


図2 m=14 non-Zonal 項のポテンシャル分布

3. ADEOS-II のデータによる解析結果

3 - 1 解析方法

共通条件

- ◇ ADEOS-II より得た GPS データを用いる。
- ◇ ADEOS-II の回帰周期に合わせ、4日のアーキの軌道決定を行う。
- ◇ ρ_1, Γ_1 の推定は、24 時間の更新間隔で行う。
- ◇ 2003 年 10 月 5 日 ~ 10 月 8 日のアーキを利用する。
- ◇ 参考: 先に ADEOS-2 高精度軌道決定実験において、JAXA 高精度軌道決定実験システムの ADEOS-II に対する軌道決定精度は 40cm(RMS)であった。よって、40cm 以上の誤差は有意な差と考える。

実施方法

- ◇ (重力共鳴項推定ありの軌道決定)と(重力共鳴推定なしの軌道決定)の差を取ることで、重力共鳴推定による効果を確認する。この違いは、重力モデルの違いである。こちらから最初に与えた地球重力ポテンシャルモデルを利用した軌道決定が(重力共鳴推定なしの軌道決定)である。一方、(重力共鳴推定ありの軌道決定)は、ADEOS-II が感じた地球重力ポテンシャルを元に、こちらが与えた地球重力ポテンシャルモデルに改良を加えた地球重力ポテンシャルモデルを利用した軌道決定である。別の言葉で言えば、ADEOS-II 用のオーダーメイド地球重力ポテンシャルに変更をかけて、ADEOS-II の軌道決定を行った事になる。
- ◇ 重力ポテンシャルへの改良は C_{nm}, S_{nm} における $(n,m)=(15,14), (17,14)$ 項、つまり

$C_{15,14}, C_{17,14}, S_{15,14}, S_{17,14}$ だけを反映させた。

- ◇ 重力共鳴項の推定は、全(n,m)ではなく、共鳴を起こす事が判明している $m=14,28$ においてのみ実施している。

3 - 2 JGM-3 モデルによる解析と結論

重力共鳴項推定(あり、なし)という条件で軌道決定を行い、その差を取った物が下記の図である。Along Track 方向、Cross Track 方向、Radial 方向の成分に対して作図したものである。

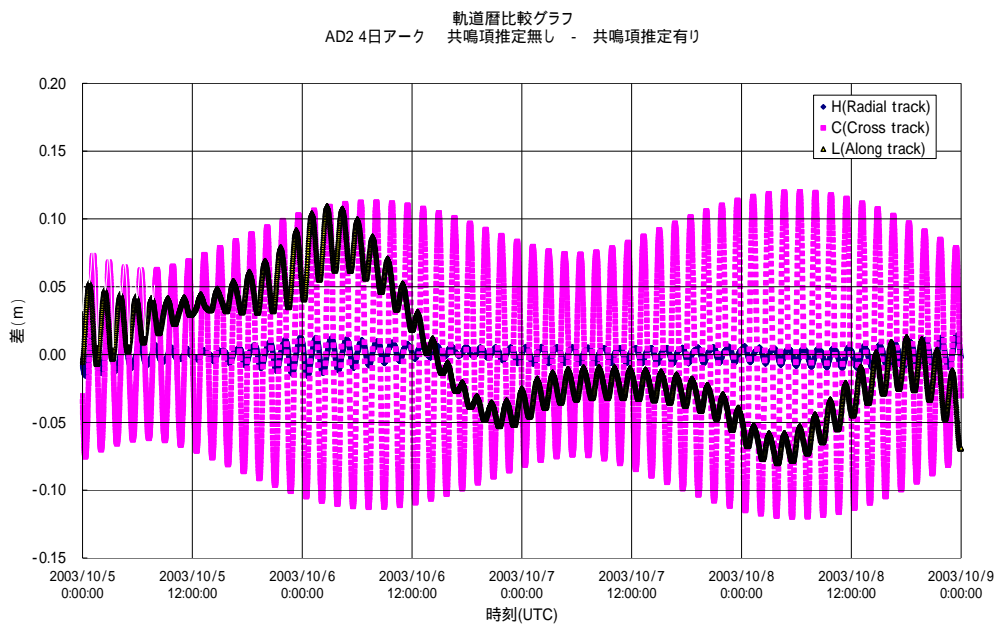


図3 . 重力共鳴(あり、なし)間の軌道差 with JGM-3

主な差は、Cross Track 方向に出ている。元々の ADEOS-II 高精度軌道決定実験においては主たる誤差要因は、Along Track 方向であり、そのオーダーは 40cm(RMS)であった。重力共鳴項推定(あり、なし)の差を評価したところ、Along Track 方向、Radial 方向にはほとんど影響がなく、相対的に Cross Track 方向の誤差が大きく見えてきたと考えられる。

ところが、JAXA の高精度軌道決定システムの ADEOS-II 軌道に対する精度は 40cm である事より、上記の差(10cm オーダー)は誤差の範囲内である。よって、グラフに出ている値の大きさは、全て分解能以内の数値であり、細かく議論できる物ではない。

よって、JGM3 モデルを利用する限り、重力共鳴推定を行った結果を反映させた軌道決定では、その効果は現れてこない。

この解釈として、ADEOS-II のデータについて、2通りの可能性が考えられる。

- 重力共鳴推定の結果が現れないくらい JGM-3 モデルは精度が良い
- 重力共鳴推定を計算するには、ADEOS-II のデータは感度が悪い

まず、 の可能性を探るため、GEM-10B モデルを用いて、同様の解析を行う事とする。次に、 に
ついては、重力共鳴推定を行った際の感度を実際に書かせる事とする。

3 - 3 重力ポテンシャルを変えた場合

地球重力ポテンシャルモデルとして、GEM-10Bを採用し、同様の解析を行ってみた。

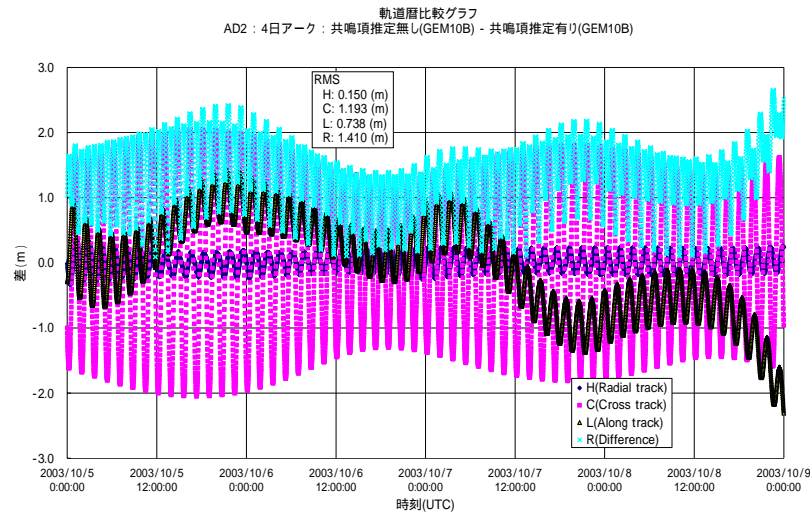


図4 . GEM-10B で重力共鳴 (有無) で決定される軌道差

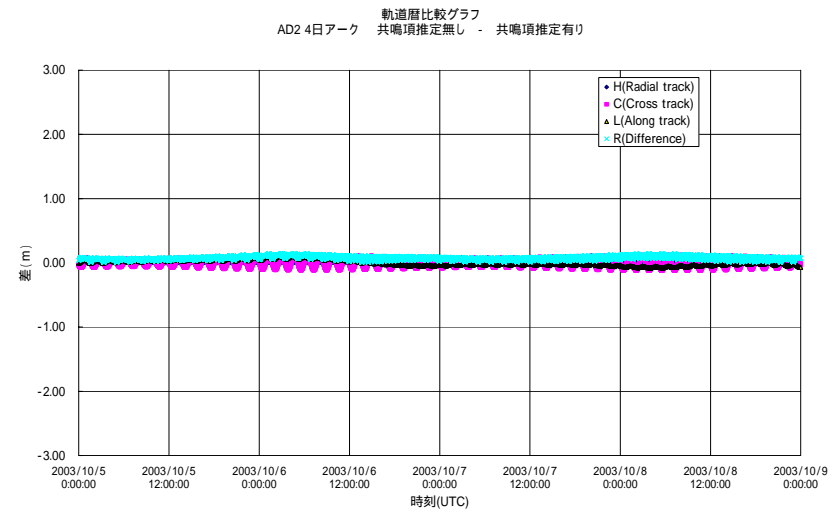


図5. JGM-3 で重力共鳴 (有無) で決定される軌道差

左が、GEM-10B(分解能 36×36)、右が JGM-3(分解能 70×70)の地球重力ポテンシャルモデルを利用した際の、重力共鳴項推定(あり、なし)間の軌道決定値の差である。右図は、2-2 章で提示したものを、縦軸のスケールを左に合わせて再度作成したものである。

	GEM-10B	JGM-3
Radial	15.0 cm	0.6cm
Cross Track	119.3cm	6.8cm
Along Track	73.8cm	4.4cm
Difference	141.0cm	8.1cm

ADEOS-II 軌道決定の精度が 40cm(RMS)に比べ、GEM-10B では 141cm 程度の差が発生している。この差は十分有意である。つまり、GEM-10B では、明らかに重力共鳴項推定により決定される軌道が変わる事がわかる

3 - 4 ADEOS-II は重力共鳴に対して感度がないのか？

重力共鳴項推定の感度(sensitivity)として、展開係数 C_{nm}, S_{nm} を振れさせた時、軌道決定される位置、速度がどのくらい変動するかという量を定義する。

ADEOS-II のデータより生成した軌道の位置、速度を各々 $r_{AD2} = (x_{AD2}, y_{AD2}, z_{AD2})$ 、及び $v_{AD2} = (v_x, v_y, v_z)$ とすると、位置(position)を基準として C_{nm}, S_{nm} を振らせて求まる感度 $Sp_{C_{nm}}, Sp_{S_{nm}}$ は以下のように定義する。

$$Sp_{S_{nm}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_{AD2}}{\partial S_{nm}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_{AD2}}{\partial S_{nm}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_{AD2}}{\partial S_{nm}}\right)^2}$$

$$Sp_{C_{nm}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_{AD2}}{\partial C_{nm}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_{AD2}}{\partial C_{nm}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_{AD2}}{\partial C_{nm}}\right)^2}$$

同様に、速度(velocity)を基準に、 C_{nm}, S_{nm} を振らせて求まる感度(sensitivity)を $Sv_{C_{nm}}, Sv_{S_{nm}}$ と表記し、以下のように定義する。

$$Sv_{S_{nm}} = \sqrt{\left(\frac{\partial v_x}{\partial S_{nm}}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial S_{nm}}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial S_{nm}}\right)^2}$$

$$Sv_{C_{nm}} = \sqrt{\left(\frac{\partial v_x}{\partial C_{nm}}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial C_{nm}}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial C_{nm}}\right)^2}$$

今回は、4日間のアークで計算を行っているが、上記の感度を計算するタイミングは、1日目の最初の時間(データの頭)で評価する。

ADEOS-II の重力共鳴項推定に関する解析アークは、特に作為的に4日間を選んだ訳ではないので、ある瞬間を適当に決めても、結論が変わることはないと考えた。

以下に、各感度を書かせた図を示す。

図は、各感度に対して $m=14$ を固定し、 $n=15, 17, \dots$ (理由: $m=14$ に対しては n は奇数)、 $m=28$ を固定し、 $n=28, 30, \dots$ として共鳴を起こす項を書かせたものである。

なお、図6には、位置による感度だけを表示する。速度に関する感度も、その傾向は同じである。

(1) 重力共鳴に関した各重力係数を比較する(衛星位置から算出した感度)

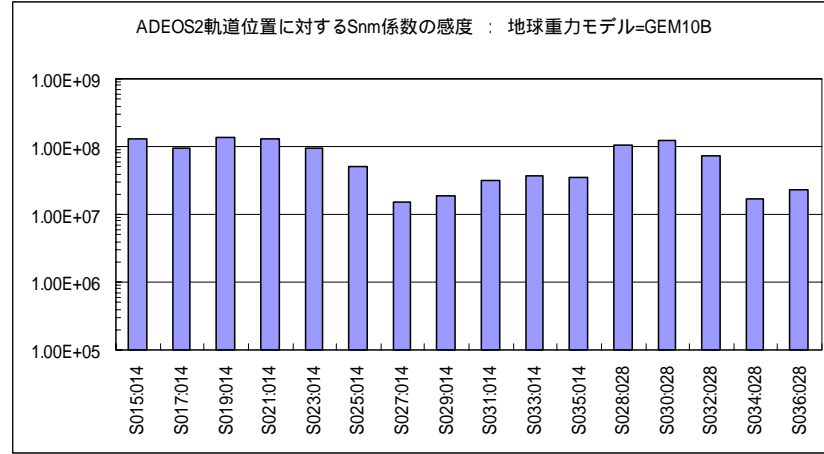
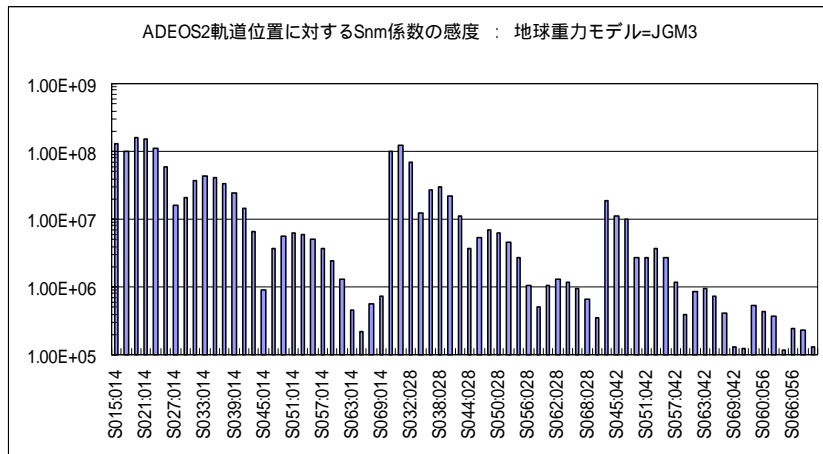
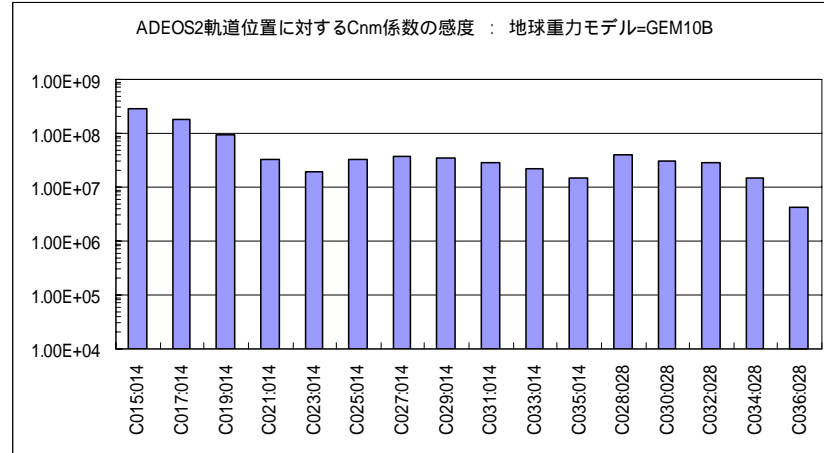
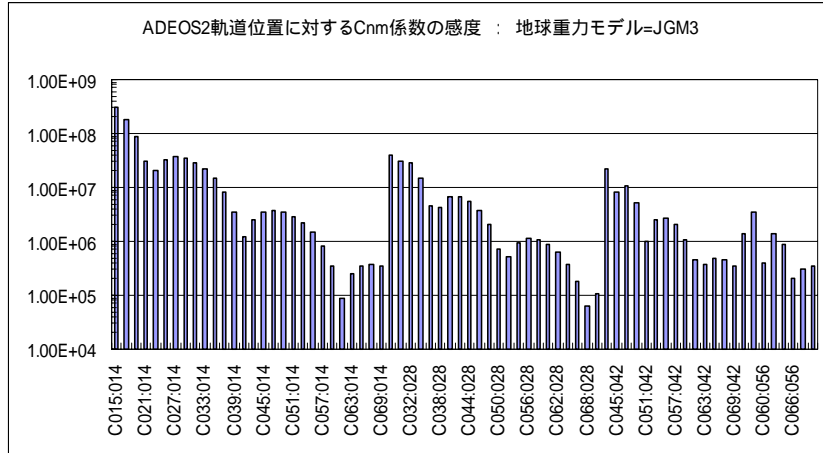


図6 重力共鳴に関する感度(SpCnm,SpSnm)、左が JGM-3,右が GEM-10

図6より読みとれること

- JGM-3も、GEM-10Bも、感度はmを固定した場合はnが低次の方が大きい
- JGM-3もGEM-10Bともに、mが低次の方が感度が大きい
- JGM-3とGEM-10Bを比較すると、 C_{nm}, S_{nm} に対する同じ次数(n,m)=(15,14),(19,14)、...における感度の大きさは、ほぼ同じである。JGM-3は、70次までであるので、GEM-10Bより大きなn,m領域で図がかける事となっている。
- 感度のレンジを表にすると以下の通りである。JGM-3の方がレンジが広いが、これはn,m領域が広い事に由来する。もしも、JGM-3も36次でうち切ると、GEM-10Bと同じ程度のレンジとなる。

重力共鳴項の感度を整理すると以下である。

	JGM-3	JEM-10B
位置に対する Cnm	$6.3e4 \sim 3.0e8$	$4.4e6 \sim 3.0e8$
位置に対する Snm	$1.2e5 \sim 1.6e8$	$1.5e7 \sim 1.2e8$
速度に対する Cnm	$1.2e2 \sim 4.0e5$	$7.0e3 \sim 3.9e5$
速度に対する Snm	$1.6e2 \sim 1.7e5$	$1.4e4 \sim 1.5e5$

GEM-10Bの感度はJGM-3と次数が同じならば、同じ大きさである。GEM-10Bでは、決定される軌道に大きな差が出たが、JGM-3では差がほとんどでなかった。感度が同じ程度であるにもかかわらず差が出た事は、JGM-3が優秀な地球重力ポテンシャルモデルであることを意味する。

3 - 5 「重力共鳴項推定を行った GEM-10B」と「JGM-3」による軌道決定値の違い

今回の解析は、重力共鳴推定を行い、その結果を $C_{15,14}, C_{17,14}, S_{15,14}, S_{17,14}$ のみ地球重力ポテンシャルモデルにフィードバックさせた。この作業を、行っても、行わなくても、JGM-3では、決定される軌道はほとんど変わらなかった。GEM-10Bは、大きく変化した。

そこで、一つ疑問がある。重力共鳴推定を行った GEM-10B で決定される軌道と、JGM-3 で決定される軌道は同等品であるか確認する必要がある。

そこで、軌道決定値の差を確認してみた。

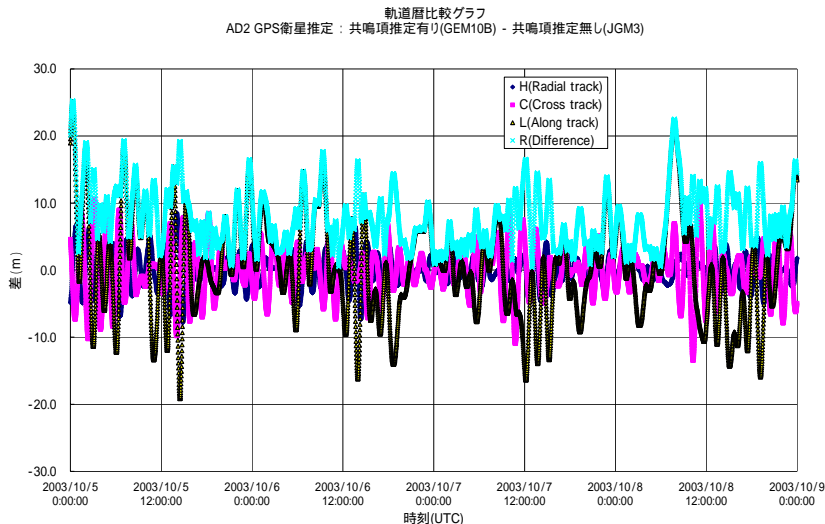


図7. 重力共鳴考慮済み GEM-10B で決めた軌道と JGM-3 で決めた軌道の差

その結果、重力共鳴項推定を行った GEM-10B による軌道と、JGM-3 による軌道は、同一品とは言えない事が判明した。

	GEM-10B 重力共鳴推定なし -JGM3	GEM-10B 重力共鳴推定あり -JGM3
Radial	229.7 cm	234.0cm
Cross Track	443.6cm	389.9cm
Along Track	767.3cm	762.3cm
Difference	915.5cm	887.6cm

表より、GEM-10B に対して重力共鳴項推定を行った上で決定した軌道の方が若干、JGM-3 により決定された軌道に近い事がわかるが、それでも、JGM-3 との差は 888cm もあり、純粋に JGM-3 を使用して算出された軌道とは、異なる軌道が計算されているに等しい状況である。

この事実が意味することは、GEM-10B の重力共鳴項を計算し、その結果を $C_{15,14}, C_{17,14}, S_{15,14}, S_{17,14}$ だけに代表させて、地球重力ポテンシャルモデルに反映させたとしても、 $C_{15,14}, C_{17,14}, S_{15,14}, S_{17,14}$ の項において、大きな誤差を含むため JGM-3 により決定される軌道とは異なる軌道を算出してしまふ事を意味する。もしも、全 C_{nm}, S_{nm} を推定し、全ての推定結果を GEM-10B にフィードバックさせたならば、かなり近い軌道を生成したと思われる。残念ながら、現状の GUTS では、全 C_{nm}, S_{nm} を推定する事はできない。なぜならば、JGM-3 では $70 \times 70 \times 2$ (CroS)=9800 個の推定値を持ち、非常に解析が困難である。今回の重力共鳴項推定も、手により共鳴を起こす項を調べた上で、必要な項だけを解析しており、地球重力ポテンシャルモデルにフィードバックさせたのは4項だけである。

4. 結論

ADEOS-II 軌道を利用した重力共鳴項を行うことで、地球重力ポテンシャルモデルと衛星軌道決定精度の関係を評価した。

ADEOS-II 軌道に対して JGM-3 モデルを使用する限り、重力共鳴項の推定を行い、地球重力ポテンシャルモデルに修正を行っても、決定される軌道は 8.1cm 程度の差しか出なかった。ADEOS-II 軌道に対して、JAXA 高精度軌道決定実験システムは 40cm(RMS)の決定精度を持っている。この 40cm と比べると、8.1cm は分解能以下の差である。よって、ADEOS-II 軌道に限って言えば、この JGM-3 は地球重力ポテンシャルを良い精度で表現していると解釈できる。

別の視点でこの結果を解釈すると、高精度軌道決定実験システムにおいては、地球重力ポテンシャルモデルが軌道決定精度を劣化させている訳ではない事が言える。

もしも、ADEOS-II 軌道において、8cm 以上の軌道決定精度を要求する、または、より高精度に地球重力ポテンシャルの影響を受ける物理量を見たい場合は JGM-3 以降の高精度な地球重力ポテンシャルモデルを利用する必要がある。

余談ではあるが、ADEOS-II の軌道決定においては、GEM-10B を用いる限り、重力共鳴項推定を行っても、行わなくても精度の高い軌道決定(少なくとも現在の JAXA の精度:40cm)はできない事も判明した。

出展・参考文献

- [1] 古在由秀 「人工衛星の軌道」(東京天文台)
- [2] W.M.Kaula, "Theory of Satellite Geodesy", Dover Publications, Inc. Mineola, New York
- [3] 田島 徹 「MOS-1 の追跡データによる重力ポテンシャルモデルの解析」,TK-M14101(1989)