

SPH法によるマグマ貫入過程の 数値シミュレーション

井田喜明 (アドバンスソフト株式会社)
藤田英輔 (防災科学研究所)

SPH法(粒子法の一つ)は、物質の流れや変形を連続体力学と対応づけて容易に定式化できる。SPH法をマグマの貫入過程に適用しようとする、粒子の運動や応力の大きな揺らぎが問題になる。その揺らぎは人工粘性を用いて抑えられる。

背景

- 連続体力学に基づく数値シミュレーションは、空間に固定した**構造格子**を使う**オイラー流**の扱いが伝統的。差分法、有限要素法、有限体積法など。
- 物質を粒子に分割する**粒子法**は、粒子とともに視点が移動する**ラグランジェ流**の扱い。構造格子の制約を受けずに、**複雑な境界条件**や**大きな変形**に柔軟に対応できる。
- 粒子法の中で、粒子間の力を直接仮定する**個別要素法(DEM)**は、連続体力学との対応が不明瞭。
- **SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics)法**は、**連続体力学**に沿う形で粒子の変形や相互に働く力を計算。
- SPH法は、宇宙物理学の分野で1977年に開発されて以来、工学分野を中心に基礎研究や各種の応用目的に広く使われてきた。特に、**自由表面**を含む大きな変形、**強い衝撃**の効果、**複数の物質の相互作用**などの問題に対する適用事例が多い。

SPH法の基礎

ディラックのデルタ関数 (f は任意の関数)

$$f(x) = \int f(x') \delta(x'-x) dx'$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = - \int f(x') \frac{\partial \delta(x'-x)}{\partial x_i} dx'$$

有限なカーネル関数 $w(x, h)$ で近似

$$f(x) = \int f(x') w(x'-x, h) dx'$$

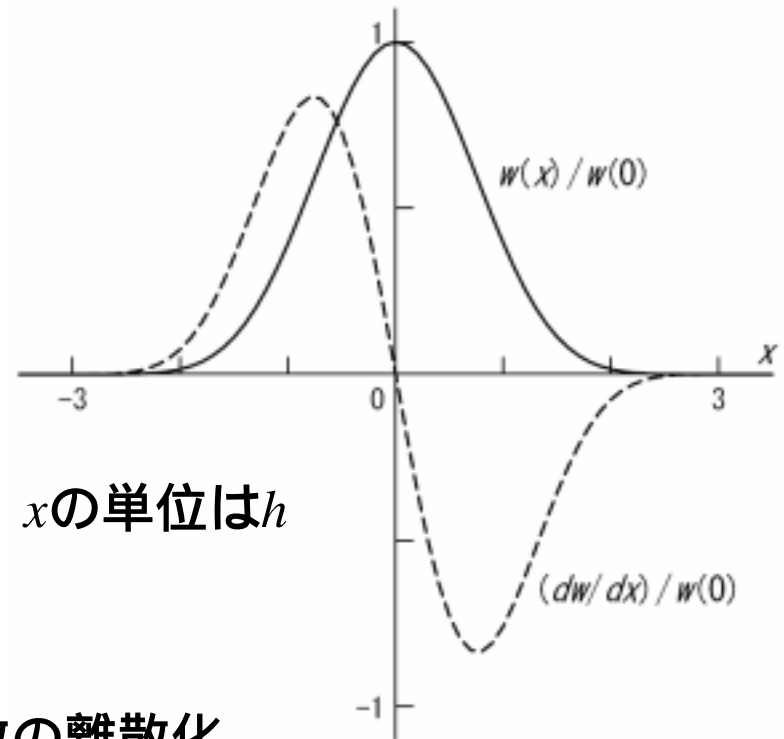
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = - \int f(x') \frac{\partial w(x'-x, h)}{\partial x_i} dx'$$

カーネル関数が満たすべき条件

$$\int w(x'-x, h) dx' = 1$$

$$\int \frac{\partial w(x'-x, h)}{\partial x_i} dx' = 0$$

実際に用いたカーネル関数 (5次式)



関数の離散化

$$f^n = \sum_k f^k w(x^k - x^n, h) V^k$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^n = - \sum_k f^k \frac{\partial w(x^k - x^n, h)}{\partial x_i} V^k$$

点 x^n に体積 V^n の粒子、その関数値を f^n

運動方程式と構成方程式

連続体の運動方程式

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i$$

v_i 速度、 ρ 密度、 σ_{ij} 応力、 g_i 重力

離散化による粒子の運動方程式

$$\frac{dv_i^n}{dt} = -\frac{1}{\rho^n} \sum_{j,k} \sigma_{ij}^k \frac{\partial w(x^k - x^n, h)}{\partial x_j} V^k + g_i$$

連続体の質量保存則

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

離散化による変換

$$V^n = \frac{\rho_o^n V_o^n}{\rho^n}$$

$$\frac{1}{\rho^n} \frac{d\rho^n}{dt} = \sum_{i,k} v_i^k \frac{\partial w(x^k - x^n, h)}{\partial x_i} V^k$$

流体の構成方程式(ξ 、 η は粘性率)

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \left(-p + \xi \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$p = K \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} \quad (K \text{は体積弾性率})$$

弾性体の構成方程式(λ 、 μ は弾性定数)

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

離散化には次の式を用いる

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^n = -\sum_k v_j^k \frac{\partial w(x^k - x^n, h)}{\partial x_i} V^k$$

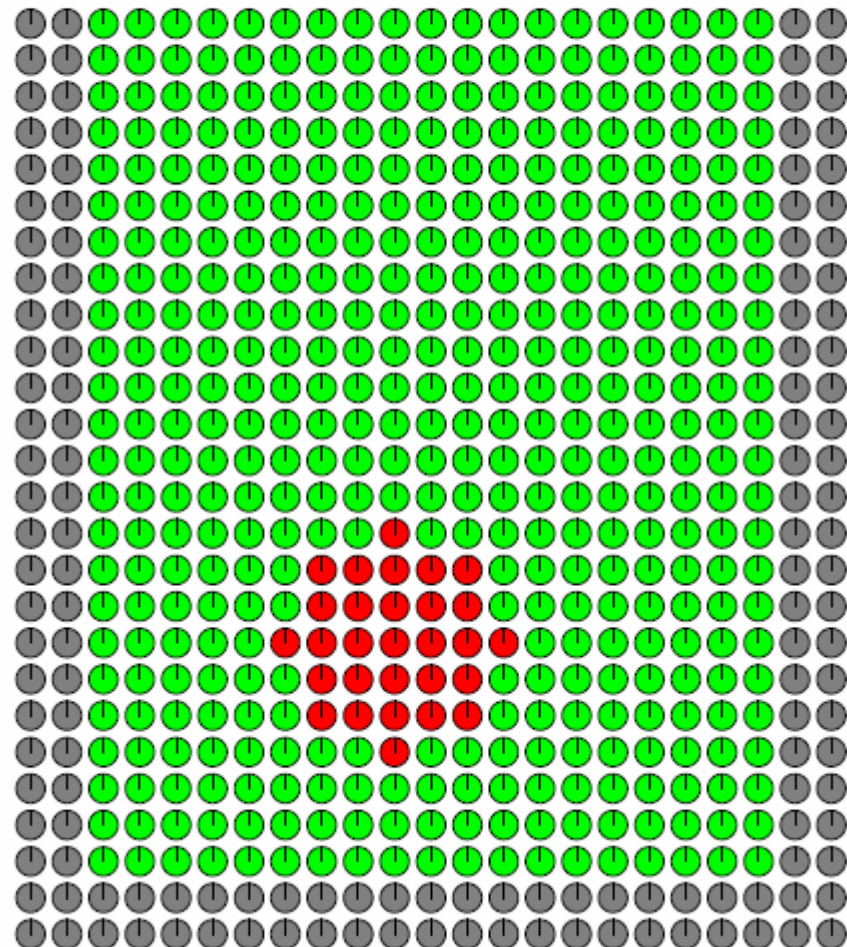
密度、速度、応力などの物理量が
粒子の性質として扱える

計算の制御と計算結果の出力

制御ファイルと粒子の初期配列

sample01 light solid disk in liquid pool

0: t = 0.0000 s — 1.51e-001 m — 0.00e+000 m/s



```
contrl.dat
sample01
5.0e-4 12000 1000 200
0.0 -9.81 0.0 0
6 2.5 1.0 0.0
80 195 264 287 563
3 1.0
1 0 1000.0 1.0e1 1.0e7 0.25
2 2 500.0 1.0e1 4.0e7 0.25
3 1 1000.0 1.0e1 1.0e7 0.25
:comments
:time dif, steps: total, disp, monit
:gravity x, y, z: ref pc grp (=0 none)
:opt, kernel avr, eqs, artif viscosity
:monitor particles
:# of pc groups, strength/bkm
:id, sp, dens, visc, bkm, pois
```

```
inpos.dat
1 0.1
3 1 2
-1.0 1.2 0.0 2.5
2 2 2
0 0
0.0 0.8 0.3 0.3
:jooption, pc distance
:id for pool, wall, disk (none for 0)
:upper & lower ranges of pool
:wall thick: bottom, left, right
:top, wall & vacancy
:disk: center loc, radii (if ids > 0)
```

出力ファイル

result.dat: pviewによる表示

output.dat: つくば大kit8で表示

monit.dat: モニター用

inpos_c.dat: 継続計算用

重い流体中の軽い固体の上昇

sample01 light solid sphere

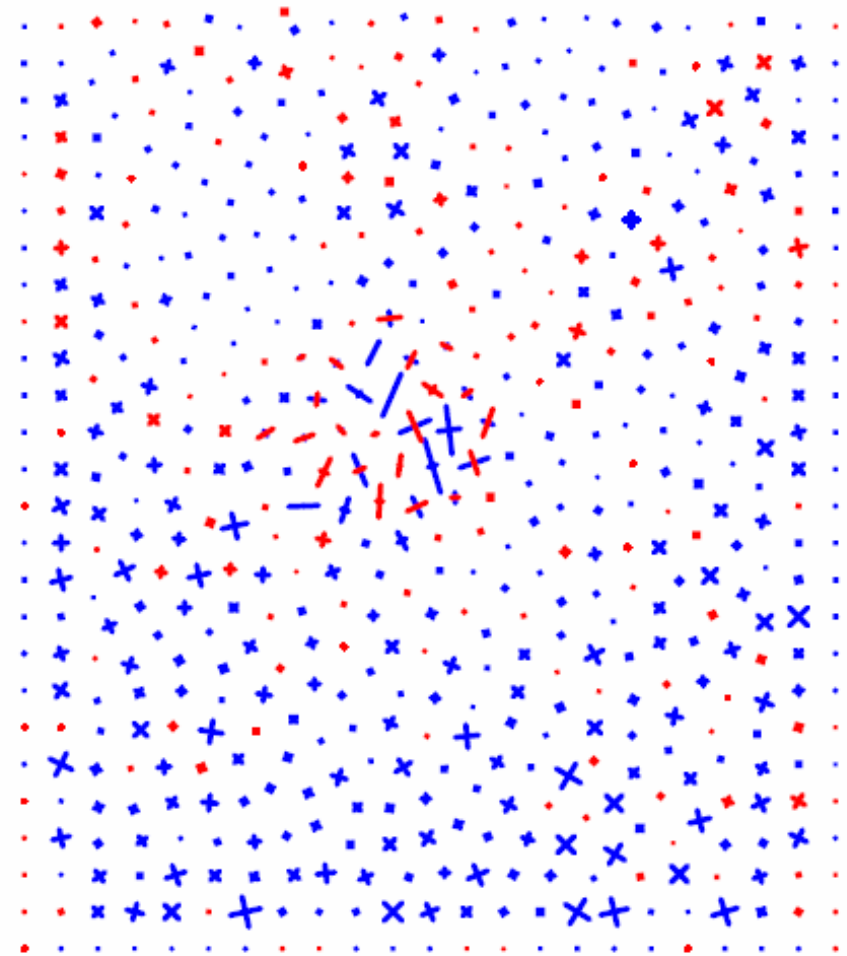
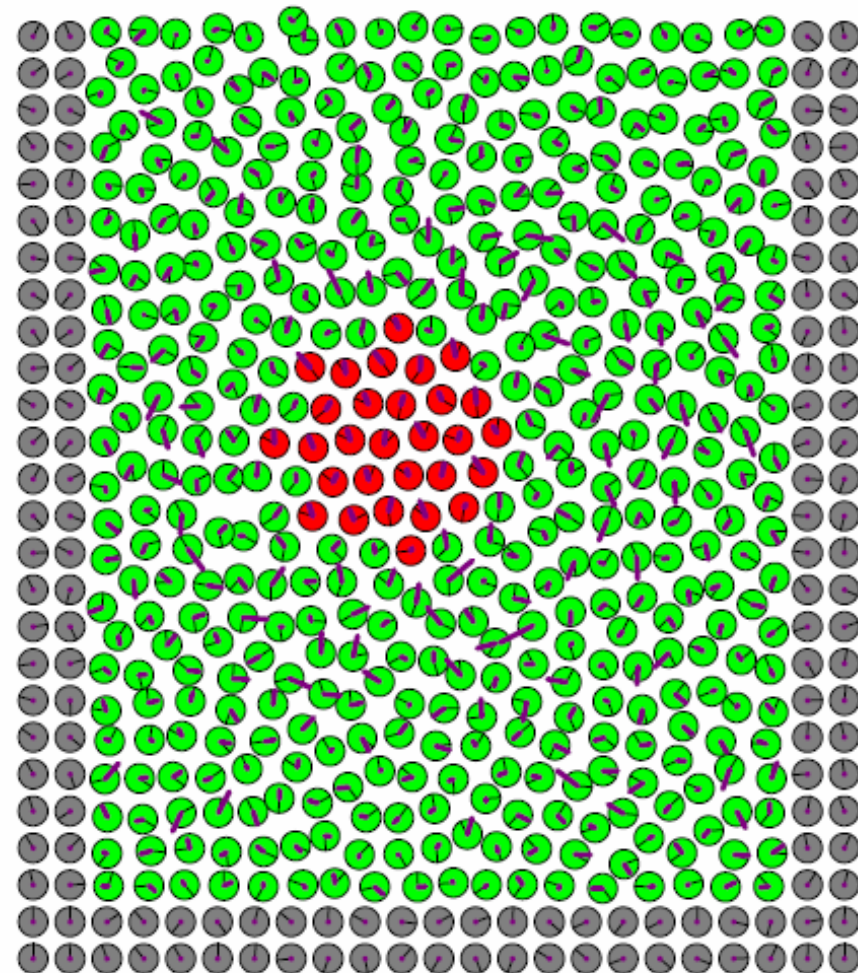
6: t = 3.0000 s

— 1.51e-001 m

— 1.98e+000 m/s

— 1.20e+005 Pa

— -1.20e+005 Pa

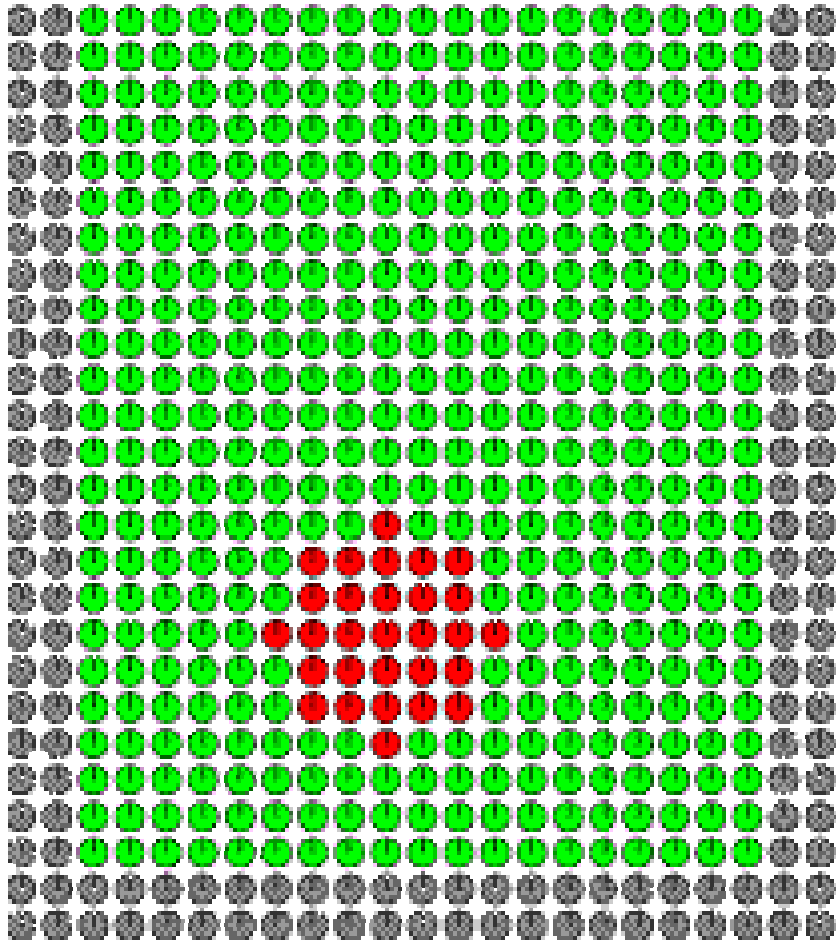


重い流体中の軽い流体の上昇

$t = 0 - 3.0$ s

density: 500 in 1000 kg/m³

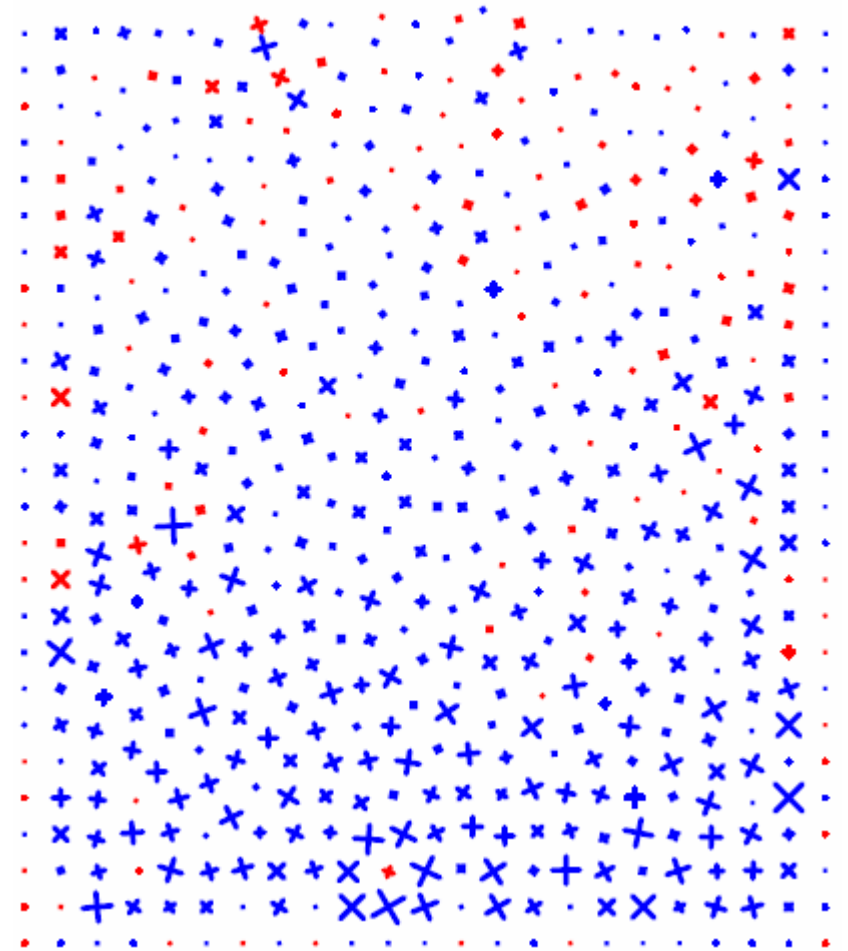
pcd 0.1 m, visc 10 Pa.s, bkm 1.0e7 Pa



$t = 1.2$ s

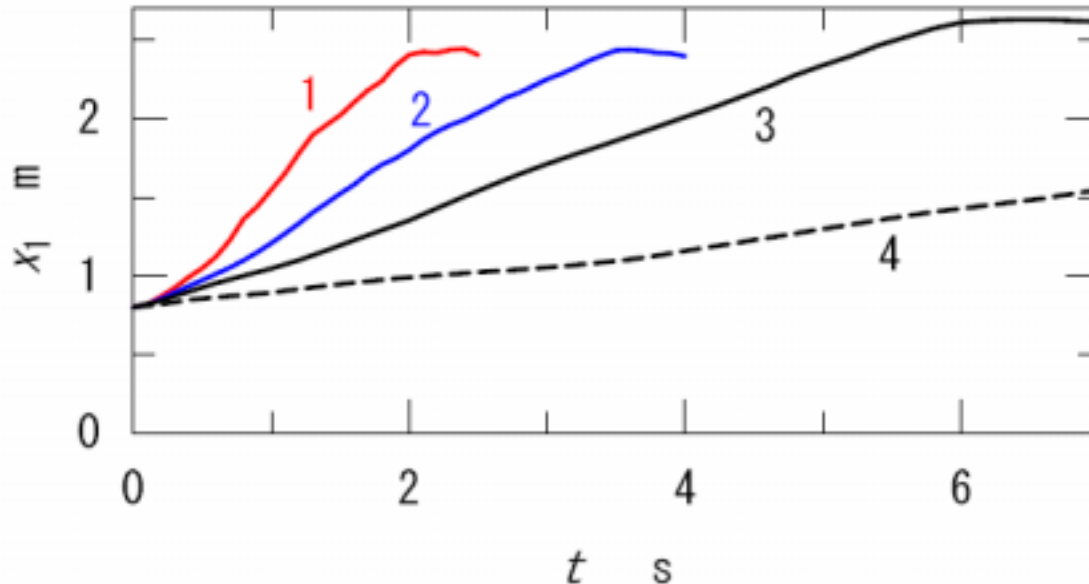
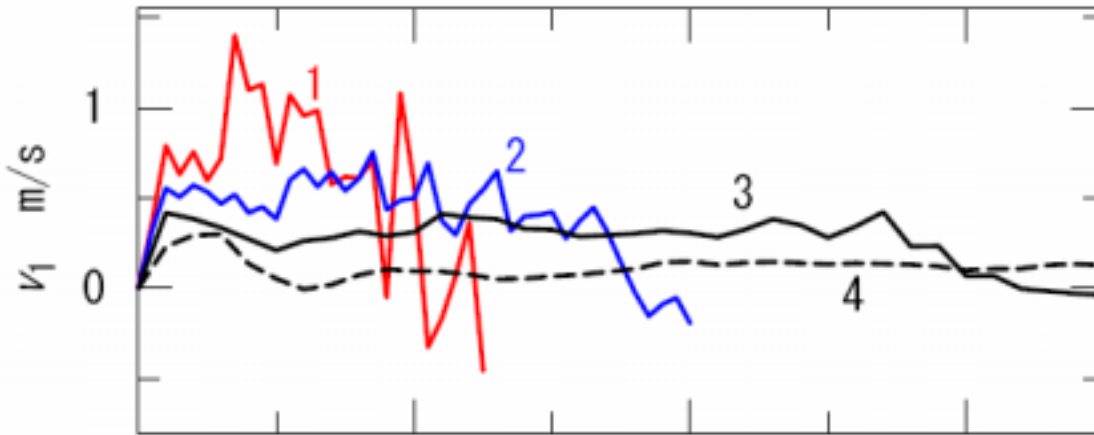
— 7.58e+009 Pa

— -7.58e+009 Pa



浮力：粘性率と密度差の効果

$\eta=10$ (1), 100 (2), 200 (3, 4) $\rho_2=500$ (1, 2, 3), 750 (4)



粒子の位置と速度の比較

$t=0$ で円盤中心にあった粒子

* 粘性率が大きな場合 (2, 3, 4) には、上昇速度は粘性率に反比例、密度差に比例して、浮力の特徴を示す。

* 上昇速度の値は、円筒の受ける粘性抵抗の理論値と整合的。

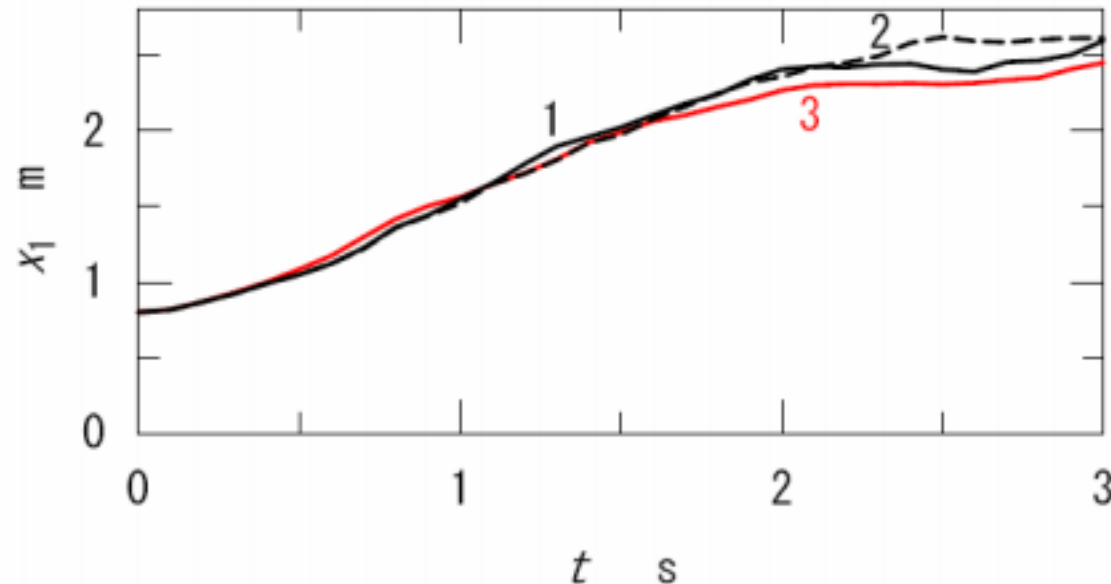
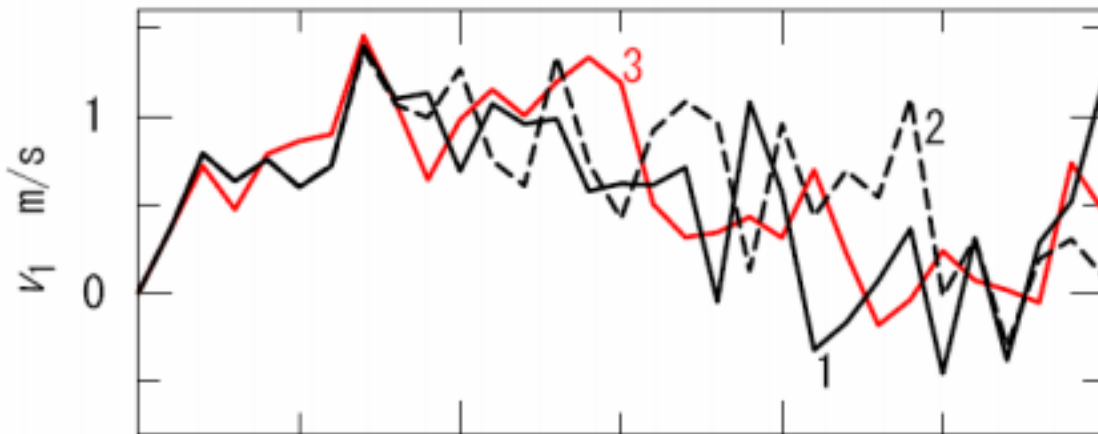
* 粘性率の小さな場合には、上昇速度は粘性率に依存せず、値も小さすぎる (1)。

* 上昇過程が定常状態に達していない可能性がある。

* 乱流状態にある可能性がある (レイノルズ数は50)。

時間刻みと粒子間隔

dis=0.1m(1,2), 0.05m(3) dt=5x10⁻⁴s(1,3), 2x10⁻⁴s(2)



粒子の位置と速度の比較

$t=0$ で円盤中心にあった粒子

- * 時間刻み、粒子間隔が変わっても、変化の傾向は同じ。
- * 粒子の配列が乱れると、時間刻みなどへの依存性が大きくなる。

- * 計算は時間刻みがしきい値より大きくなると発散。

- * しきい値は体積弾性率が大きくなると短くなる。

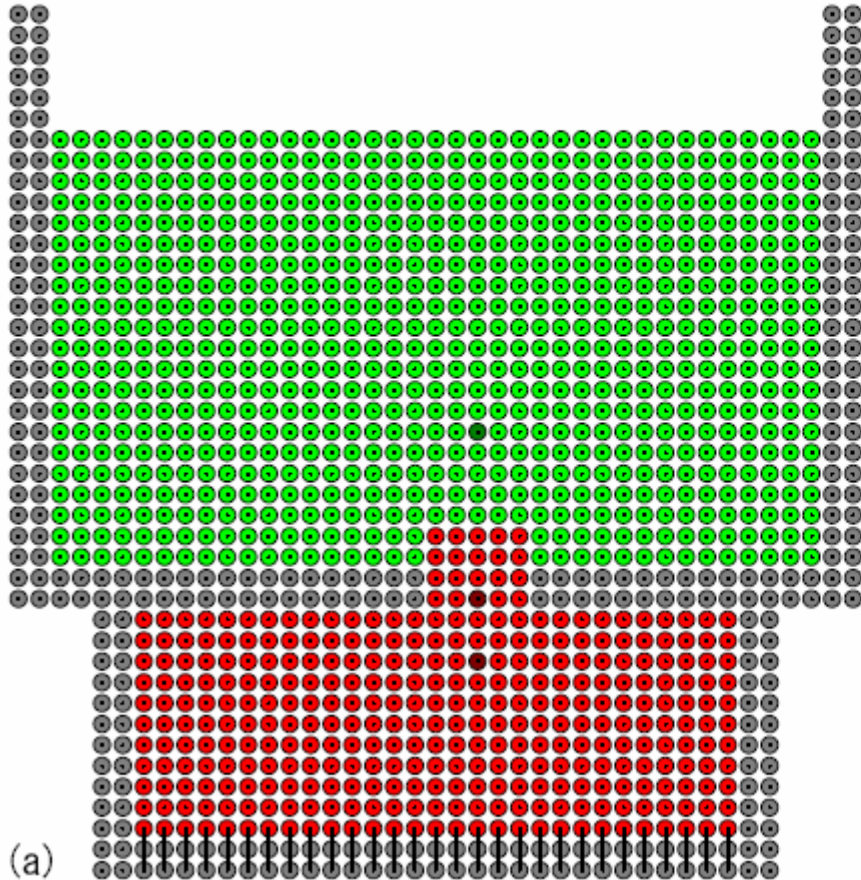
- * 計算の収束条件

- 時間刻み < 粒子間隔/音速
(クーラン条件)

流体貫入実験

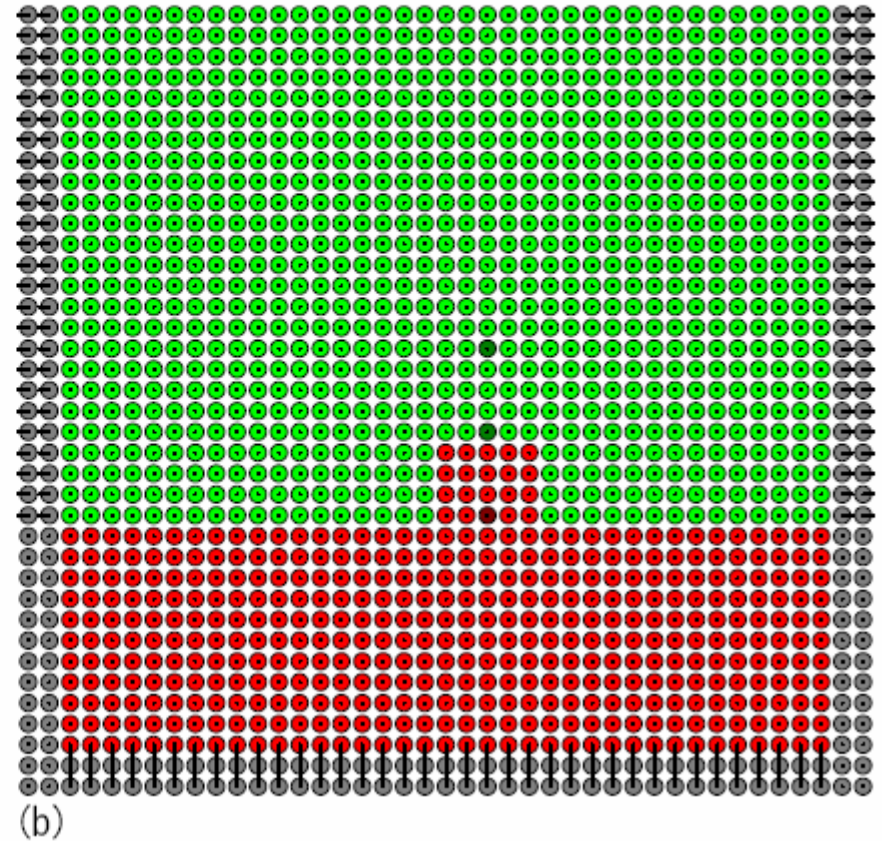
流体への貫入

dim 2 v0f2-014
0: t = 0.0000 s — 5.00e-001 m — 5.00e-002 m/s



固体への貫入

dim 2 v1s2-202
0: t = 0.0000 s — 5.00e-001 m — 2.00e-001 m/s



最下部の固定粒子を押し上げて、赤の粒子(流体)を緑の粒子(流体or固体)に流し込む

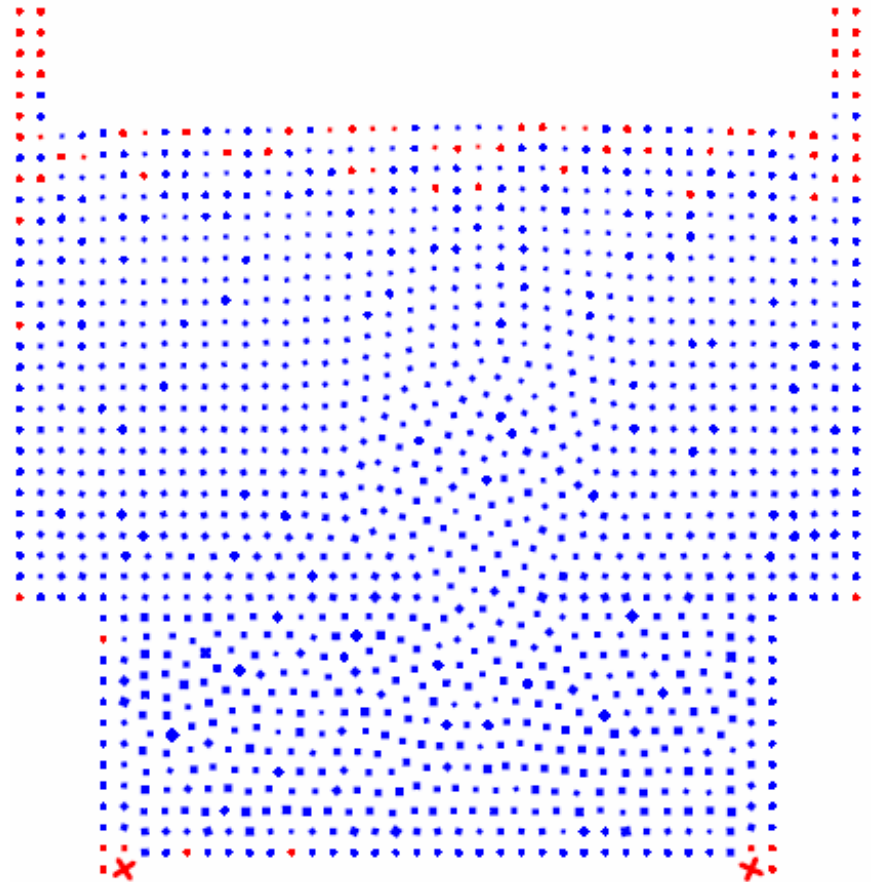
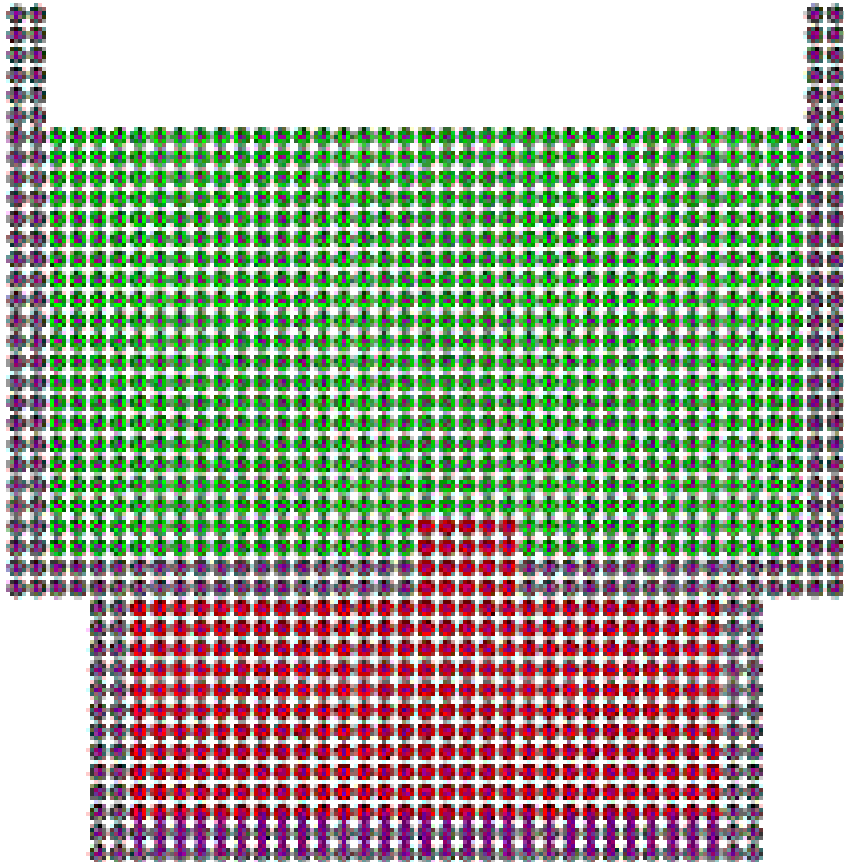
流体の流体への貫入

$t = 0 - 14$ s; pcd 0.5 m 1396 pc
dens (visc): 500 kg/m³ (10 Pa.s)
into 1000 (2000); bkm 1.0e7 Pa

$t = 2$ s

— 2.83e+012 Pa

— -2.83e+012 Pa



upward 0.2 m/s

流体への貫入：速度や応力の揺らぎ

dim 2 v0f2-014

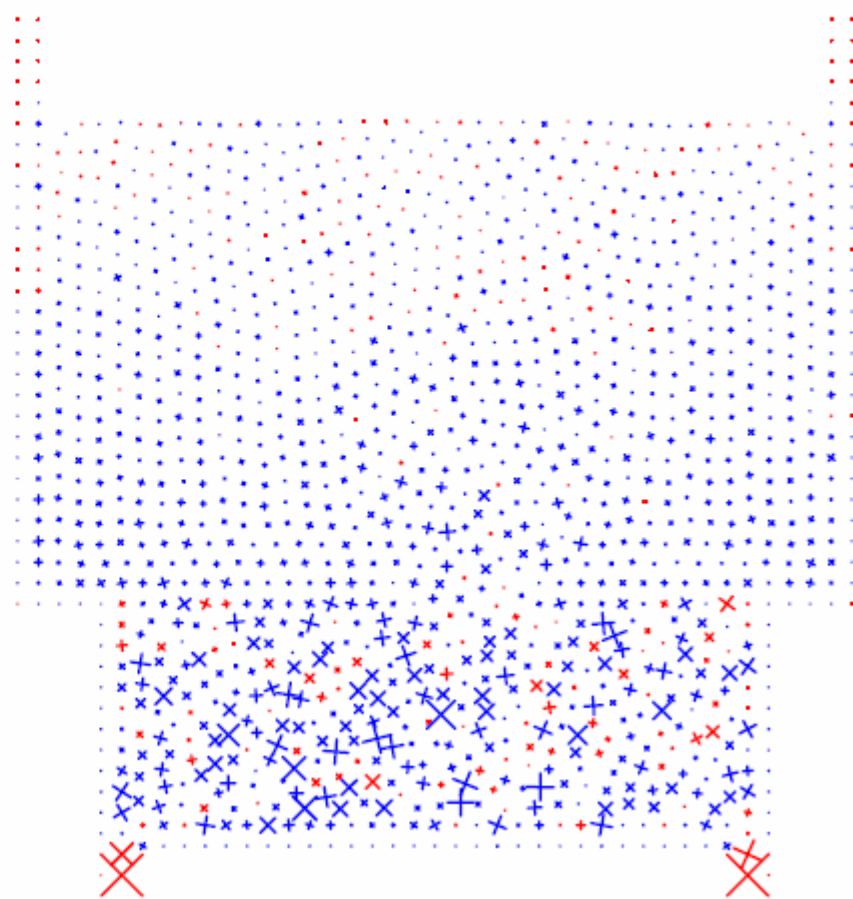
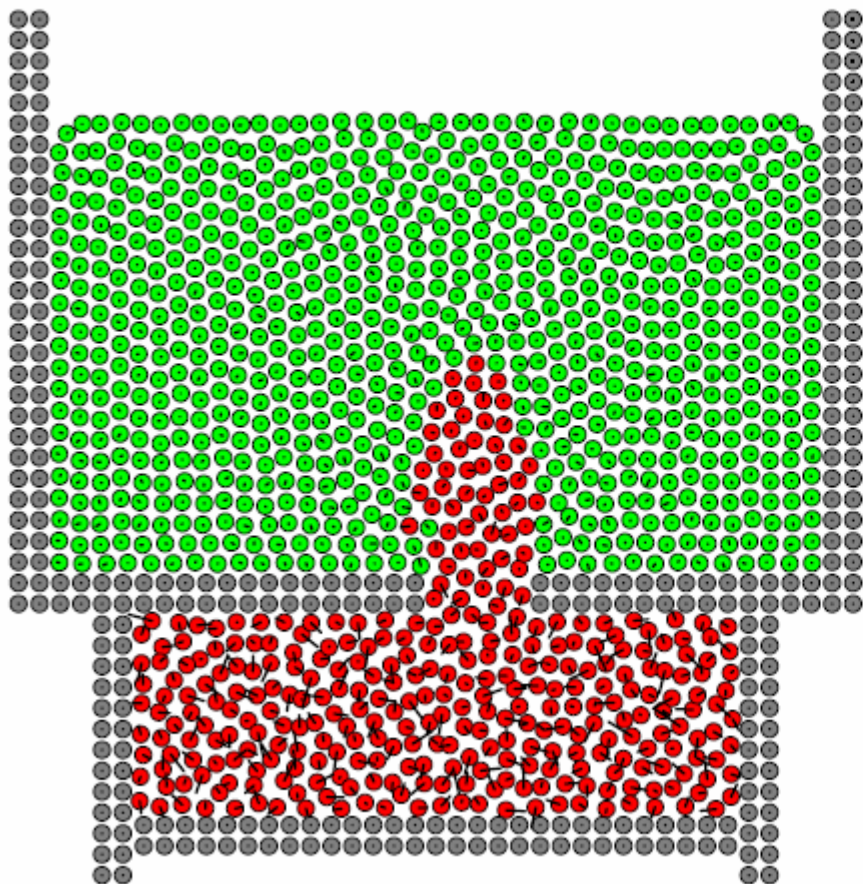
28: t = 14.0000 s

— 5.00e-001 m

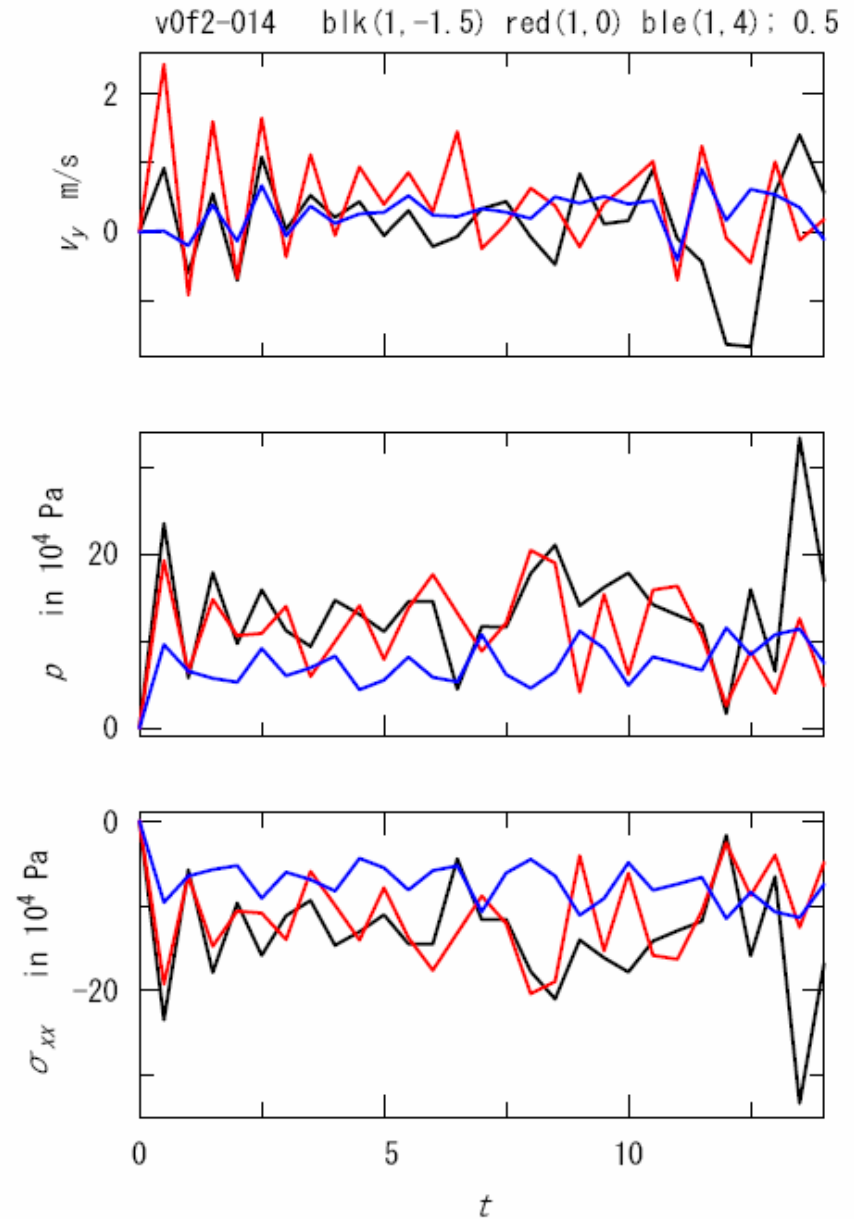
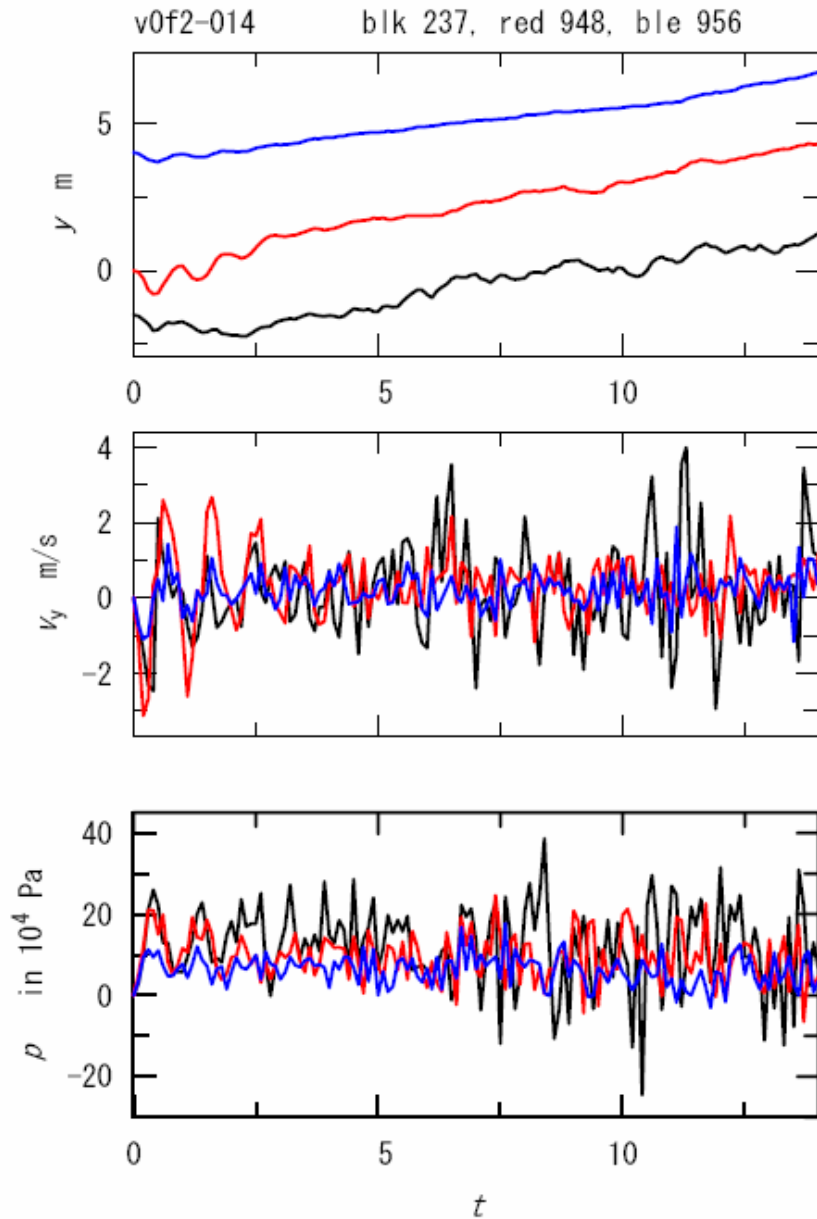
— 7.78e+000 m/s

— 1.75e+006 Pa

— -1.75e+006 Pa



状態の揺らぎ：粒子(左)と固定点(右)



粒子の状態に大きな揺らぎ

- * 粒子の位置、速度、応力などは、大きく揺らぎながら変化する。粒子間で音速で情報をやりとりしながら、お互いの位置、速度、応力を決めている。揺らぎは粒子法による計算の反映で、物理的には意味がない。
- * 粒子の状態の揺らぎは、速度や応力の見積もりに大きな誤差。応力を用いた破壊条件などの判定に致命的な影響。
- * 粒子の状態の揺らぎを取り除く方法
 1. 粒子を極限まで小さくする。
 2. 変数を適当に平均化する；時間平均や空間平均平均で得られる運動や応力は正しいと仮定する。
 3. 運動方程式に人工粘性を加えて、揺らぎを抑える。

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i - a_v(v_i - v_a)$$

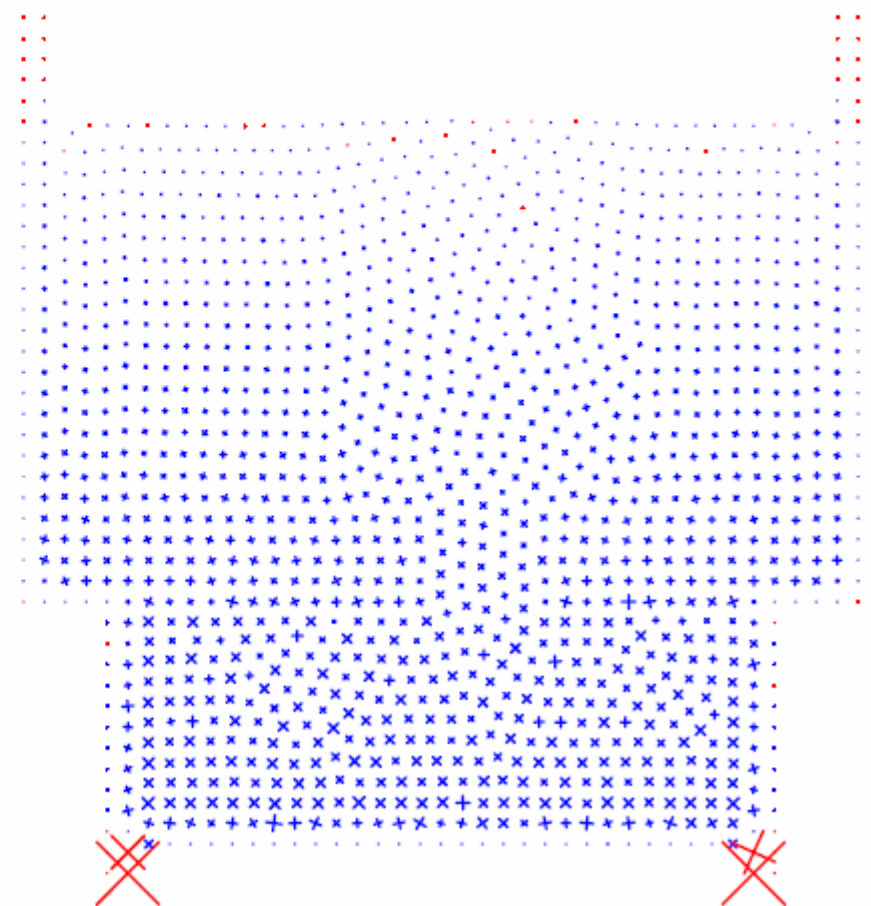
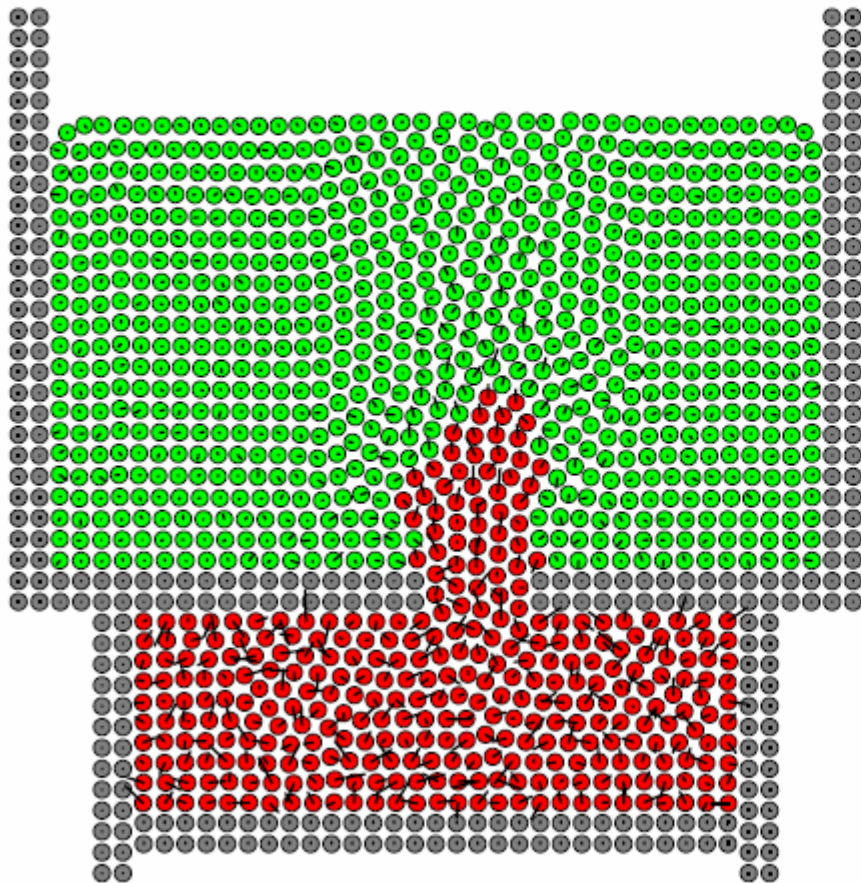
a_v は人工粘性係数(時間の逆数の次元)、 v_a は平均速度

流体への貫入: $a_v = 1 / s$

dim 2 v0f3-031 avs=1 /s

28: t = 14.0000 s — 5.00e-001 m — 8.05e-001 m/s

— 1.75e+006 Pa — -1.75e+006 Pa

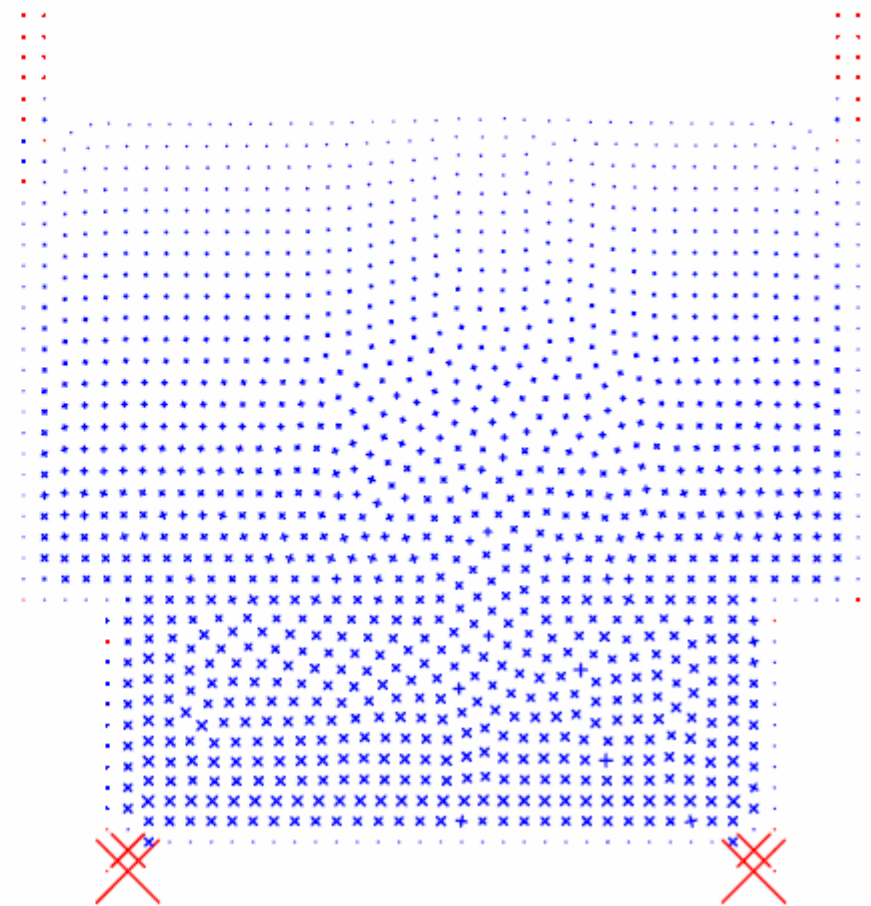
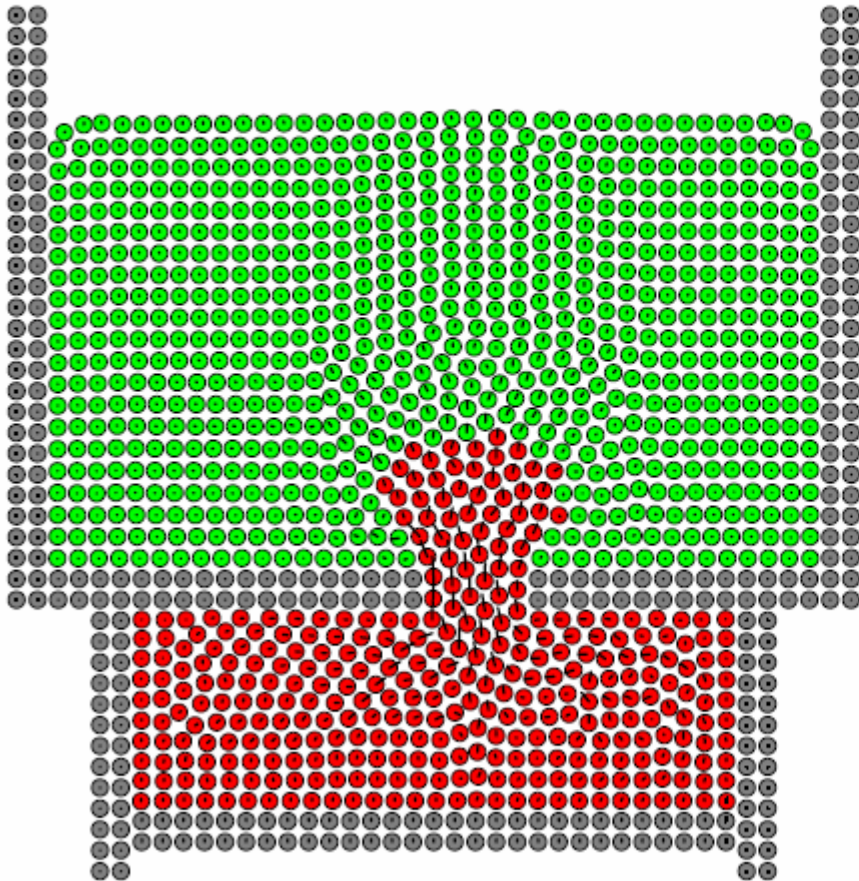


流体への貫入： $a_v=10$ /s

dim 2 v0f3-032 avs=10 /s

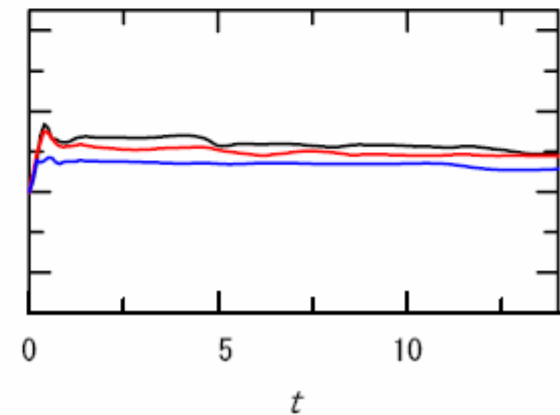
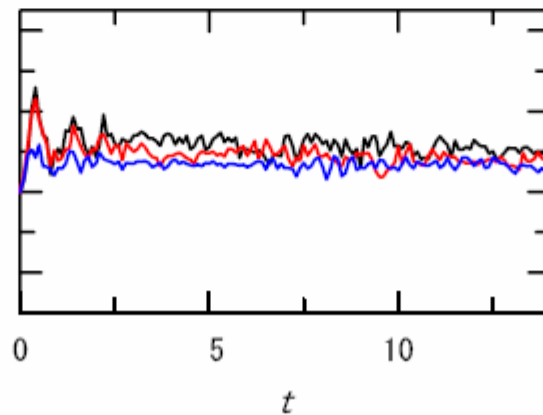
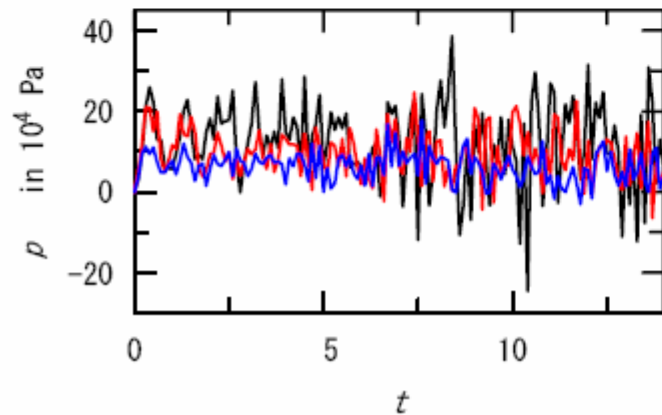
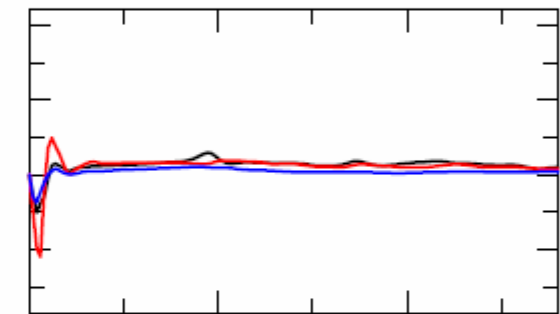
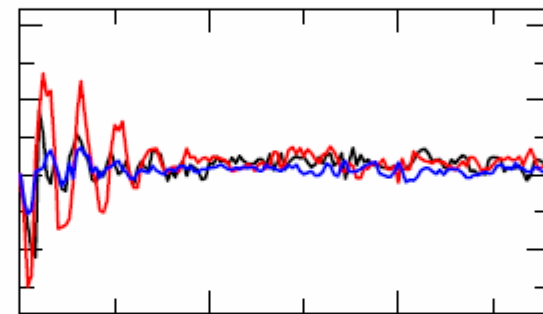
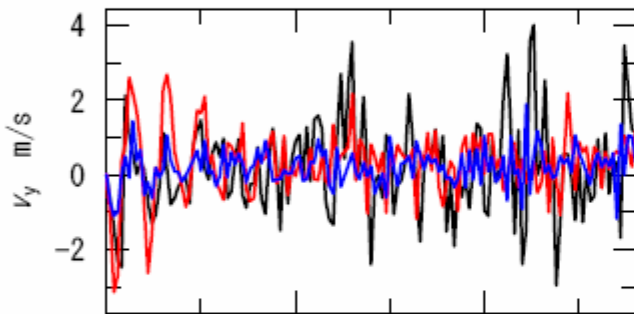
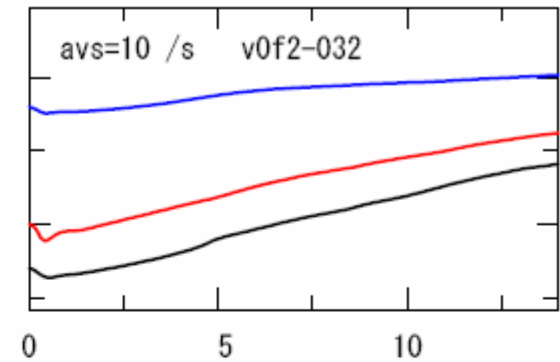
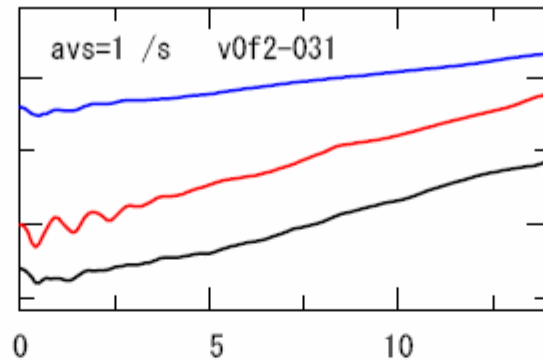
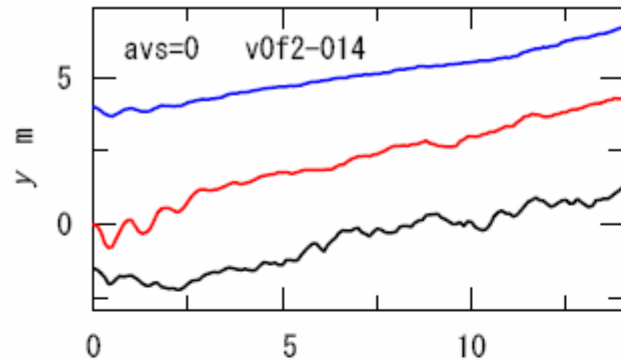
28: t = 14.0000 s — 5.00e-001 m — 3.72e-001 m/s

— 1.75e+006 Pa — -1.75e+006 Pa

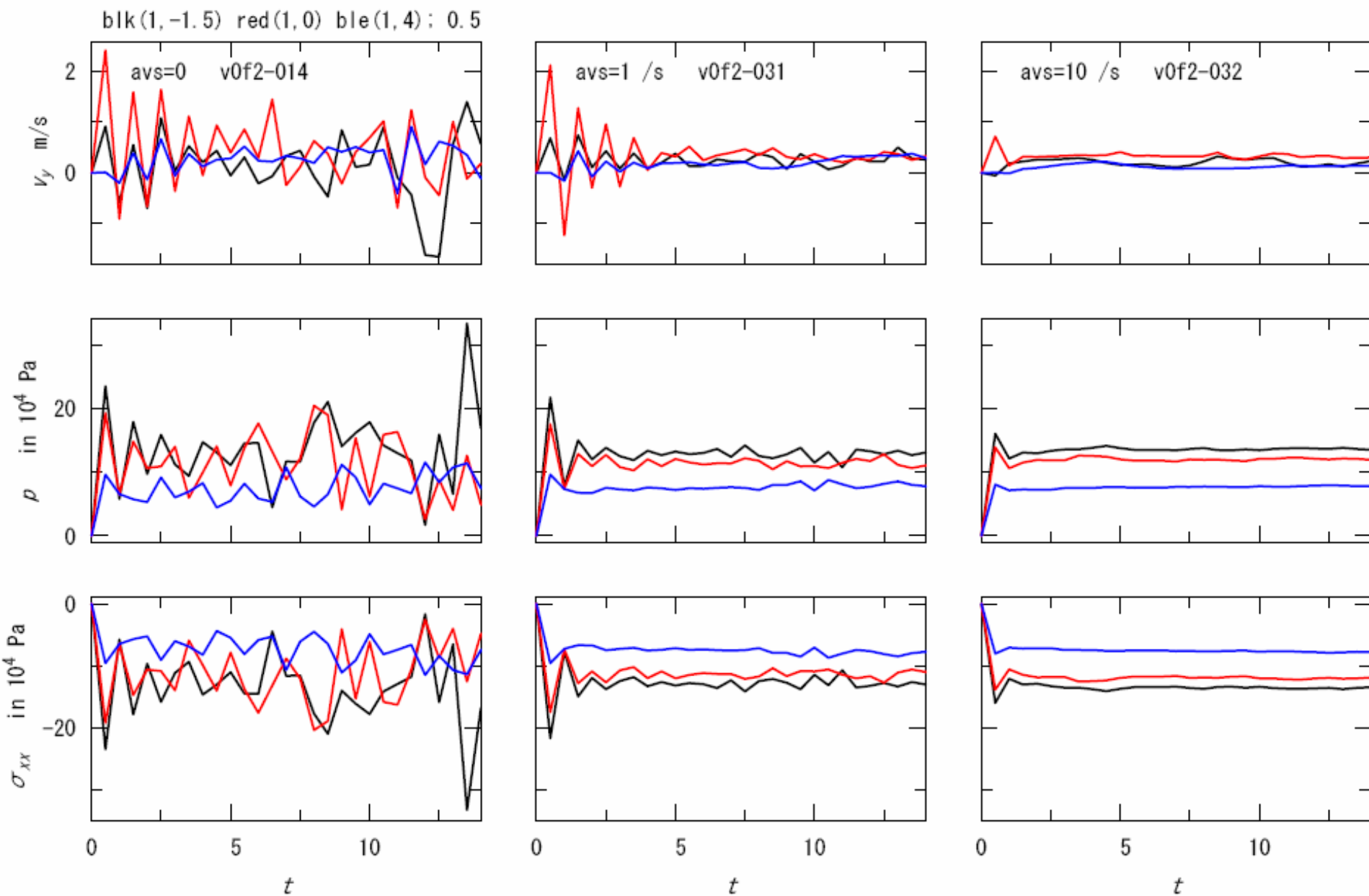


流体への貫入、粒子： $a_v=0$ (左), 1 (中), 10 (右) /s

blk 237, red 948, ble 956

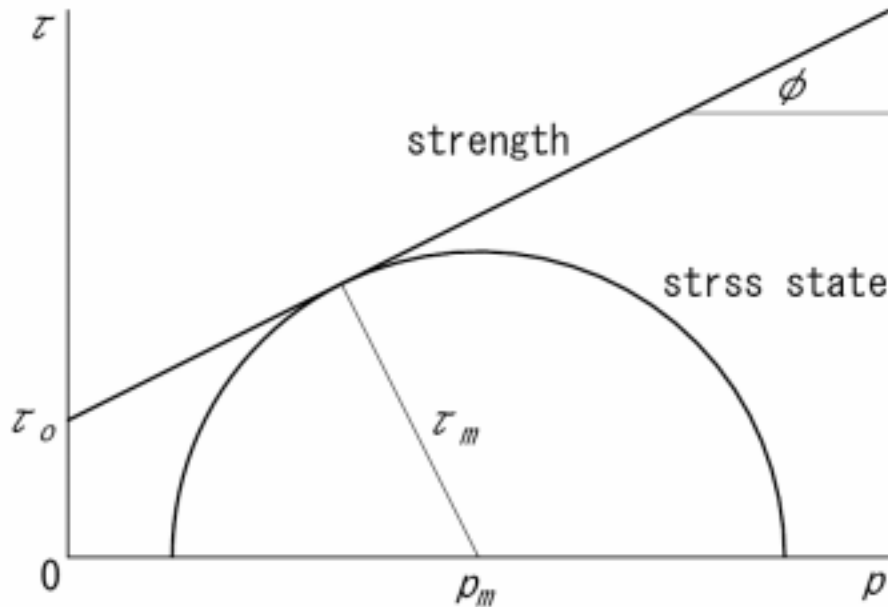


流体への貫入、固定点: $a_v=0$ (左), 1 (中), 10 (右) /s



貫入先端部の破壊

モール・クーロンの条件



強度 $\tau_f = \tau_o + p \tan \phi$

τ_o : 粘着力 ϕ : 内部摩擦角

応力状態 $\tau^2 + (p - p_m)^2 = \tau_m^2$

破壊条件 $\tau_m \geq \cos \phi (\tau_o + p_m \tan \phi)$

* 破壊を固体粒子の性質として組み込む

1. 判定に必要な量を求める

$$p_m = -\frac{1}{3} \sum_i \sigma_{ii}$$

$$\tau_m^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\sigma_{ij} + p_m \delta_{ij})^2$$

2. **破壊条件**を適用する

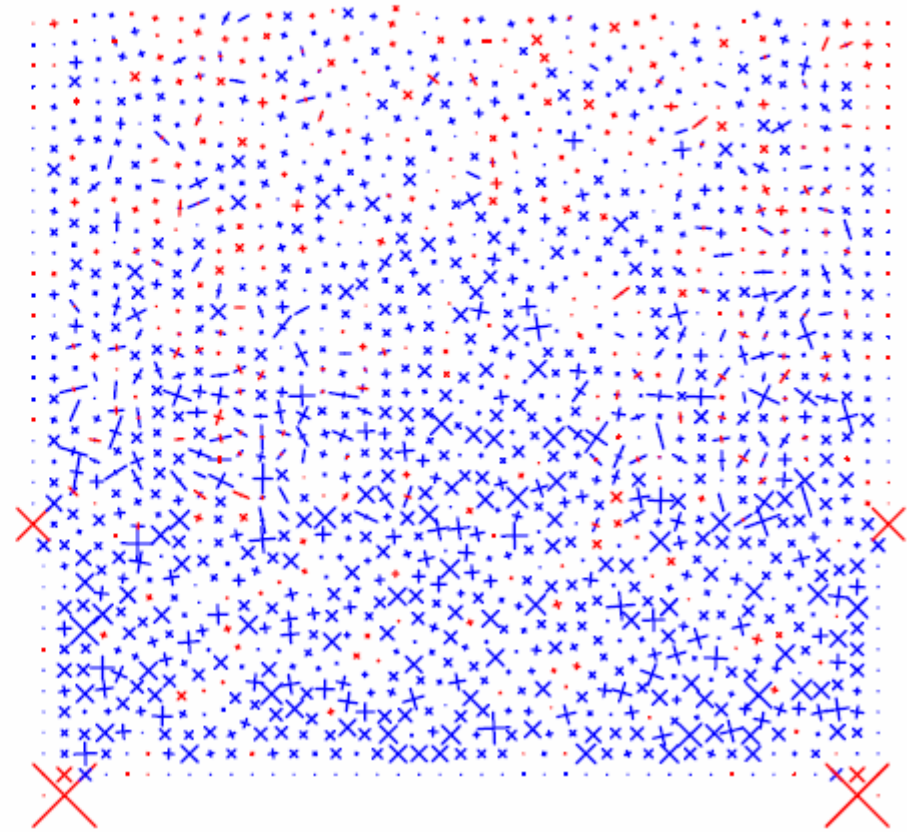
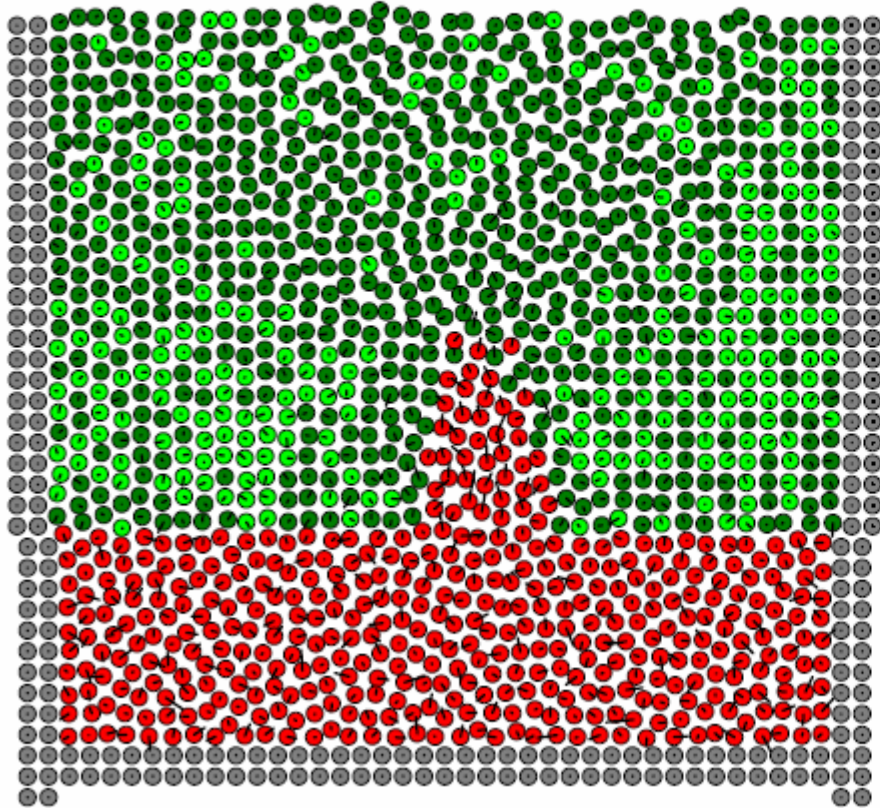
3. 破壊条件が満たされたら
固体粒子を流体粒子に変換する。

固体への貫入: $a_v = 0$

dim 2 v1s2-202 fra=2e-2 fag=30 avs=0

25: t = 2.5000 s — 5.00e-001 m — 7.73e+000 m/s

— 1.50e+006 Pa — -1.50e+006 Pa



濃い緑は破壊された領域

粘着力/体積弾性率 = 2×10^{-2}

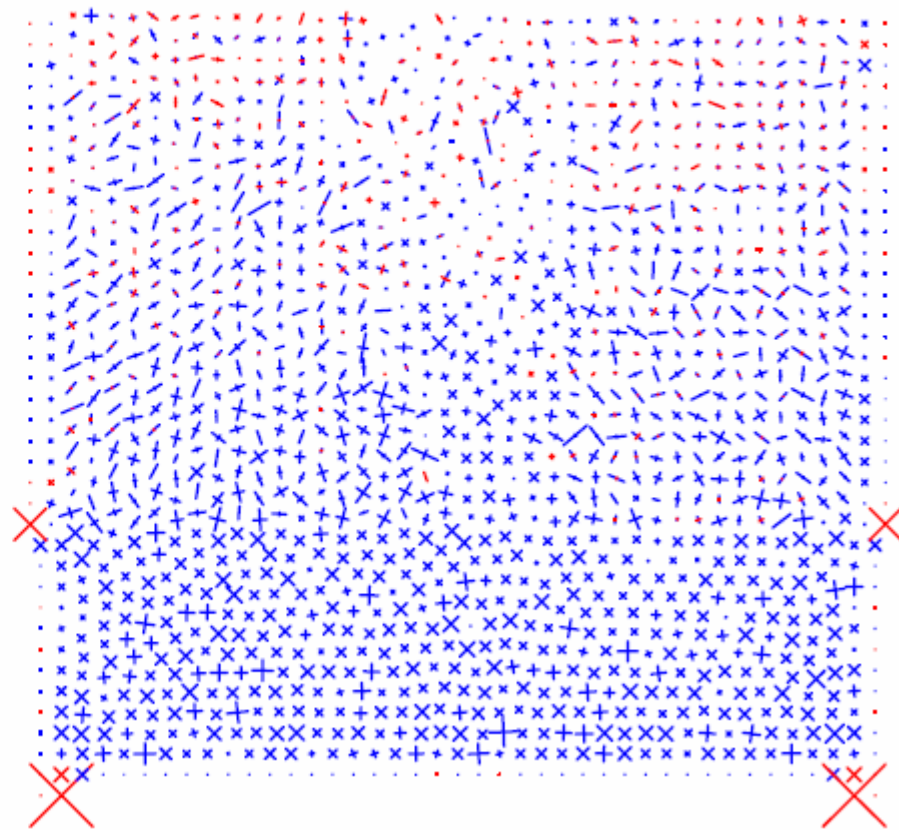
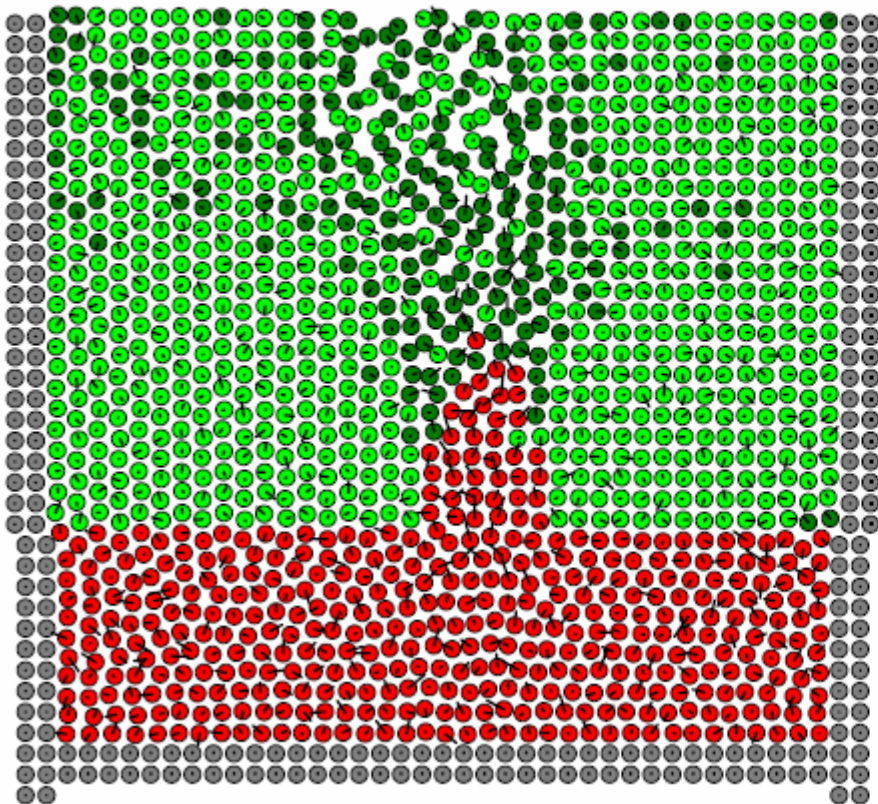
内部摩擦角 = 30°

固体への貫入: $a_v = 1/s$

dim 2 v1s2-201 fra=2e-2 fag=30 avs=1

25: t = 2.5000 s — 5.00e-001 m — 3.56e+000 m/s

— 1.50e+006 Pa — -1.50e+006 Pa

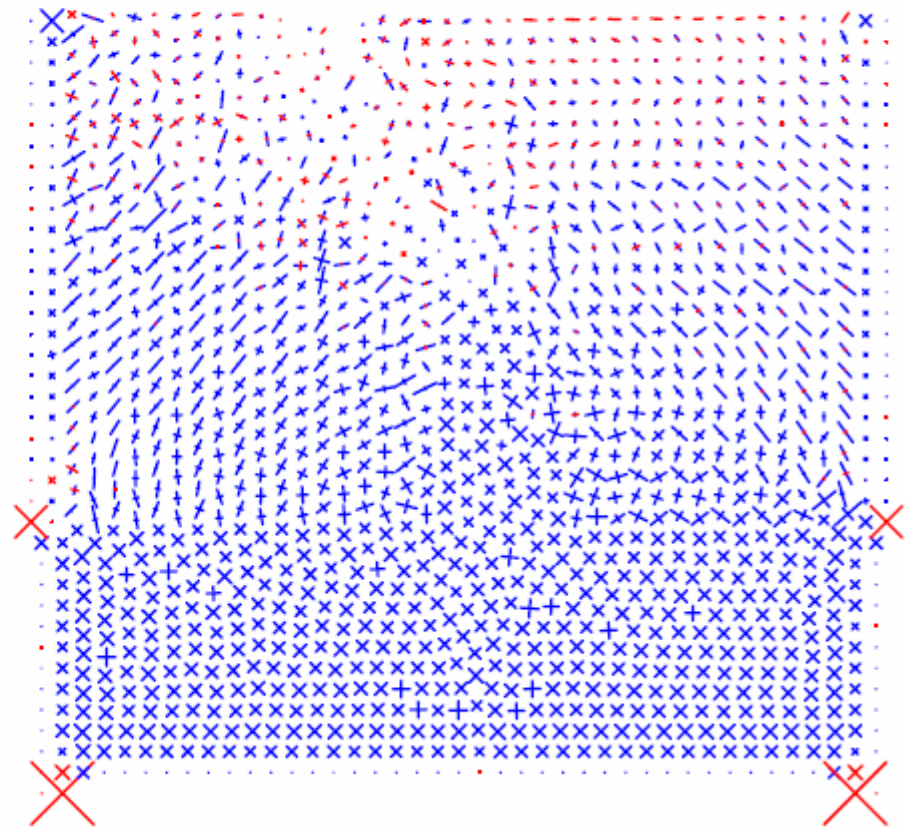
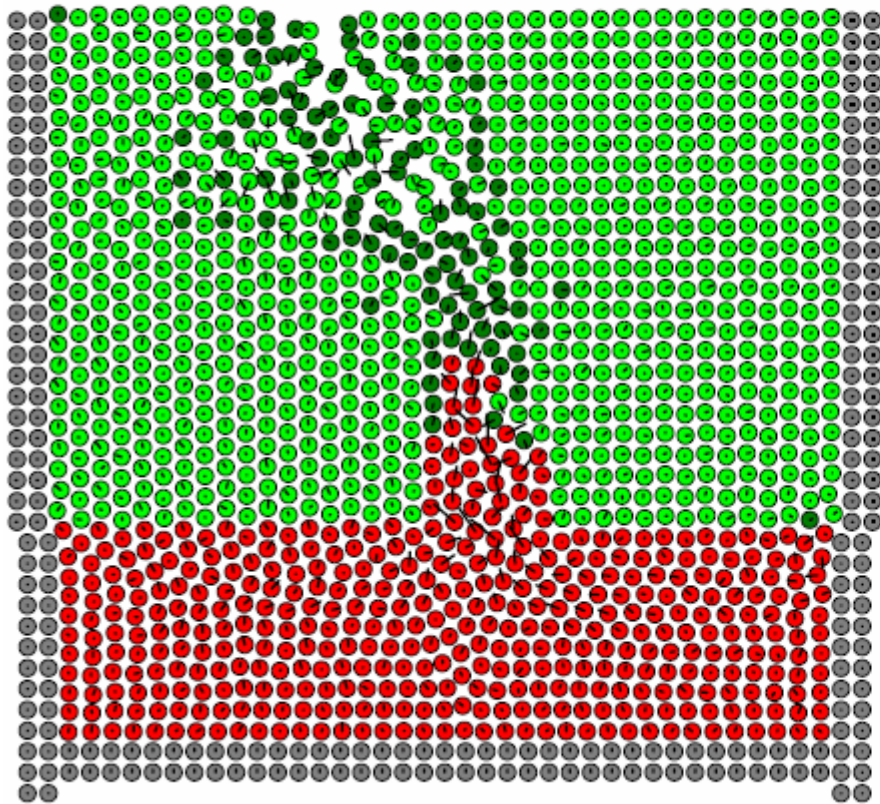


固体への貫入: $a_v = 5 /s$

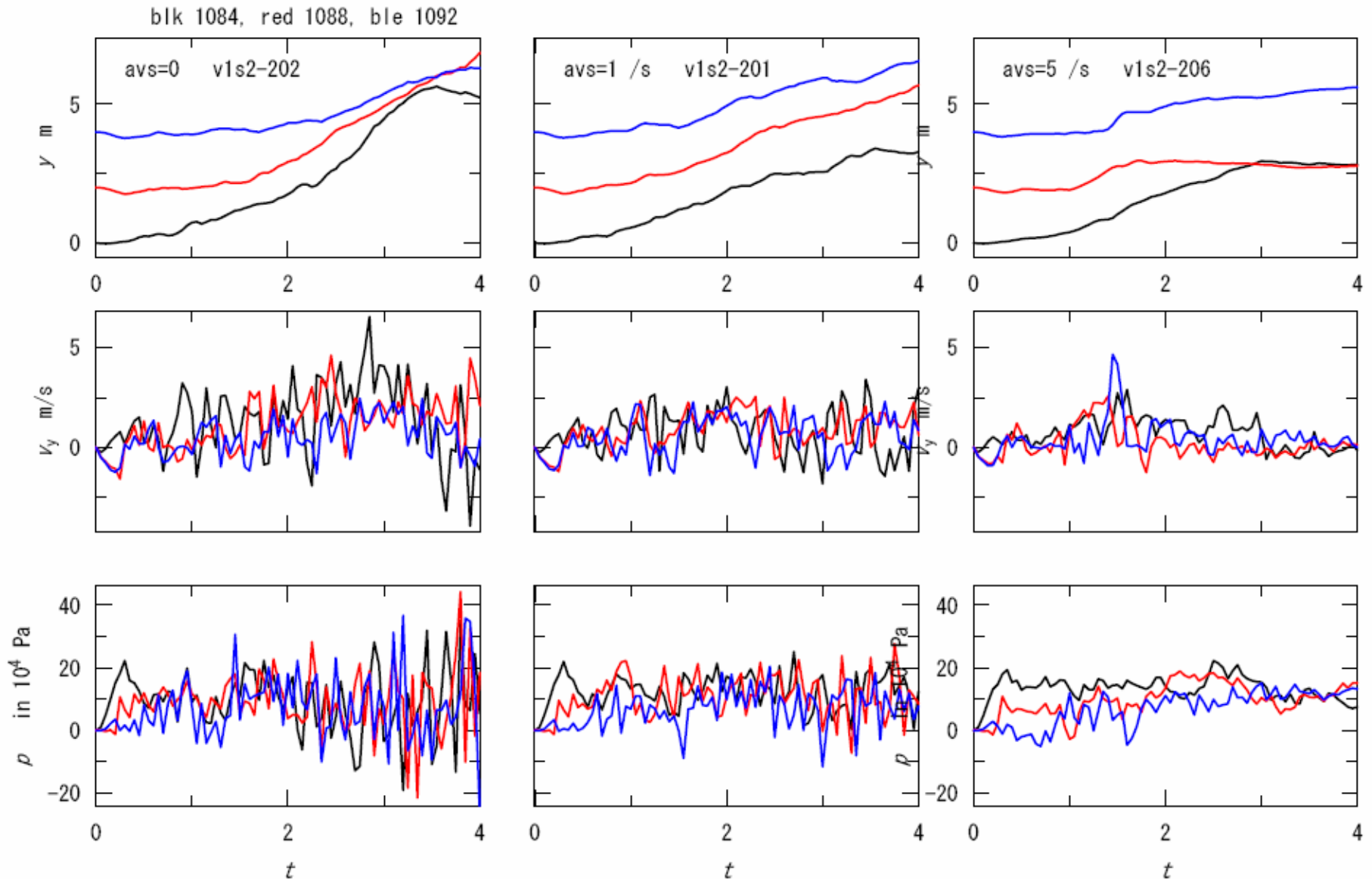
dim 2 v1s2-206 fra=2e-2 fag=30 avs=5

25: t = 2.5000 s — 5.00e-001 m — 2.01e+000 m/s

— 1.50e+006 Pa — -1.50e+006 Pa

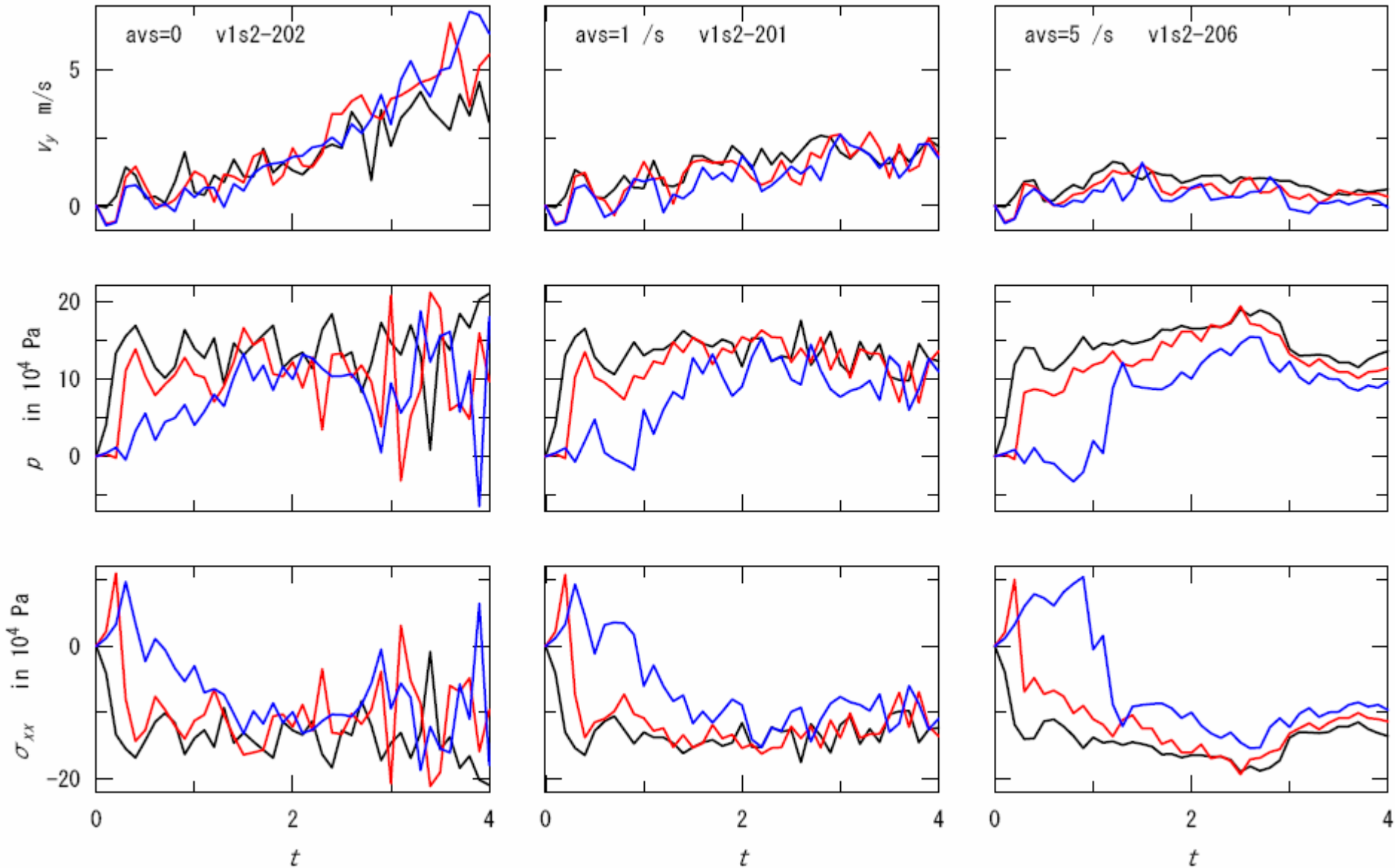


固体への貫入、粒子： $a_v=0$ (左), 1 (中), 5 (右) /s



固体への貫入、固定点: $a_v=0$ (左), 1 (中), 5 (右) /s

blk(1,0) red(1,2) ble(1,4): 0.5



固体への貫入実験

人工粘性 1 /s

2次元システム

横 20 m 縦 18 m

粒子間隔 0.5 m

壁の移動

下から 0.2 m/s

両側から 0.1 m/s

流体

密度 500 kg/m³

粘性率 10 Pa.s

体積弾性率 10⁷ Pa

固体

密度 1000 kg/m³

体積弾性率 10⁷ Pa

ポアソン比 0.25

粘着力/体積弾性率 0.02

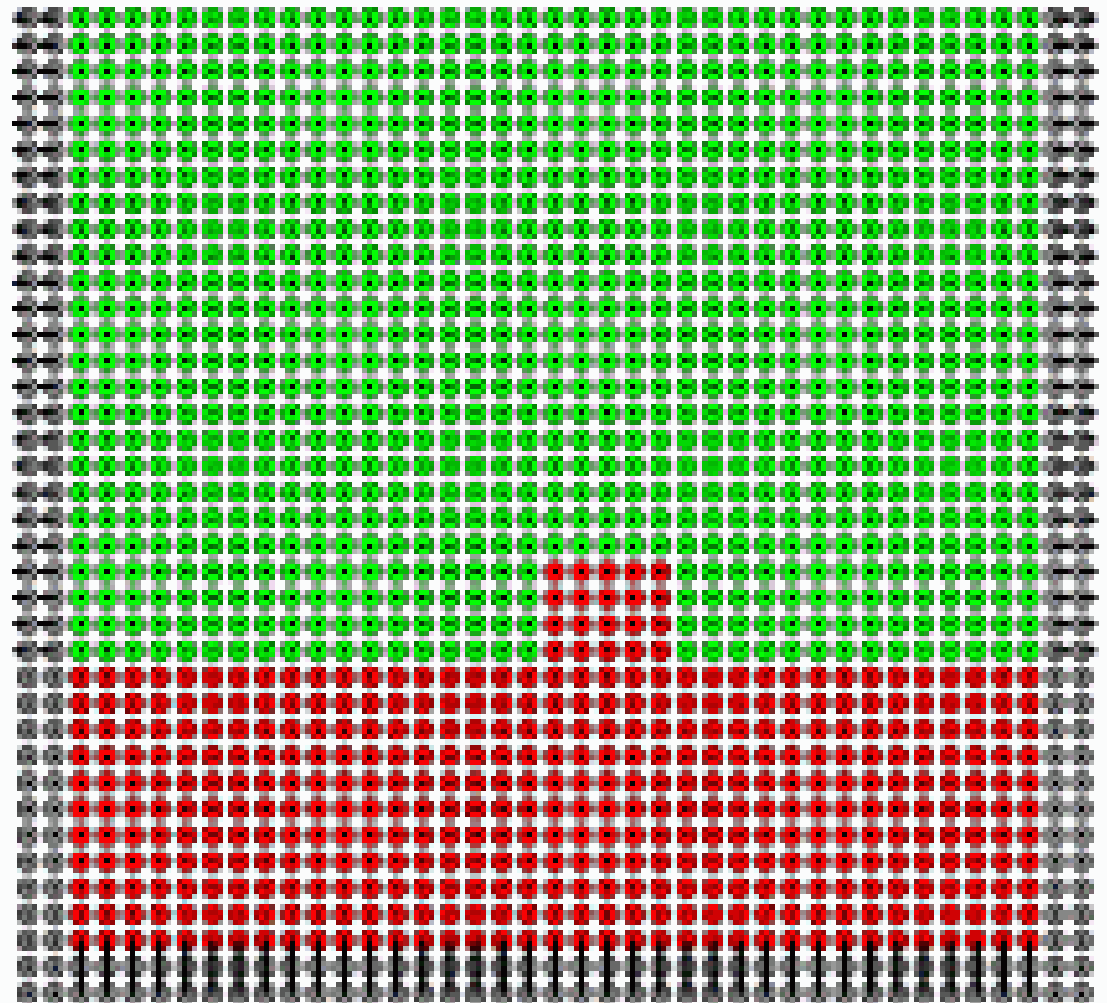
摩擦角 30°

破壊後の粘性率 10 Pa.s

0: t = 0.0000 s

— 5.00e-001 m

— 2.00e-001 m/s

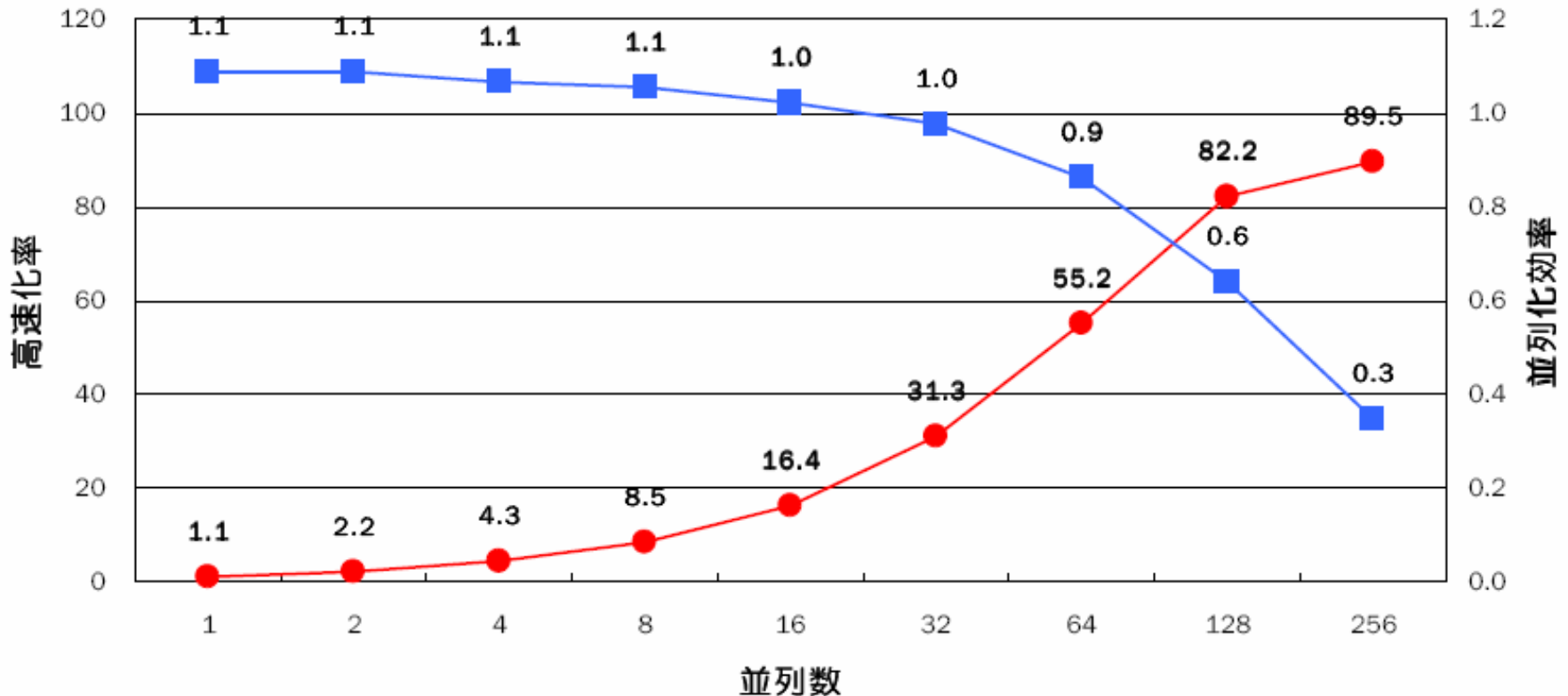


プログラムの並列化

応力、運動方程式などの計算を複数のCPUに分散
粒子の位置、速度などの情報は、CPU間で共有
(防災科研のシステムをサポートする西沢直樹氏(SGI)による)

並列版(-03) vs オリジナル(-03)

● 高速化率 ■ 並列化効率



まとめと問題点

- SPH法は、密度、粘性、弾性、破壊強度などを粒子の性質として組み込むことによって、複数の物質が入り組む変形、流動、破壊などを連続体力学に沿う形で容易に定式化できる。
- マグマ貫入過程の数値実験を行うシステムは、流体粒子、固体粒子を適当に組み合わせ、境界条件を固定粒子に設定することで、SPH法の枠組みで容易に構成できる。
- SPH法で計算される粒子の運動や状態には、粒子法特有の大きな揺らぎが伴い、応力などの見積もりや破壊条件などの判定で深刻な障害になる。
- 人工粘性の導入により、粒子の運動や応力の揺らぎを抑えることができ、流体の固体への貫入も解析が可能になる。ただし、解析結果については、何らかの方法で物理的な妥当性を検証する必要がある。
- 粒子の性質を共有し、応力や運動の計算を複数のCPUに分散することで、計算の並列化ができる。