時系列解析: 定常信号の周波数解析(2) cross spectrum

西田究

January 4, 2016

1　2つの時系列データがどのくらい似ているかを調べる

２つの時系列データを比較する場合には、相互相関関数を計算することは有効な解析手法です。相互相関関数を計算することにより、どの程度２つの時系列データは似ているのかを調べることができます。自己相関関数のフーリエ変換をパワースペクトルと呼ぶのと同様に、相互相関関数のフーリエ変換をクロス・スペクトルと呼びます。

現象は大きく分けて (1) 過渡的 (transient) な現象と (2) 持続的 (persistent) な現象に分類することができます。まず、過渡的な現象として地震波形の例を取り上げ、相互相関関数の意味を説明していきます。

持続的な信号として、はじめに繰り返し測定時の信号とノイズを取り上げます。定常信号に対して相互相関関数を定義し、そのフーリエ変換としてクロス・スペクトルを定義します。続いてコヒーレンシーとは何か解説していきます。最後に相互相関解析の応用例として、地震波干渉法について簡単に紹介します。

目的

- 相互相関関数を理解する
- 定常信号の周波数解析の具体的な手続きを身につける。
- クロススペクトル・コヒーレンシーの図を読めるようになる。

2　相互相関関数とは

ここでもまずは過渡的な現象について見ていきます。2 つの時系列 $u_1(t), u_2(t)$ を考え、その相互相関関数 $\Psi(\tau)$ を

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) u_2(t+\tau) dt, \tag{1}$$

のように定義します。自己相関関数を $\phi_1(\tau)$ と $\phi_2(\tau)$

$$\begin{aligned} \phi_1(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) u_1(t) dt \\ \phi_2(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_2(t) u_2(t) dt, \end{aligned} \tag{2}$$

と定義します。相互相関関数の周波数領域での表現をクロス・スペクトル $\Psi(f)$ と呼び、それぞれのフーリエ変換 U_1,U_2 を用いて

$$\Psi(\tau) = U_1^*(f)U_2(f), \tag{3}$$

とかけます[1]。

例として地震波を考えてみましょう。図 2 左では、地震計 4 つならべ地震波の伝搬をしている状況を考えています。図右下は波が伝わっている様子を見て取れます。右上の図では観測点 1 と 2, 3, 4 との相互相関関数を表しています。ピーク時間の遅延が走時差を表しています。2 つの波形を似ているかを調べるためには、それぞれの大きさ $\phi_1(0),\phi_2(0)$ で

$$\frac{\psi(\tau)}{\sqrt{\phi_1(0)\phi_2(0)}}, \tag{4}$$

と規格化すると便利です。規格化した相互相関関数のピーク値が、波形がどの程度似ているかを表します。

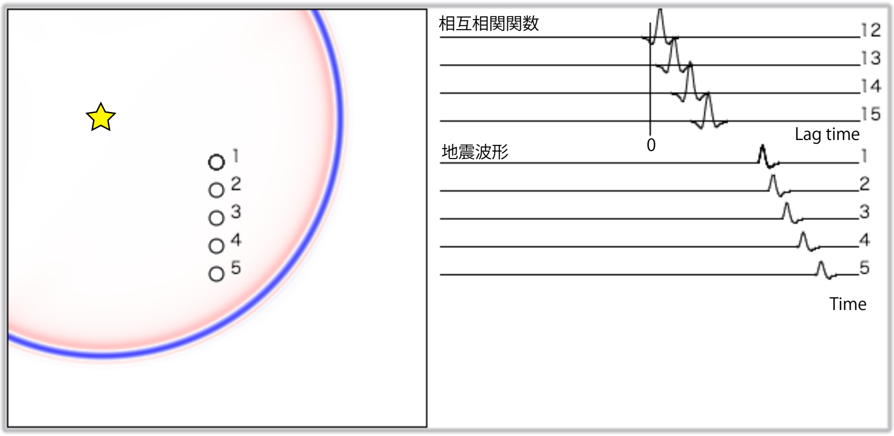

Figure 1: 相互相関関数の模式図。左図はある瞬間の地動分布 (震源は星印で示しています)。右上の図はに観測点間の相互相関関数を、右下の図は観測点 1-5 での地動を示しています。)

3　定常信号の場合

以下、過渡的な現象 (地震や火山の噴火) ではなく、微動や脈動など統計的にランダムかつ定常と近似できる現象 $u_1(t),u_2(t)$ について考えます。ここでは条件を明確にするために、実験室での繰り返し定常信号を測定している場合を考えていましょう。ここでは，ある物理量 $u_1^k(t)$ と $u_2^k(t)$ を測定しているとします[2]。今定常信

[1]フーリエ変換の符号の定義によっては、U_2 が複素共役となります。フーリエ変換の定義は常に頭の片隅に置いておくようにしましょう。

[2]前回説明したように、繰り返し測定した測定値の集合をアンサンブル (ensemble) とよびます

号を考えているので、前回の講義で説明したのようにアンサンブル平均 μ_1,μ_2 を

$$\mu_1 \equiv \langle u_1(t) \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u_1^k(t),$$
$$\mu_2 \equiv \langle u_2(t) \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u_2^k(t), \quad (5)$$

と定義でます。同様に相互相関関数 $\psi(\tau)$ を

$$\psi(\tau) \equiv \langle u_1(t)u_2(t+\tau) \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u_1^k(t)u_2^k(t+\tau), \quad (6)$$

と定義します。

地球物理学的観測は実験室と違い多くの場合には、繰り返し測定することは不可能です。厳密な意味ではアンサンブル平均を取ることができません。そこでほとんどの場合には、アンサンブル平均と時間平均が等しいと仮定して自己相関関数と同様に、

$$\psi(\tau) \fallingdotseq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_1(\tau)u_2(t+\tau)dt, \quad (7)$$

と計算します。

3.1 相互相関関数をフーリエ解析

無限に続く定常シグナルは自乗可積分とならないために、フーリエ成分が発散してしまいます。そのためにフーリエ変換できません。しかし、相互相関関数であればフーリエ変換することができます。相互相関関数のフーリエ変換をクロス・スペクトル密度関数呼びます[3]。相互相関関数はパワースペクトル密度関数の単位と同様に、(時間領域での単位)^2/Hz となりますつまりクロス・スペクトルとは、2 つの時系列データがどの程度共通の周波数成分を持っているかを計算しているのです。以下もう少し詳しく見ていきましょう。

相互相関関数 $\psi(\tau)$ は、十分速く 0 に収束すると仮定して (自乗可積分)、相互相関関数のフーリエ変換としてパワースペクトル $\psi(f)$ を定義します。

$$\Psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau, f \geq 0. \quad (8)$$

クロス・ペクトルの定義として片側スペクトルと両側スペクトルがあります。パワースペクトル違いクロス・スペクトルは、明示されていないことも多く注意が必要です。

関連してもう重量な量・コヒーレンシーをここで定義します。

$$Coh(f) \equiv \frac{\Psi(f)}{\sqrt{\Phi_1(f)\Phi_2(f)}}. \quad (9)$$

式を見るとわかるように、それぞれのパワースペクトルでクロススペクトルを規格化した量です。Coh は 2 つの信号がどの程度似ているか測る量で、絶対値としては $-1 \leq Coh \leq 1$ となります。値は複素数なので、Coh の位相は 2 つの信号の位相特性のズレを表しています。

[3] 単にクロススペクトルと呼ぶことも多いです。

も少し具体的に考えてみましょう。同じ物理量を同時に 2 つの測定装置で計測している状況を考えます。

$$\begin{aligned} u_1(t) &= s(t) + n_1(t) \\ u_2(t) &= s(t) + n_2(t). \end{aligned} \tag{10}$$

s, n_1, n_2 はそれぞれ無相関で平均は 0 だとします。相互相関関数は

$$\psi(\tau) = \langle u_1(t) u_2(t+\tau) \rangle = \langle s^2(t) \rangle \tag{11}$$

となりノイズはとは関係しない形になります。コヒーレンシーは

$$Coh = \frac{\langle |S(f)|^2 \rangle}{\sqrt{(\langle |S(f)|^2 \rangle + \langle |N_1(f)|^2 \rangle)(\langle |S(f)|^2 \rangle + \langle |N_2(f)|^2 \rangle)}} \tag{12}$$

となります。ノイズが 0 の時には常に 1 に、ノイズが大きくなるにつれて小さくなっていく様子がわかると思います。2 つの測定がどの程度似ているのか、どの程度位相がずれているのか判断するためにコヒーレンシーは非常に便利な量です[4]。

4　実データへの適応

実際に観測・計測が行われる場合多くは離散化されたデジタルデータを取り扱います。有限な長さの実データ (離散データ) を実際にフーリエ解析する典型的な手順をみてみましょう[5]。データ $u(t)$ は離散的なサンプリング間隔 Δt で計測されているとします。

4.1　時系列データの分割

定常シグナルをフーリエ解析するさいに、自己相関関数は十分に速く収束すると仮定しました。相互相関関数 $\psi(\tau)$ が $|\ \tau\ | > T/2$ では十分に値が小さくその寄与が無視できるとします。この場合には、時間 T だけ時間が経てばそれ以前のとの相関がなくなり情報が独立しているとみなせます。そこで時系列データ全体を小さなデータ (長さ T) に分割します[6]。

物理的によく理解されている系であれば T を事前に知ることができます。例えば地震波到達の相対走時を測定する場合を考えてみましょう (図 2 参照)。当然のことながら切り出す時系列長 T が期待される走時差の 2 倍 (2τ) より短い場合には正しく測定できません。時系列長が T が $\tau/2$ 以上 τ 以下の場合には, 相関関数ピークが負のラグタイムに回り込んでしまいます (wrap around と呼ばれる現象)。これは離散フーリエ変換で周期性を暗に仮定しているために、$T/2$ より大きな走時差は負と判断されてしまうためです。まずは事前に想定している物理・統計モデルから T をひとまず見積もります。その後に T を適宜変化させてその振る舞いを見ていきます[7]。

---

[4] ここで重要になってくるのは、コヒーレンシーは統計的に処理して初めて意味の出てくる量です。例えば 1 サンプルに対してコヒーレンシーを計算すると常に 1 となります。ただ 1 回の測定では、2 つの信号の位相がずれているだけなのか、違う信号なのかが区別できないためです。

[5] 正確には Welch の方法と呼ばれる解析方針です。他の方針として、全体の時系列データをフーリエ変換し周波数領域で平均化するやり方もあります。どちらのやり方も、時間領域で自己相関関数 $\phi(\tau)$ が τ が大きくなるにつれて十分に速く収束することを意味します。

[6] 実際にはオーバーラップを持たせて切り出すことが常套手段となっています。これは、後で述べるように、ウィンドウ関数をかけるため端の情報が落ちるため、ずらす事によってその影響を低減するためです。

[7] wrap around を防ぐために時系列のゼロ埋めをする事もおおいが、ここで詳細は述べない。

4.2 離散フーリエ変換 (DFT)

まずは、トレンドの除去、ウィンドウ関数 $w(t)$ による処理を行います。ウィンドウ関数をかける事により、シグナルの振幅が変化するために補正する必要があります。統計的に定常な現象を見ているとすると $w(t)u(t)$ の分散は $u(t)$ の $\sqrt{\sum w(t)^2/N}$ 倍となるはず。その効果を補正する必要があります。

$$\overline{u}(k\Delta t) = \sqrt{\frac{T}{\Delta t \sum_{k=0}^{N-1} w_k^2} u(k\Delta t)} \tag{13}$$

ここで、時刻 $t_k = \Delta t k$ N はデータの点数です。$T = N\Delta t$ となります。

その後に、切り出した時系列を離散フーリエ変換 (DFT) します。離散フーリエ変換は

$$U(f_j) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-2\pi i f_j t_k}, \tag{14}$$

と書けます。Δt はサンプリング間隔、周波数 $f_j = \Delta f(k-1)$, 時刻 $t_k = \Delta t k$,$\Delta f = 1/(\Delta t N)$, N はデータの点数です。$T = N\Delta t$ となります。ナイキスト周波数 $f_n = 1/(2\Delta t)$ より短周期側の現象は正しく表現出来ません。

式の形を見ると分かるように離散フーリエ級数展開しているので、フーリエ変換と違い暗に周期性を仮定することになります。そのためいかに述べるように、ウィンドウ関数をかける (端をつぶすので、tapering とも呼ばれます) など、注意が必要です。

また実際の計算には Fast Fourier Transform (FFT) と呼ばれるアルゴリズムを使います。実装の仕方にもよりますが、点数が２のべき乗の時に効率的に計算することができます。FFT は色々な分野で使われているため、多くのライブラリが提供されています (例えば FFTW, FFTPACK 等)。ライブラリによってフーリエ変換の定義 (規格化と exp の符号) が違うので注意しましょう。クロス・スペクトルを時系列長 T に合わせて規格化する必要もあります。片側スペクトルの場合

$$\Psi(f_j) = \frac{2\langle \bar{U}_1^*(f_j)\bar{U}_2(f_j)\rangle}{T}, \tag{15}$$

のように、切り出した窓の数だけ平均化しクロススペクトルを計算します。

4.3 定常シグナルに対する解析手順

解析手順

1. 時系列データを細かい時系列に分ける
2. トレンドを除去:長周期成分の除去
3. tapering する:不連続が生じる事を防ぐ
4. 分割した時系列に対して DFT する
5. Window 関数 $w(t)$ の効果をそれぞれの時系列に対して補正. $\overline{U}_j = \sqrt{\frac{T}{\Delta t \sum_i w_i^2}} U_j$
6. 分割した時系列に対してクロス・ペクトルを計算
7. クロス・ペクトルを平均を計算する

5 応用例: 地震波干渉法

クロス・スペクトルは基本的な統計量で、想定する物理的な状況によって意味合いが変わってきます。ここまで、(1) 相対走時の測定, (2) 信号に対する機器ノイズの影響を例として取り上げました。本章では応用として、地震波干渉法について紹介していきます。

5.1 地震波干渉法とは: ノイズをシグナルに

地球内部の状態を知る上で、地震学的な手法は重要な役割を果たしてきました。” 地震 ” が引き起す地震波は、固い場所を通ってくる場合には観測点に早く到達し、柔らかい場所を通ってくる場合には遅く到達します。1980 年代以降、この “ 到着時間のずれ ” を CT スキャンに似た方法で調べ、地球の 3 次元的な内部構造が明ら かにされてきました (地震波トモグラフィー)。

“ 地震 ” が起きていない時期には、地球は振動してないのでしょうか? 実は、地 球は常に海の波によって揺すられている事が知られています。脈動と呼ばれる周 期 5 秒から 20 秒程度の地面の振動です。近年、大気や海の波が 常時地球自由振動 と呼ばれる周期数 100 秒のゆっくりとした振動を引き起こしていることも明らか になってきました。しかし脈動や常時地球自由振動は地震観測をする上での “ ノイズ ” であると長い間考えられてきました。脈動や常時地球自由振動は常に色々 な方向から到来しているため、“ 地震 ” が引き起こした地震波を隠してしまうた めです。本当に、” 脈動や常時地球自由振動を使って、地球の内部構造を調べ る事はできないのでしょうか?

2004 年に Shapiro 達は、脈動と呼ばれる周期 10 秒程度の海洋波浪起源の地震波 (脈 動) を使い、カリフォルニアの地殻構造を推定する事に成功しました。地震波が 色々な方向から常に到来しているという事実を逆手に取り、脈動の伝わり方から 地球の内部構造を調べたのです。地震波干渉法と呼ばれる方法です。その後、同種の研究が盛んに行われるようになりました。最近では長周期の地震波 (常時地 球自由振動) を使い、局所的な構造だけではなく全球的な構造も求められるよう になってきました。

地震波干渉法で基本になる観測量は、二つの観測点を選び地震波形の相互相関関数です。相互相関関数の波形は、あたかも一方の観測点に震源 (a virtual source) があり、もう一方の観測点で波形を記録していると解釈できます。図**??**を見てみましょう。この図は松代にある地震計と日本・アジア各地の観測点の相互相関関数を計算下図です。地震波が伝播している様子が見て取れると思います。データそのものを見ると全くランダムで一見なんの情報も含んでいないように見えますが、相互相関関数解析をすることによって有用な情報を引き出すことが出来ることを示しています。

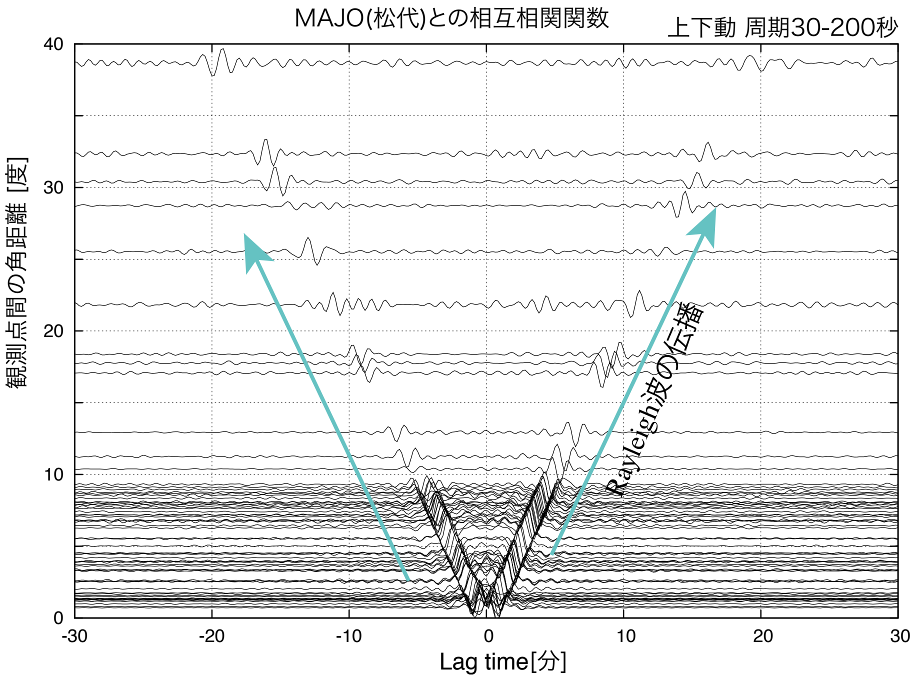

Figure 2: MAJO(松代) と他の観測点間の上下動記録の相互相関関数を観測点間の距離で並べた図。周期 20-200 秒のバンドパスフィルターをかけています。レーリー波の伝播を見て取れます。遅延時間が正の波束を causal part とよび，負の波束を acausal part とよびます。)

この手法には大きく分けてメリットが二つあります。1 つ目は地震が無い領域でも、仮想的にイベントを置くことが出来ることです。通常地震が無い領域では、地震波速度構造の詳しい地震波速度構造は分からないため、"**地震**"を必要としないのは大きなメリットです。

2 つ目は"**地震**"を待つ必要がない点です。通常地震波トモグラフィ解析を行うためには、十分な地震データが蓄積されるのを待つ必要があります。地震波干渉法では、一定期間観測すれば十分な事は多い[8]。

"**地震**"を待つ必要が無いという性質は、地震波速度構造の時間変化を調べる上でも非常に有利に働きます。地震を使って、微少な地震波速度構造の時間変化を調べるためには、繰り返し同じ場所で地震が起こる (繰り返し地震と呼ばれる) のを待つ必要があります。しかしそのような都合の良い地震が起こることは非常に希です。あるペアの相互相関関数を計算し、その時間変化を見ることは、繰り

[8]もちろん、十分な精度を確保するためには長期間の観測の方が有利ではある。

返し同じ場所で起こっている地震の記録を解析する事に相当すます。実際、火山や地震に伴う構造の時間変化が盛んに研究されるようになってきました (例えば Sens-Schönfelder Wegler, 2006, Wegler and Sens-Schönfelder, 2007, Brenguier et al., 2008a, Brenguier et al., 2008b).

5.2　理論的背景

本節では 2 次元無限媒質中に 2 点観測点がある場合を想定します。単純だが、表面波を考える上ではかなり良い近似です。また理想的な条件の元では、相互相関関数と Green 関数を結びつけることができます。[9]

ランダムな励起源が 1 カ所の場合 (A ramdom persistent source)

ランダムな励起を考えるが、まず最も単純な場合として 1 カ所叩いている場合を考えます。$\delta(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_s))f(t)$ に対する振動は、以下で求める撃力応答 (Green 関数と呼ばれる) との畳み込み積分で表現出来ます。$f(t)$ はランダムな時系列で、統計的に定常であることを仮定します。

周波数領域での Green 関数を $\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}, \omega)$ を使い任意の点での波動場は

$$\tilde{u}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{G}^{2D}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, \omega)f(\omega), \tag{16}$$

と表現出来ます。

次に観測点 1, 2 間の相互相関関数 $\tilde{\phi}_{12}(\omega)$ を評価する。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{12} &= \langle \tilde{u}_1^*(\omega)\tilde{u}_2(\omega)\rangle \\ &= \tilde{G}^{2D*}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_s, \omega)\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_s, \omega)\langle \tilde{f}^*(\omega)\tilde{f}(\omega)\rangle \end{aligned} \tag{17}$$

多数のランダムな励起源がある場合 (Many random sources)

N カ所叩いている場合を考える。雨粒が水面を叩いている状況を思い浮かべると分かりやすいでしょう。

$$\tilde{u}(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{i=0}^{N} \tilde{G}^{2D}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \omega)f_i(\omega), \tag{18}$$

ここで $\mathbf{r}_i$ は i 番目の励起源の位置を表します。

i 番目の励起源 $(i = 0, \cdots, N)$ を $\delta(\mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_s))\tilde{f}_i(\omega)$ とする。$\tilde{f}_i(\omega)$ は白色である事 (統計的に定常、かつ周波数スペクトルが周波数によらず一定。) かつ、互いに無相関であると仮定すると

$$\langle \tilde{f}_i^*(\omega)\tilde{f}_j(\omega)\rangle = \delta_{ij} f_0^2, \tag{19}$$

とかけます。

上記の関係式を使い相互相関を計算すると、

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{12} &= \sum_{i,j} \tilde{G}^{2D*}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i, \omega)\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j, \omega)\langle \tilde{f}_i^*(\omega)\tilde{f}_j(\omega)\rangle \\ &= \sum_{i,j} \tilde{G}^{2D*}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i, \omega)\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j, \omega)\delta_{ij} f_0^2 \\ &= \sum_{i} \tilde{G}^{2D*}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i, \omega)\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_i, \omega) f_0^2 \end{aligned} \tag{20}$$

[9] 相互相関関数を計算することにより観測点間の波動伝播が抽出されるデモを作成しました。http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/knishida/Seismology/wave2Drandom2.html

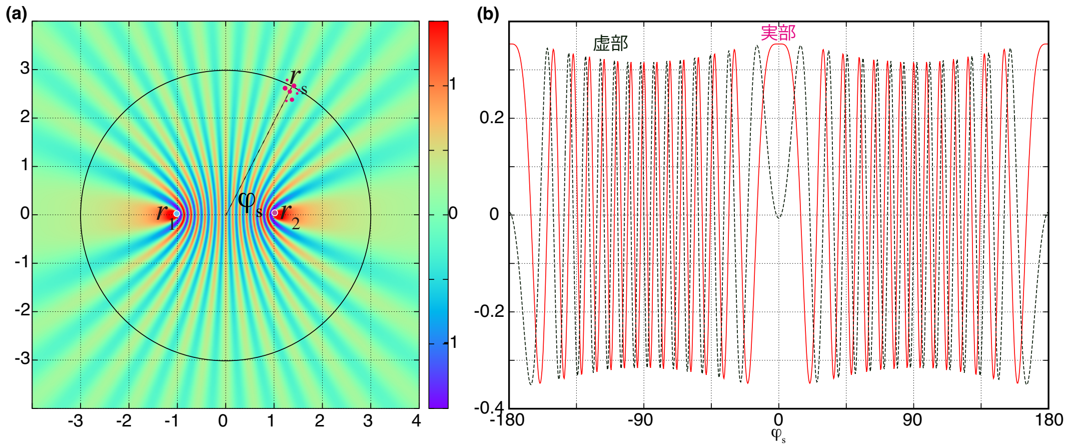

Figure 3: (a) r_s を固定し ϕ_s に対し被積分関数をプロットした図。(b) は $r_s = 3$ の円 (図 3(a) 参照) に沿った値をプロットした図。

励起源の数が十分に大きいと、励起源が観測点を囲んでいる場合には上式の和は線積分で置き換えられ、

$$\tilde{\phi}_{12} = f_0^2 \int_{l_s} \tilde{G}^{2D*}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_s, \omega)\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_s, \omega)dl_s, \tag{21}$$

と書けます。グリーン関数の畳み込み積分を空間で積分している形になっている。この式が地震波干渉法における基本式です。

積分の評価: 相互相関関数と Green 関数の関係 この積分を評価するために、図 3 の半径 r_s 上に励起源が並んでいる配置を考える。励起源の位置は原点からの距離 r_s と角度 ϕ_s で表現できます。

単純化のため Green 関数が $e^{ikr-\pi/4}/\sqrt{kr}$ に比例すると近似します。この近似は距離 r が波長に比べて長いときには妥当な近似であす[10]。そうすると

$$\tilde{\phi}_{12} \propto \int_{l_s} \frac{e^{ik(r_{2s}-r_{1s})}}{k\sqrt{r_{1s}r_{2s}}} dl_s, \tag{22}$$

r_{1s}, r_{2s} は観測点 1$\mathbf{r}_1$, 観測点 2$\mathbf{r}_2$ と励起源 $\mathbf{r}_s$ の間の距離。式にあるように、点震源 $\mathbf{r}_s$ から放射される波の観測点 1 と 2 とでの位相差は、距離の差を波長で割った値できまる。等位相差の曲線は観測点を焦点とする双曲線となります。そうすると、二観測点を通るパスに沿っては位相の変化は緩やかとなり (停留点, stationary point)、その他の領域では激しく振動します (図 3)。ランダムな励起の問題を考える場合、二観測点間を通るパスに沿った励起源の寄与 (stationary zone と呼ばれる) が大きくなり、その他の領域の励起源の影響は打ち消されます (停留値法, 例えば

[10] Green 関数は具体的には

$$G^{2D}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi}\frac{H\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}},$$

周波数領域では、

$$\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{i}{4}H_0^{(2)}(\omega r/c) \propto \frac{1}{\sqrt{kr}}e^{ikr-\pi/4},$$

とかけます。ここで波数 k は $k \equiv \omega/c$ と定義され、$H_0^{(2)}$ 第 2 種ハンケル関数である, $H()$ は Heviside の階段関数です。

蓬田 2007 参照)。また虚部は ϕ_s に対して反対称となっているため、励起源の分布が一様の場合には打ち消される[11]。

以下少し視点を変えて、もう少し直感的な説明を試みます。図 3 赤点で書いたようにランダムな励起源がある限られた領域に分布しているとき、十分に遠くで観測する場合多重極 (mono pole, dipole, quadrapole 等) の重ね合わせで表現できる (多重局展開と呼ばれます)。ψ_s が図にあるように 70° 程度の場合を考えます。この場合、2 観測点の間に節が入る確率はランダムです。そのために、r_s からでた波が 2 つの観測点で同位相である確率と逆位相である確率は等しい。一方 ϕ_s が 0 か π の時には (stationary zone の場合)、励起源から見て 2 つの観測点の方向は同じため常に r_s から出る波は同位相となります。つまり stationary zone に励起源がある場合のみ、相互相関波形に寄与します。

[11] 被積分関数が激しく振動する性質は重要です。なぜなら、一様に励起源が分布していない場合にも、stationary zone の寄与が卓越することが期待されるためです。励起源の分布に対して、相互相関関数の波形がロバストである性質は、データ解析上重要な点です。