

火砕流ダイナミクスに関する数値的研究： 浅水波方程式に基づく2層密度流モデルの開発

志水宏行, 小屋口剛博, 鈴木雄治郎 (東京大学 地震研究所)

火砕流

- ・ 火山碎屑物と火山ガスが一体となって地表面を流動する混相流
- ・ 周囲大気との密度差を駆動力に流動



非粘性密度流の性質

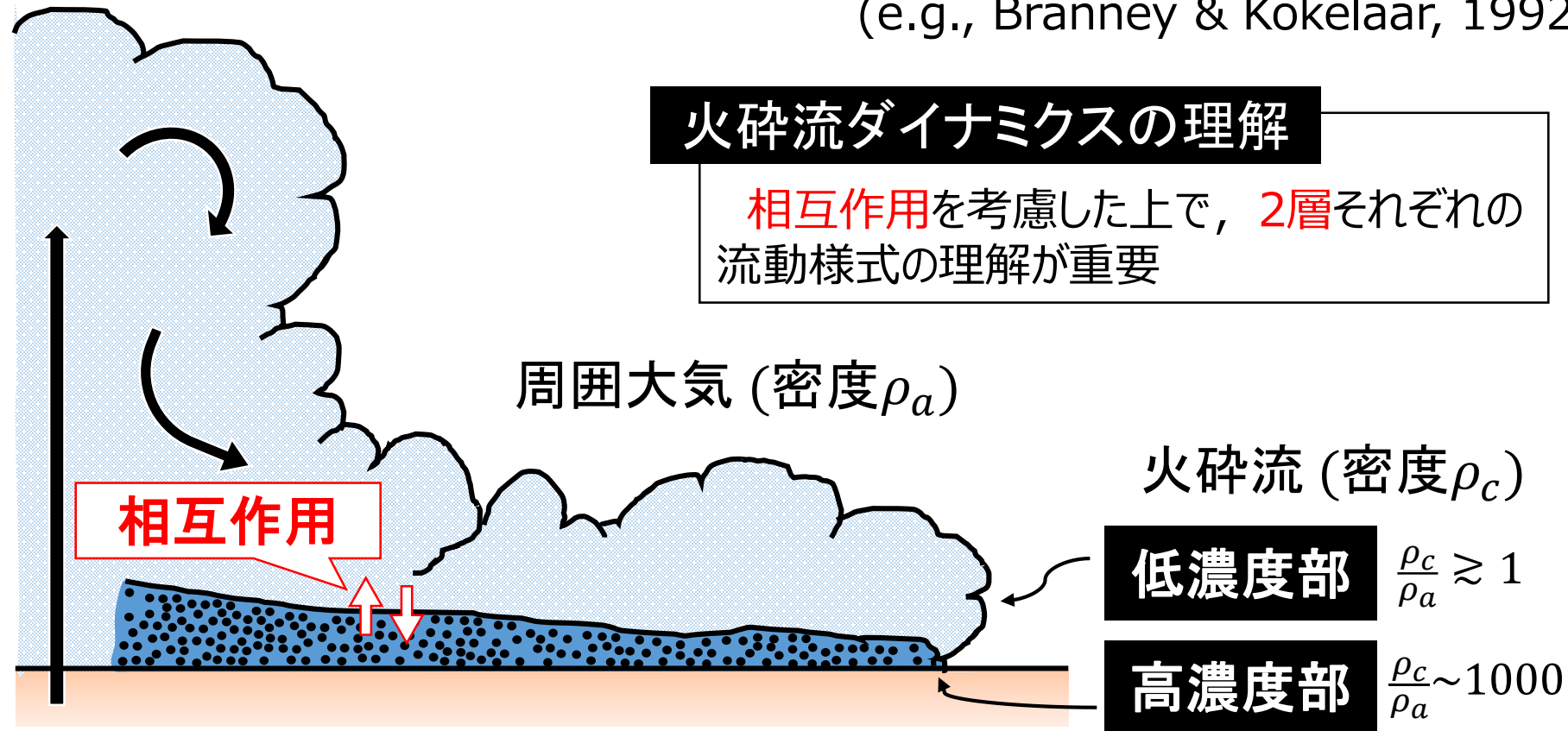


1. はじめに

■ 火砕流の内部構造

- 上部: 低粒子濃度部 ($\rho_c / \rho_a \gtrsim 1$)
 - 底部: 高粒子濃度部 ($\rho_c / \rho_a \sim 1000$)
- 2層間の相互作用

火砕流全体のダイナミクスに影響
(e.g., Branney & Kokelaar, 1992)



1. はじめに

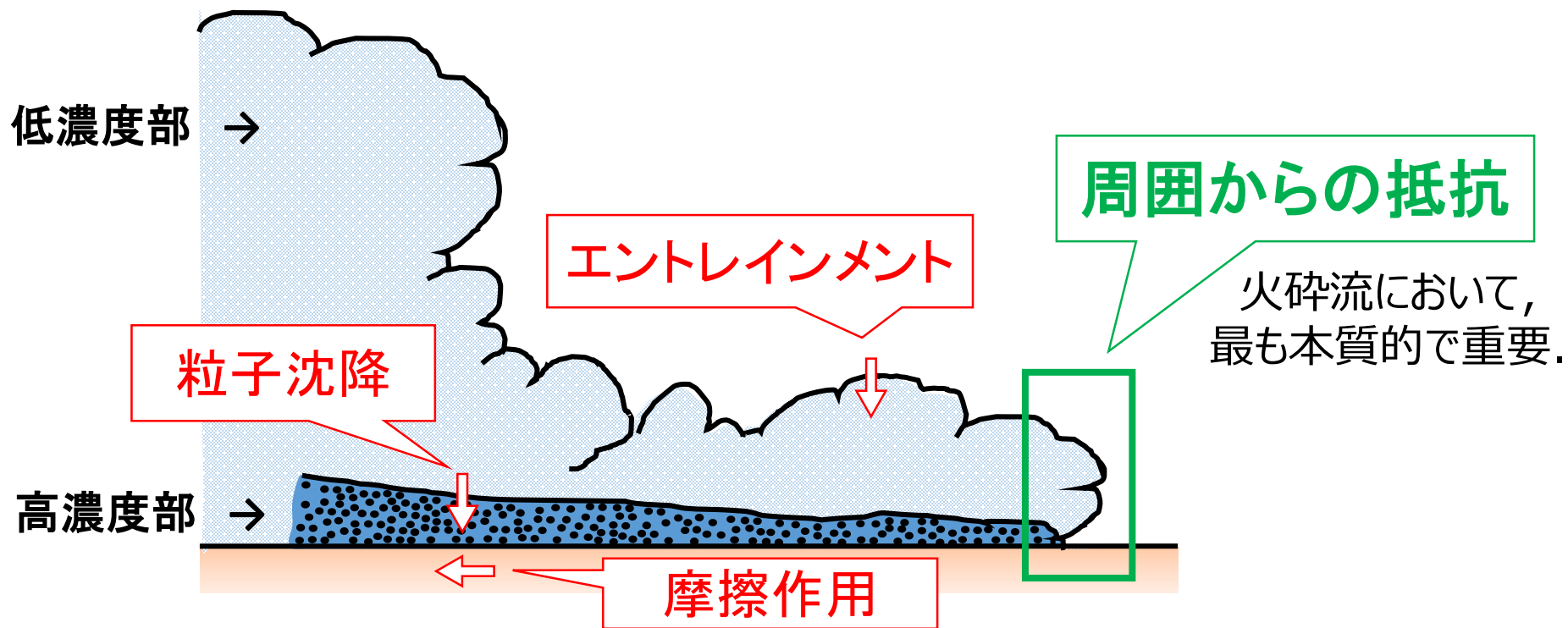
■ 火砕流のダイナミクス

密度流ダイナミクスの 支配要因

・周囲からの抵抗

火砕流ではさらに, ...

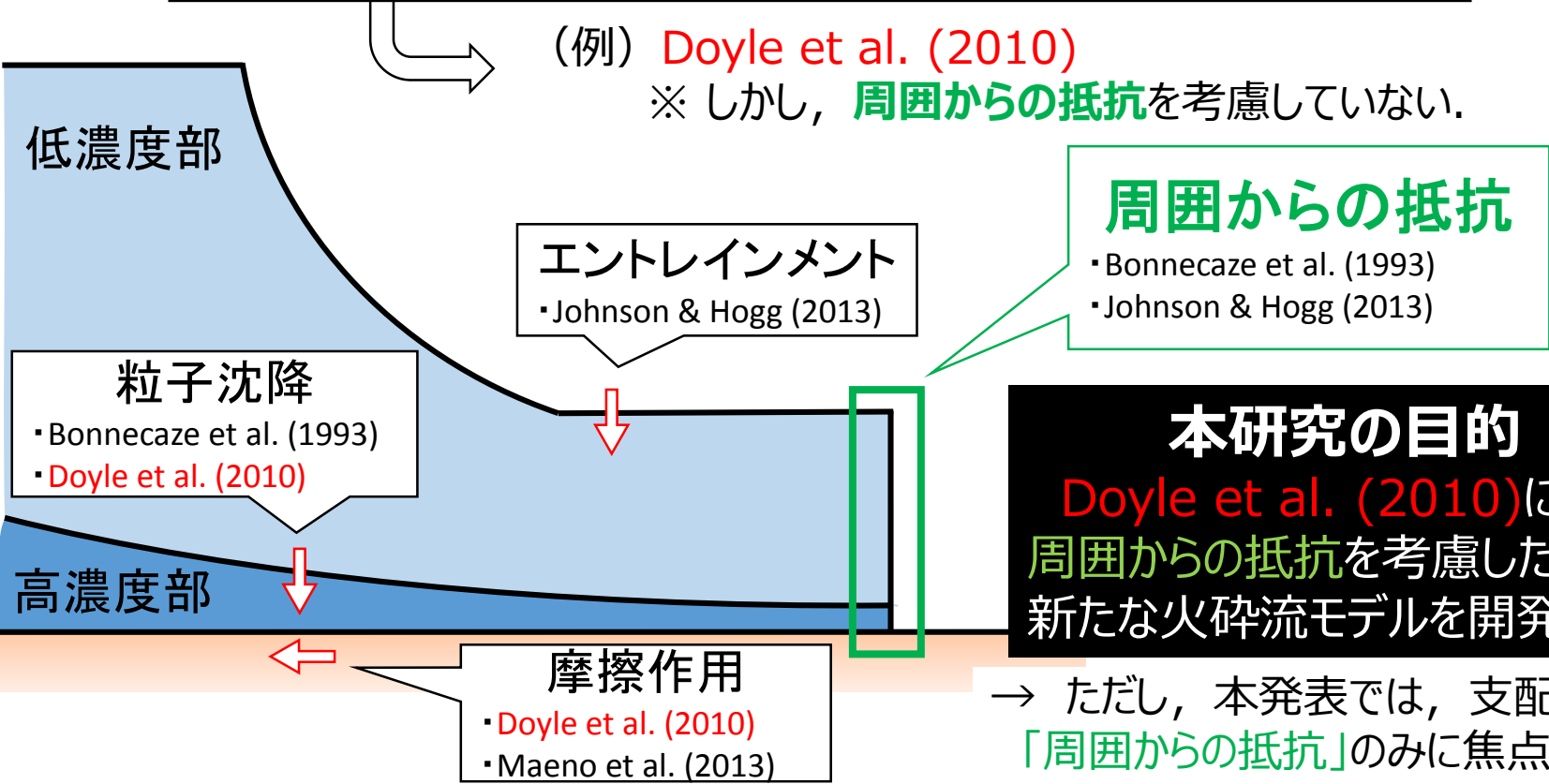
・粒子沈降, エントレインメント,
摩擦作用, ...etc



■ 火砕流ダイナミクス の 2 層密度流モデル

モデリングの方針

- 2層（低濃度部と高濃度部）それぞれを，浅水波方程式を基に定式化する。
- 支配要因を考慮して2層を連成する。



2. 均質な非粘性密度流(ρ_c)に関する浅水波方程式

「**周囲からの抵抗**」のみが考慮された最もシンプルな**浅水波方程式**

→ 本発表では、これの数理的性質を調べる。

■ 浅水波方程式 (無次元) (e.g., Ungarish, 2009)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

厚さ : $h(x, t)$, 速度 : $u(x, t)$

■ 先端条件 (無次元)【**周囲からの抵抗**】

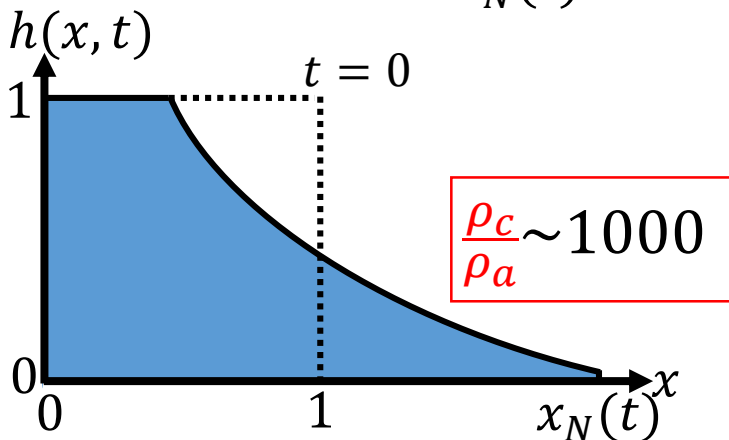
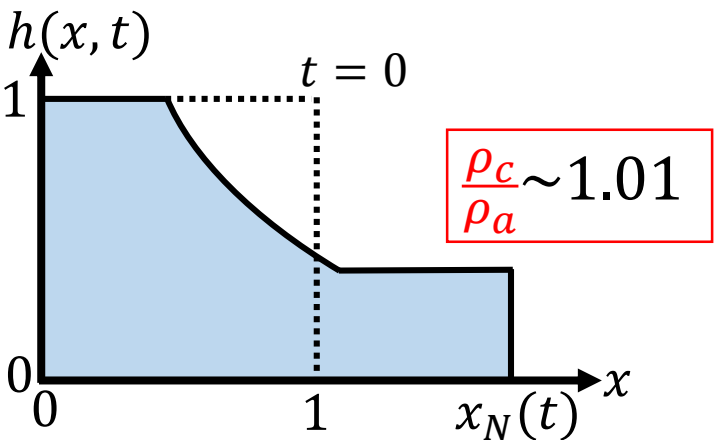
$$u_N = Fr \cdot \sqrt{\rho_c / \rho_a} \cdot \sqrt{h_N} \\ (x = x_N(t))$$

先端の位置 : $x_N(t)$, 先端の厚さ : $h_N(x, t)$,
先端の速度 : $u_N(x, t)$

※ Fr は 1 のオーダーの定数

ダム・ブレイク問題

単位長さ・高さで固定された流れを $t = 0$ で開放 (ダム・ブレイク) した際、流れがいかに流動するかを求める。

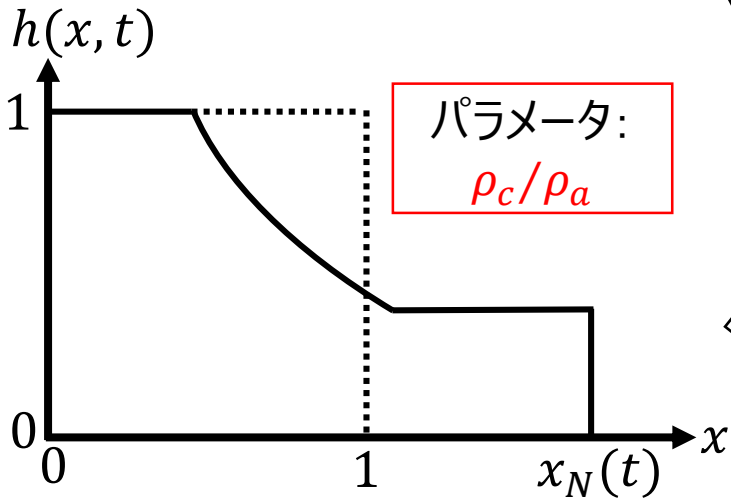


2. 均質な非粘性密度流(ρ_c)に関する浅水波方程式

■ 先端条件の数値的取り扱い

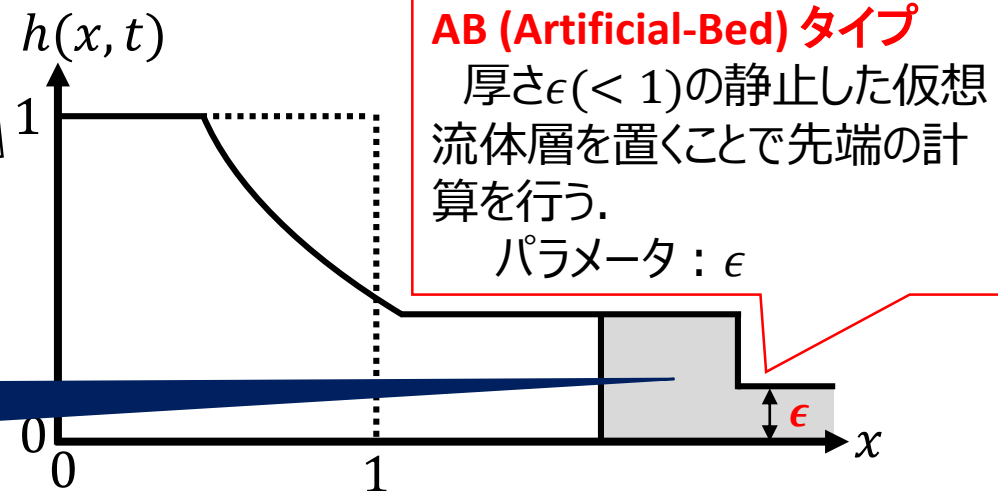
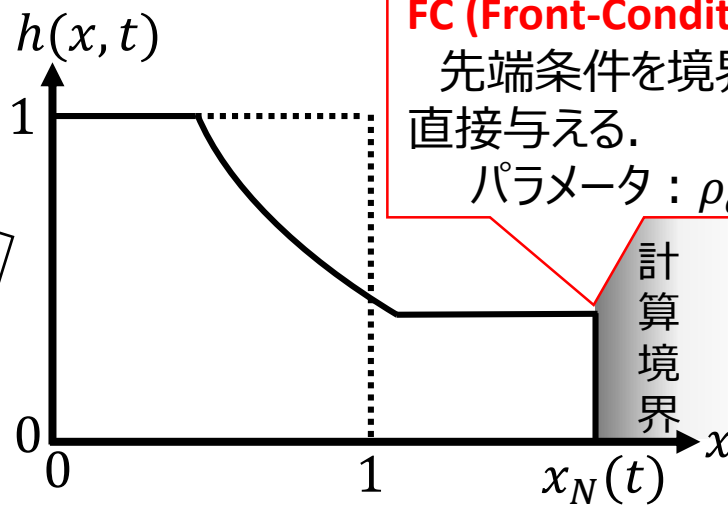
浅水波方程式と先端条件を数値的に解く場合、先端条件の取り扱いに関して2つのアプローチが用いられてきた。

厳密解(解析解)



周囲流体からの抵抗を,
「仮想流体層を持ち上げ,
それを動かす力」で代用

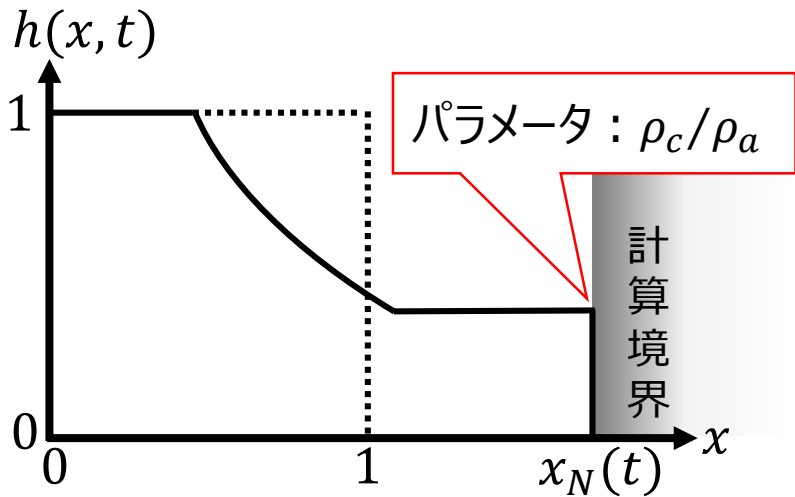
先端部の数値的取り扱い



2. 均質な非粘性密度流(ρ_c)に関する浅水波方程式

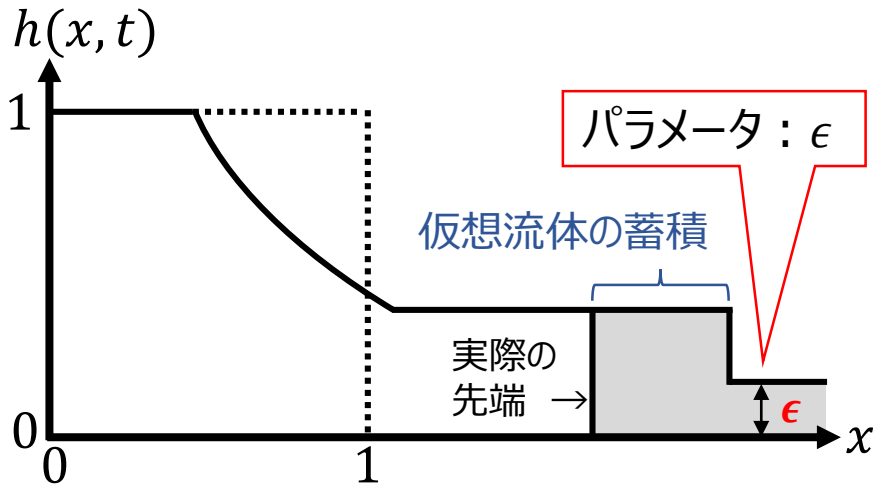
■ 先端条件の数値的取り扱い

FC (Front-Condition) タイプ



利点	先端条件を直接計算する. (→特に問題なければ, 全ての ρ_c/ρ_a に対してFCで解くべき)
問題点	先端の位置 x_N が計算グリッドに一致していないため取り扱いが難しく, 数値的不安定が生じやすい.

AB (Artificial-Bed) タイプ



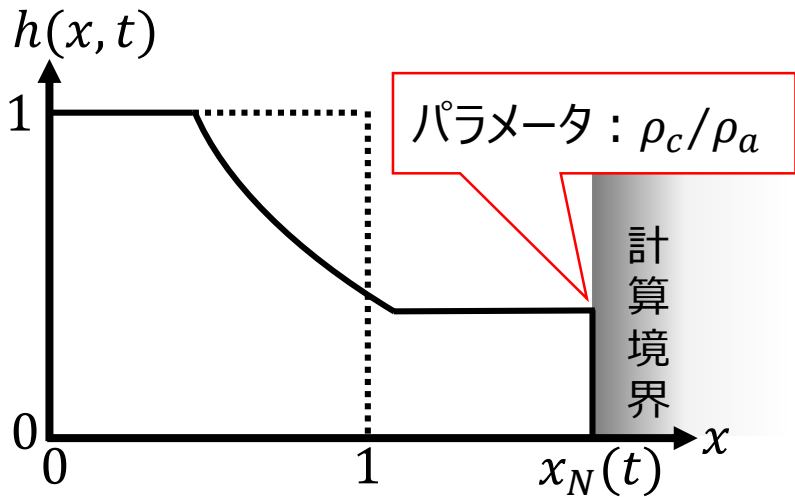
解こうとしている流れの ρ_c/ρ_a に対する計算を行っている保証がない

利点	仮想厚さ ϵ を置いて解くだけで安定に計算できるため, 数値的取り扱いが簡単である.
問題点	- 仮想厚さ ϵ と ρ_c/ρ_a の対応関係が不明である. 「仮想流体の蓄積」の影響がどのように表れるのか不明である.

2. 均質な非粘性密度流(ρ_c)に関する浅水波方程式

■ 先端条件の数値的取り扱い

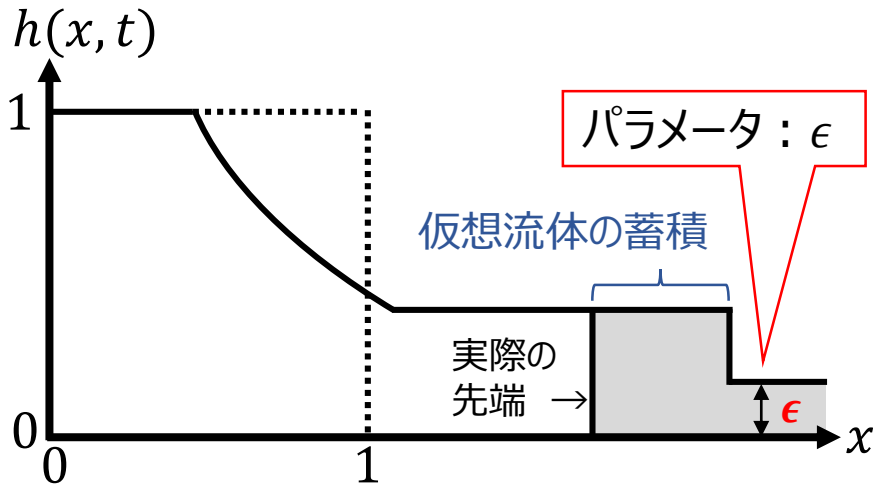
FC (Front-Condition) タイプ



利点	先端条件を直接計算する。 (→特に問題なければ、全ての ρ_c/ρ_a に対してFCで解くべき)
問題点	先端の位置 x_N が計算グリッドに一致していないため取り扱いが難しく、数値的不安定が生じやすい。

課題2

AB (Artificial-Bed) タイプ



本研究で解決した課題 FC・ABそれぞれの適用範囲を求めた

利点	仮想厚さ ϵ を置いて解くだけで安定に計算できるため、数値的取り扱いが簡単である。
問題点	・ 仮想厚さ ϵ と ρ_c/ρ_a の対応関係が不明である。 ・ 「仮想流体の蓄積」の影響がどのように表れるのか不明である。

課題1

3. 課題1: ABタイプにおける ϵ とその蓄積について

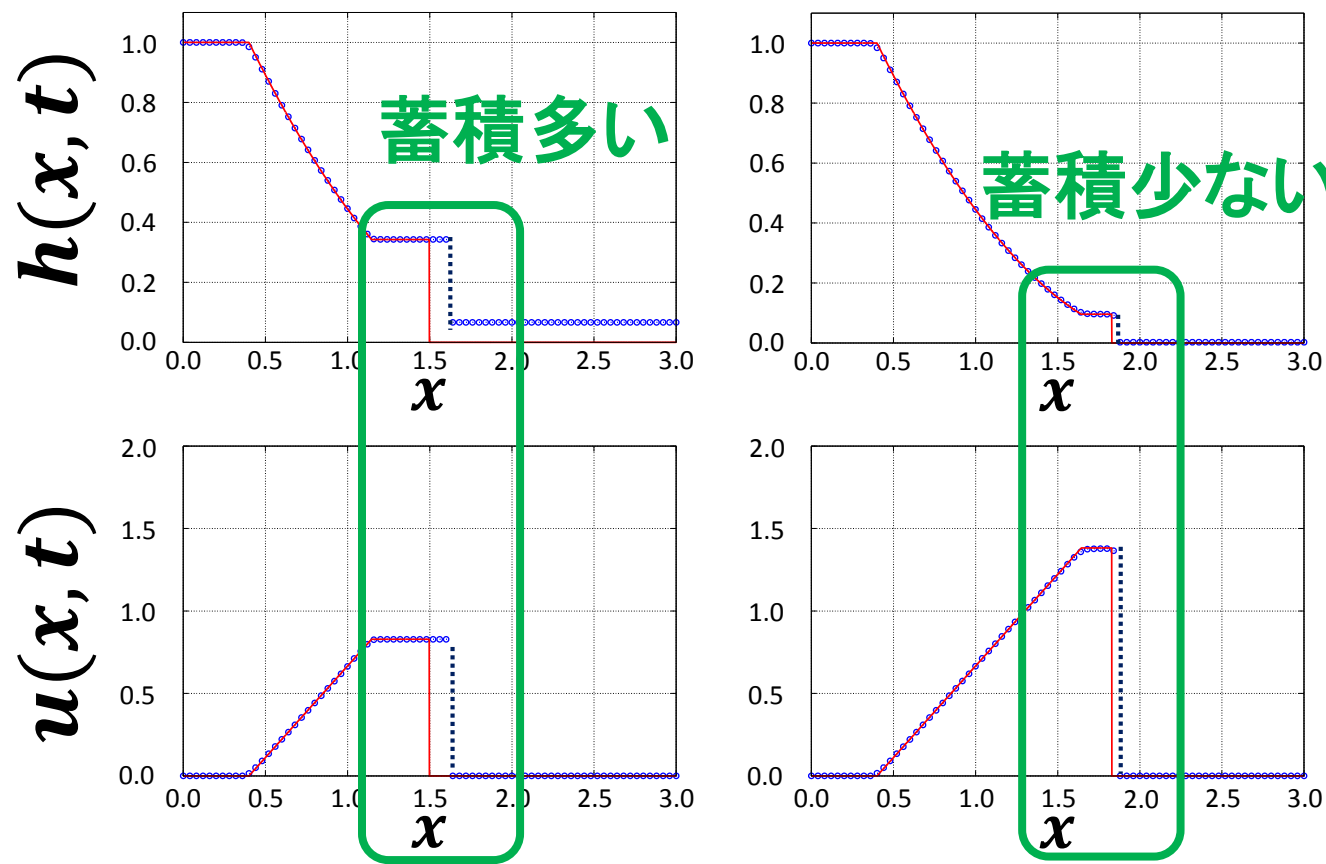
■ 厳密解(解析解)とABタイプの数値解の比較

ρ_c/ρ_a に関する厳密解

⇒ ABタイプでは, ϵ を調節すると数値解を対応づけられた.

$$\epsilon = 6.65 \times 10^{-2}$$
$$(\rho_c/\rho_a = 1.01)$$

$$\epsilon = 2.35 \times 10^{-3}$$
$$(\rho_c/\rho_a = 10)$$



厳密解 ($t = 0.6$)
【パラメータ: ρ_c/ρ_a 】

数値解 ($t = 0.6$)
【パラメータ: ϵ 】

- ・ ϵ と ρ_c/ρ_a の関係
- ・仮想流体の蓄積量

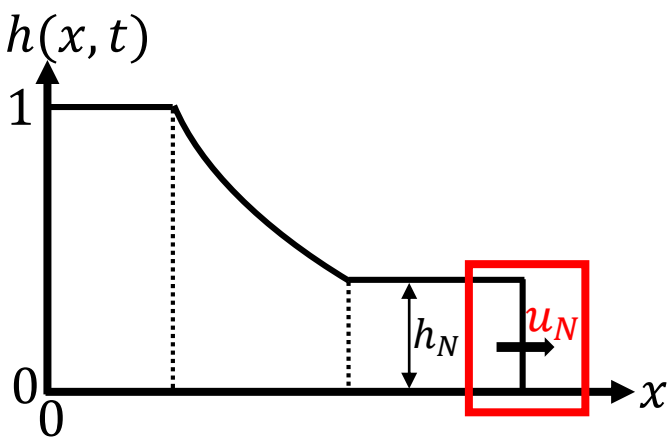


ABタイプの数理的性質を解析的に調べることで, 定量的に求めた.

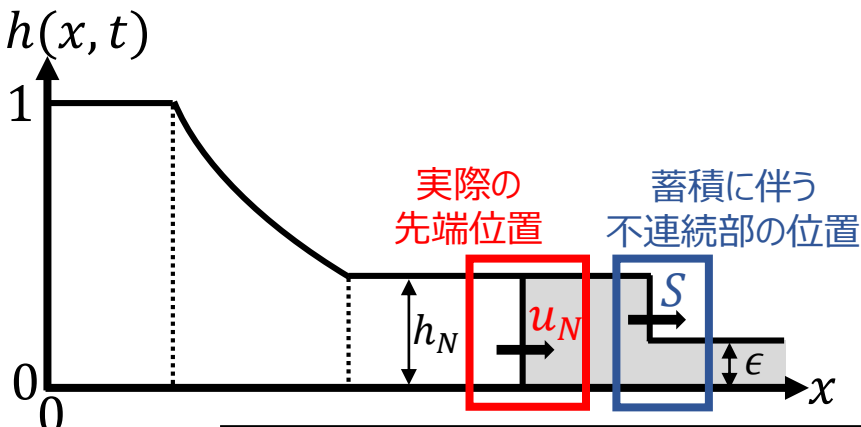
3. 課題1: ABタイプにおける ϵ とその蓄積について

■ ダム・ブレイク問題の解析解

厳密解 (パラメータ: ρ_c/ρ_a)



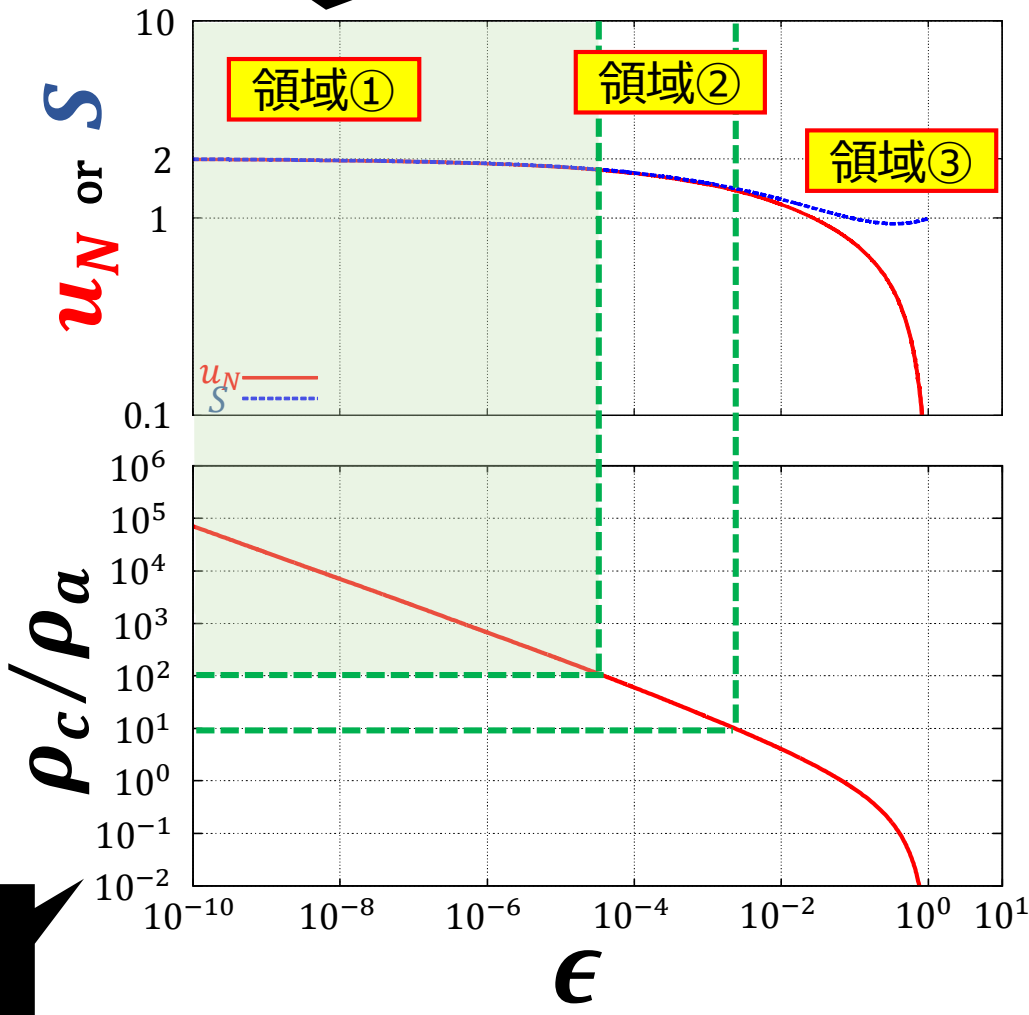
AB タイプ (パラメータ: ϵ)



仮想厚さ ϵ と密度比 ρ_c/ρ_a の解析的対応関係

領域①

- S と u_N の差が小さい $\Rightarrow$ 蓄積量は少ない
- $S \sim u_N \rightarrow 2 \Rightarrow$ 適当な ϵ を与えてもOK

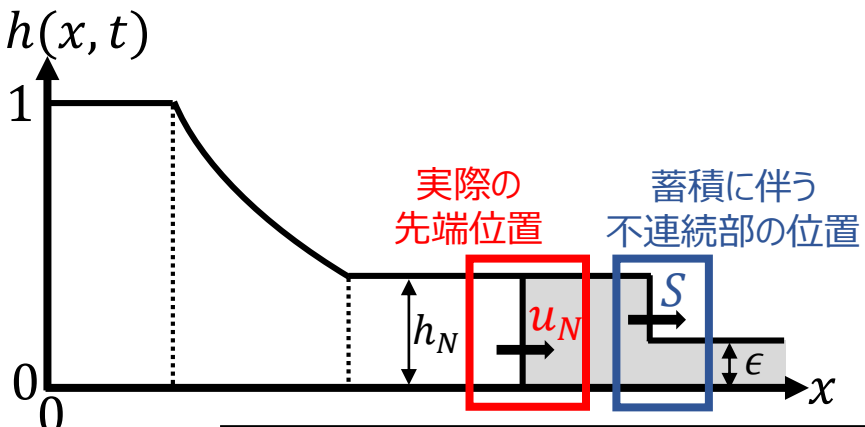


3. 課題1: ABタイプにおける ϵ とその蓄積について

■ ダム・ブレイク問題の解析解

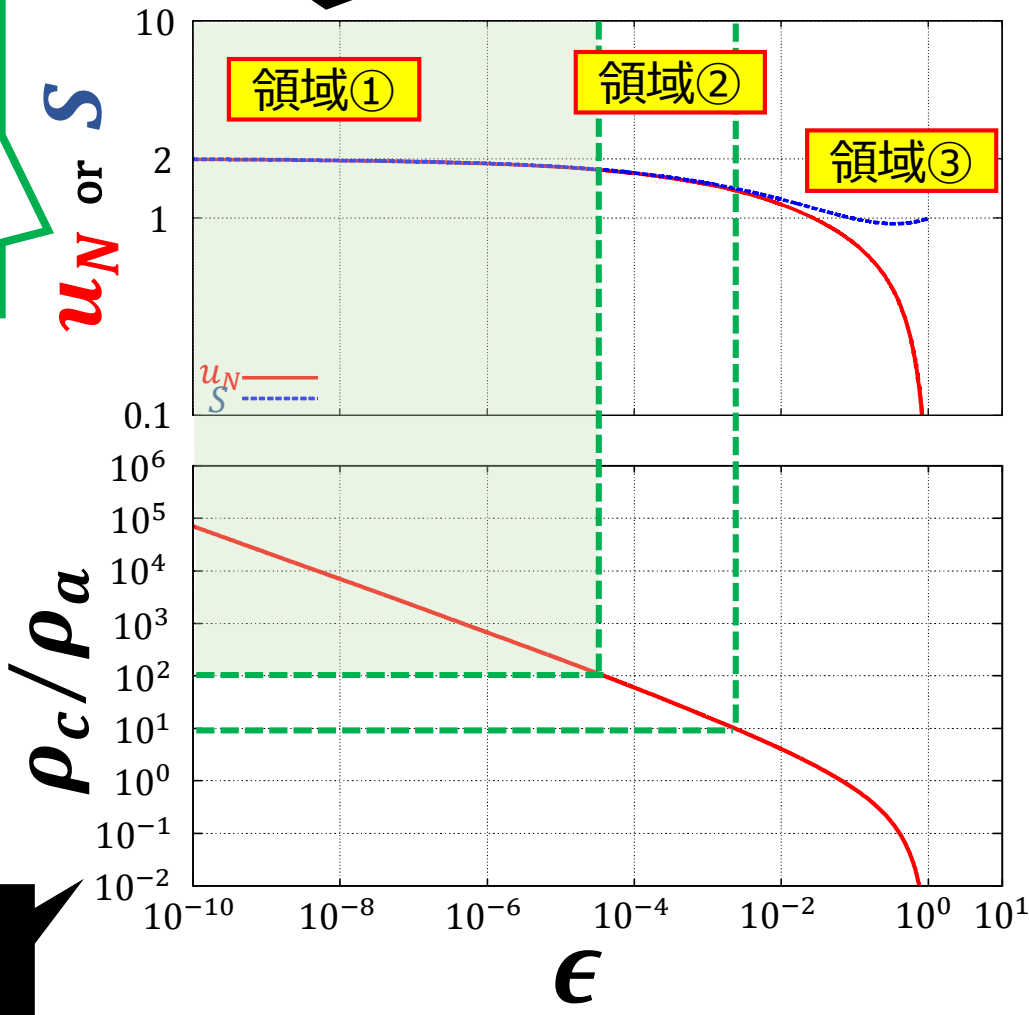
- 厳密解 (パラメータ: ϵ)
- S と u_N が ϵ に依存するかしらないか
 - S と u_N の差の大小
- ↓
- 解の性質を3領域で考える

AB タイプ (パラメータ: ϵ)



仮想厚さ ϵ と密度比 ρ_c/ρ_a の解析的対応関係

- 領域①
- S と u_N の差が小さい $\Rightarrow$ 蓄積量は少ない
 - $S \sim u_N \rightarrow 2 \Rightarrow$ 適当な ϵ を与えてもOK



3. 課題1: ABタイプにおける ϵ とその蓄積について

■ ダム・ブレイク問題の解析解の性質

ABタイプ適切

領域①

$$10^2 \lesssim \rho_c / \rho_a$$

- 蓄積量が少ない($S/u_N \sim 1$)
- ϵ に依存しない($S \sim u_N \rightarrow 2$)
 $\Rightarrow$ 適当に ϵ を与えてもOK

高濃度部

ABタイプ不適切 (FCタイプを用いるべき)

領域②

$$10^1 \lesssim \rho_c / \rho_a \lesssim 10^2$$

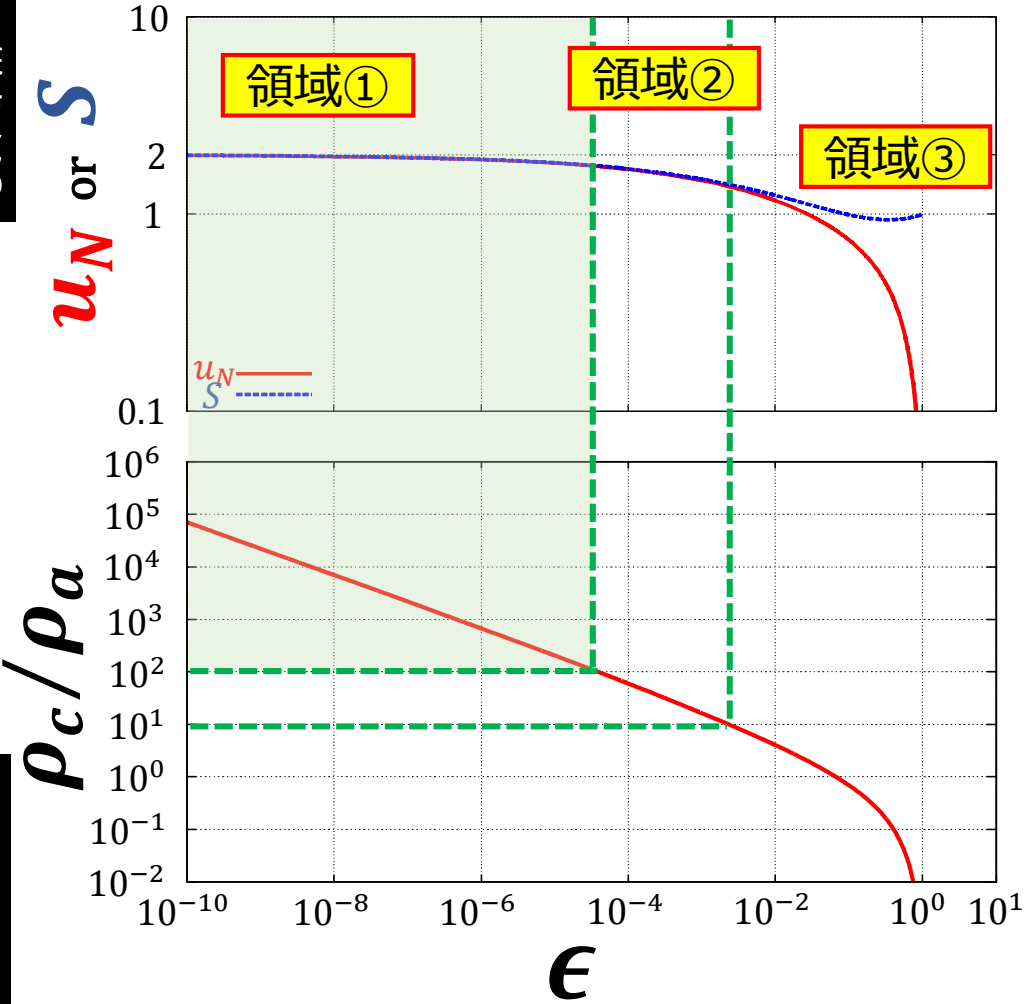
- 蓄積量が少ない($S/u_N \sim 1$)
- ϵ に依存する
 $\Rightarrow \epsilon$ を正しく与えるべき

領域③

$$\rho_c / \rho_a \lesssim 10^1$$

- 蓄積量が多い($S/u_N \gg 1$)
- ϵ に依存する

低濃度部



3. 課題2: FCタイプの先端境界を計算するアルゴリズムの開発

■ 離散化手法: 有限体積法 (Finite Volume Method)

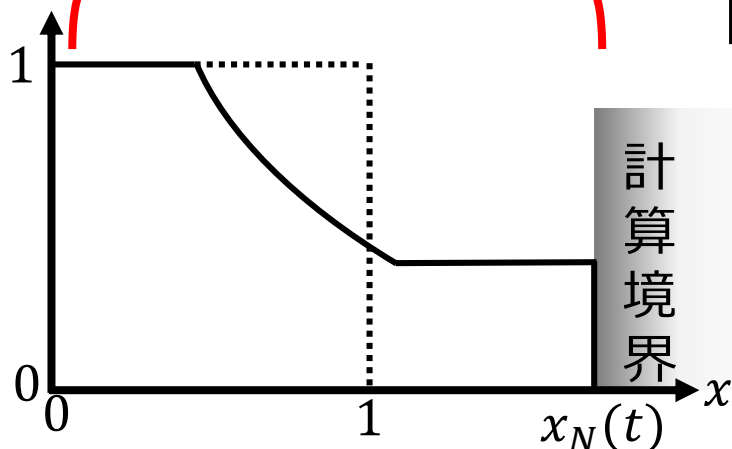
浅水波方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

厚さ: $h(x, t)$
速度: $u(x, t)$

FC タイプ

$h(x, t)$



先端境界以外の領域

数值的に解く場合でも,
保存の式 (質量保存の式と運動量
保存の式) の2式を解く.



2つの未知変数(h, u)を求める.

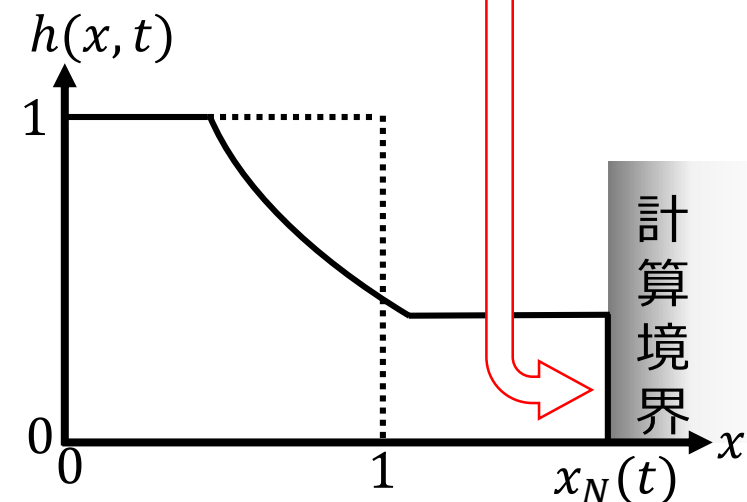
3. 課題2: FCタイプの先端境界を計算するアルゴリズムの開発

■ 先端境界の数値的取り扱い

先端境界

- 3つの未知変数(x_N, h_N, u_N)
- 物理的に満たされるべき方程式
 - 保存の式 (質量と運動量)
 - 先端条件

FC タイプ

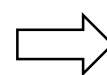


既存のアルゴリズム (e.g., Ungarish, 2009)

問題点:

- 運動量保存の式が解かれていなかった.

- 質量保存の式
- 先端条件



2つの未知変数
(h, u)を求める.

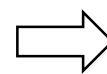


求まった u を用いて,
 $x_N^{new} = x_N^{old} + \Delta t \cdot u$

本研究で開発したアルゴリズム

保存の式 (質量保存・運動量保存) と
先端条件の両方とも満たす.

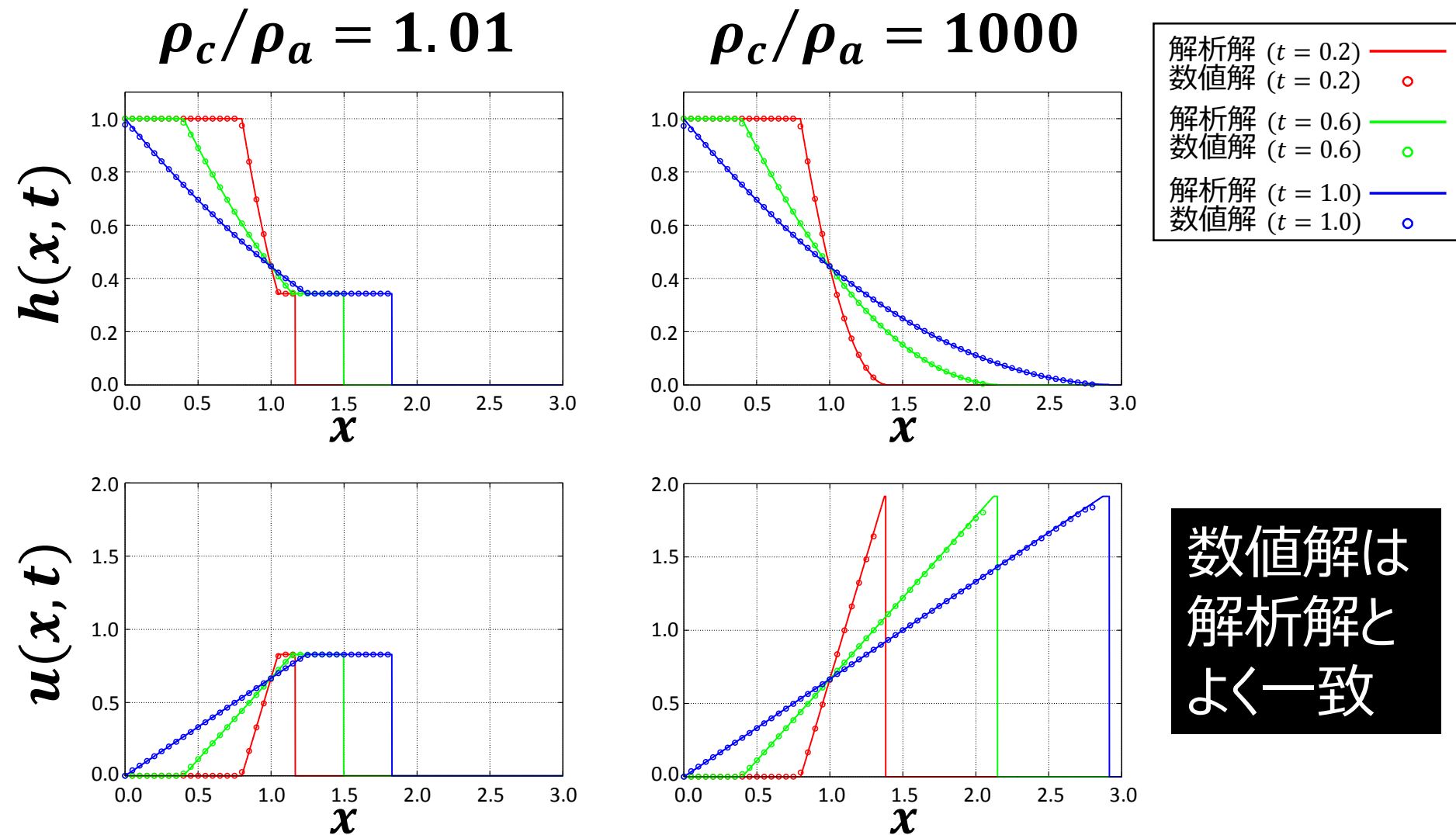
- 質量保存の式
- **運動量保存の式**
- 先端条件



3つの未知変数
(x_N, h_N, u_N)を求める.

3. 課題2: FCタイプの先端境界を計算するアルゴリズムの開発

■ 数値解の検証(verification): ダム・ブレイク問題



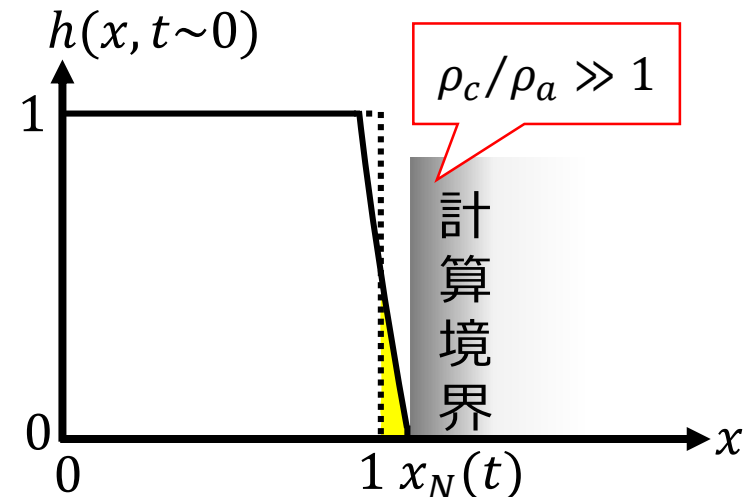
3. 課題2: FCタイプの先端境界を計算するアルゴリズムの開発

■ 先端境界の数値的取り扱い

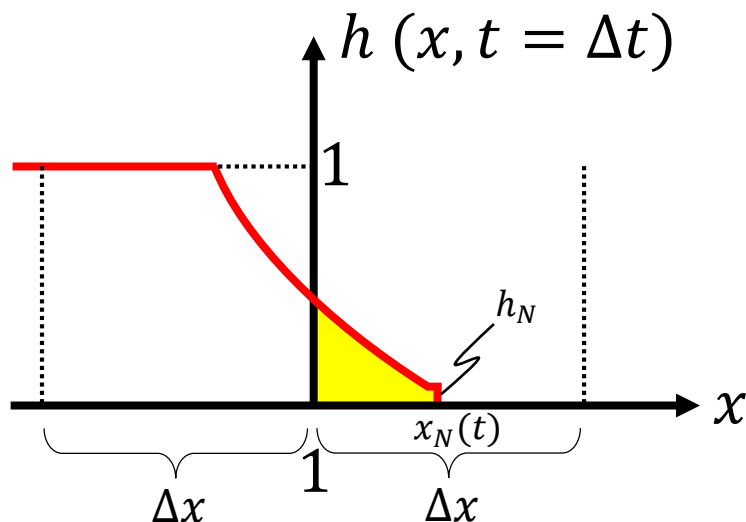
開発したアルゴリズムの注意点

$\rho_c/\rho_a \gg 1$ の場合, 最初の数ステップでは先端位置 x_N が実際の値よりも過大に見積もられてしまう.

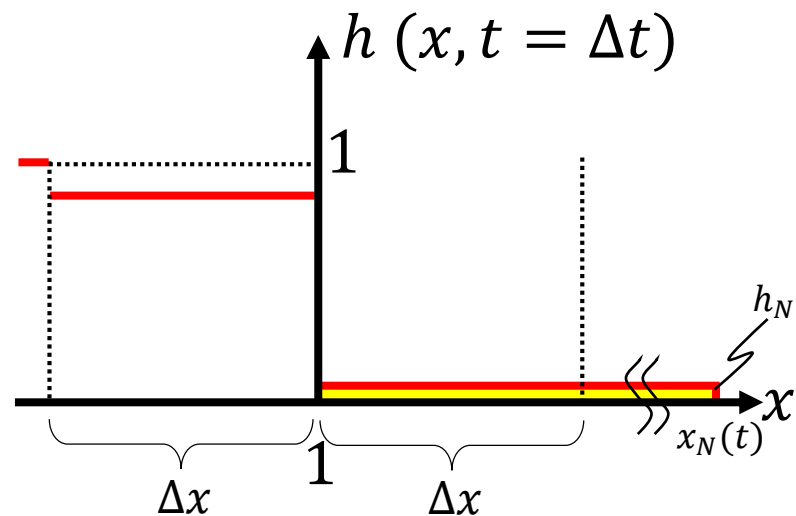
⇒ ρ_c/ρ_a の大きさに対し, ABタイプとFCタイプを使い分けることで解決できる.



先端付近の解析解 (時間ステップ $n = 1$)

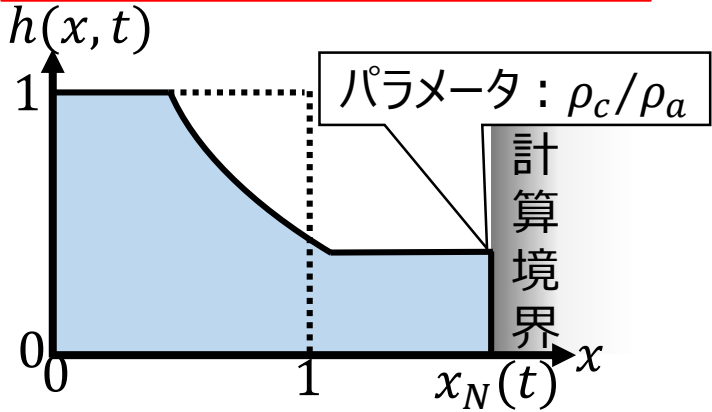


先端付近の数値的取り扱い (時間ステップ $n = 1$)



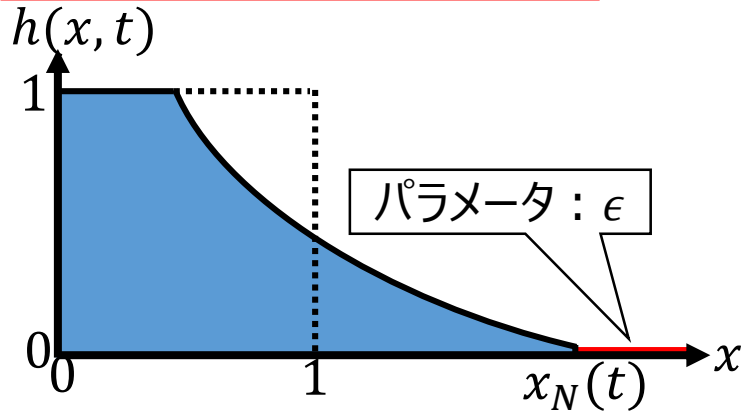
4. まとめ: FCタイプとABタイプの ρ_c/ρ_a に関する適用範囲

FC (Front-Condition) タイプ



利点	先端条件を直接計算する.
本研究の成果	保存則・先端条件の両方を満たす新たなアルゴリズムを開発した. (ただし, $\rho_c/\rho_a \gg 1$ を計算する際には, 先端の取り扱いについて注意点有り)

AB (Artificial-Bed) タイプ



利点	仮想厚さ ϵ を設置して解くだけで, 計算は安定・簡単にできる.
本研究の成果	ダム・ブレイク問題における解の性質を調べることで, $\rho_c/\rho_a \gtrsim 100$ の流れに適用できることがわかった.

結論 低濃度部についてはFCタイプで, 高濃度部についてはABタイプで解く火砕流の2層密度流モデルを開発していけば良い.