時系列解析: 定常信号の周波数解析(1) power spectrum

西田究

January 4, 2016

1　持続的な信号をどう取り扱うか?

ある 1 点で何か物理量を観測する場合、現象は大きく分けて (1) 過渡的 (transient) な現象と (2) 持続的 (persistent) な現象に分類することができます。過渡的な現象としては、地震がわかりやすいと思います。ここまでの授業では、主に過渡的な現象を取り扱ってきました。これまでの授業で取り扱ってきたように、過渡的な現象はフーリエ変換の枠組みで取り扱うことができます。

持続的な信号としては、気象・海洋現象が典型的です。例えば海のさざなみを、沖合のブイで観測できたとします。本講義ではその観測記録をどうやって周波数解析をするか見ていきます[1]。

まず、この 2 回の講義での目標を挙げます。

目的

- 持続的な信号をどう解析するか理解する。
- 定常信号の周波数解析の具体的な手続きを身につける。
- パワースペクトル・クロススペクトルの図を読めるようになる。

2　アンサンブル

この授業で取り扱うのは、ランダムに変動している時系列です。ここでは条件を明確にするために、実験室での繰り返し測定を考えていましょう。各測定ごとに測定量がランダムに揺らいでいて、その確率的振る舞いを調べていく事を考えます。

ここでは，ある物理量 u の時間変化を測定しているとします。繰り返し測定した、測定値の集合をアンサンブル (ensemble) とよびます。平均値 μ を

$$\mu(t) \equiv \langle f(t) \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u^k(t), \tag{1}$$

と定義でき、アンサンブル平均と呼びます。同様に自己相関関数 $\phi(t,\tau)$

$$\phi(t,\tau) \equiv \langle f(t)u(t+\tau) \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} u^k(t)u^k(t+\tau), \tag{2}$$

[1]数学的には、信号をフーリエ解析するさいに、信号が 2 乗可積分である必要があります。持続的な信号は明らかに積分が発散するため、工夫が必要です。

を定義することができます。

3　定常信号とは

アンサンブル平均 $\mu(t)$、自己相関関数 $\phi(t,\tau)$ は一般に時間 t に依存します。$\mu(t)$,$\phi(t,\tau)$ が t に依存しない時、弱定常と呼びます。すべてのモーメントが時間 t に依存しない場合、強定常と呼びます。それ以外の現象を非定常な現象と呼びます。本講義では以降、定常な信号のみを取り扱ってきます。

4　定常過程のスペクトル解析

過渡的な現象 (地震や火山の噴火) ではなく、微動や脈動など統計的にランダムかつ定常と近似できる現象 $u(t)$ について考えます。また実験室の様に繰り返し実験できない[2]状況を考えます。その場合には当然のことながらアンサンブルを定義できません。

4.1　アンサンブル平均と時間平均

地球物理学的観測は実験室と違い多くの場合には、繰り返し測定することは不可能です。厳密な意味ではアンサンブル平均を取ることができません。そこでアンサンブル平均と時間平均が等しいと仮定して (エルゴート仮説[3])

$$\phi(\tau) \fallingdotseq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(\tau)u(t+\tau)dt, \tag{3}$$

と計算できます[4]。

4.2　自己相関関数をフーリエ解析

無限に続く定常シグナルは自乗可積分とならないために、フーリエ成分が発散してしまいます。そのためにフーリエ変換できません。しかし、自己相関関数であればフーリエ変換することができます。自己相関関数のフーリエ変換をパワースペクトル密度関数呼びます[5]。Percival の公式によって、自己相関関数は平均自乗振幅と結び付けられます。パワースペクトル密度関数の単位は、(時間領域での単位)^2/Hz となります[6]。つまりパワースペクトルとは、ある平均自乗振幅がどのような周波数成分を持っているかを計算しているのです。以下もう少し詳しく見ていきましょう。

[2]多くの地球物理学的観測はそうなります。理想的には、地球のような惑星を集めてそのアンサンブルを調べることができればより多くのことがわかるでしょう。

[3]エルゴート仮説は自明なことではなく、かなり強い仮定です。例えばあるクラスで繰り返し小テストを繰り返したとしましょう。その場合、クラス全体の平均を A 君の平均点で置き換えていることに相当します。個人差があるはずなので、かなり乱暴な仮定であることがわかると思います。

[4]この事を暗に仮定し、アンサンブル平均を表す記号 $\langle\cdot\rangle$ を時間平均に対して用いることも多いです。

[5]単にパワースペクトルと呼ぶことも多いです。工学の分野では電力スペクトルの訳語を当てることもあります。

[6]例えば加速度データのパワースペクトル密度は $(\mathrm{m/s^2})^2/\mathrm{Hz} = \mathrm{m^2 s^{-3}}$ となります。慣れないと単位に面食らうかもしれません。

自己相関関数 $\phi(\tau)$ は、十分速く 0 に収束すると仮定して (自乗可積分)、自己相関関数のフーリエ変換としてパワースペクトル $\Phi(f)$ を定義します。

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, f \geq 0. \tag{4}$$

このように定義した場合 Parseval の公式から $u(t)$ の平均自乗振幅 (mean squared amplitude) は

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) df, \tag{5}$$

と書けます。

パワースペクトルの定義として片側スペクトルと両側スペクトルがあります。明示されていないことも多く注意が必要です。

両側スペクトル $\Phi(f)$ の事を両側スペクトルと定義する。

片側スペクトル 実部しか持たないデータに関しては $p(f) = p(-f)$ となるので、慣習的に正の周波数のみ定義して、パワースペクトルの値を 2 倍する ($\bar{\Phi}(f) \equiv 2\Phi(f)$)。 地球物理学の分野では片側スペクトルで計算する例が多い。

5 実データへの適応

実際に観測・計測が行われる場合多くは離散化されたデジタルデータを取り扱います。有限な長さの実データ (離散データ) を実際にフーリエ解析する典型的な手順をみてみましょう[7]。データ $u(t)$ は離散的なサンプリング間隔 Δt で計測されているとします。

5.1 時系列データの分割

定常シグナルをフーリエ解析するさいに、自己相関関数は十分に速く収束すると仮定しました。自己相関関数 $\phi(\tau)$ が $|\tau| > T/2$ では十分に値が小さくその寄与が無視できるとします。この場合には、時間 T だけ時間が経てばそれ以前のとの相関がなくなり情報が独立しているとみなせます。そこで時系列データ全体を小さなデータ (長さ T) に分割します[8]。

物理的によく理解されている系であれば T を事前に知ることができます[9]。自己相関関数はデータ解析によって始めて分かります。そのため時系列長 T は事前には分からない事がほとんどです。その場合、事前に想定している物理・統計モデルから T をひとまず見積もります。その後に T を適宜変化させてその振る舞いを見ていきます。

[7]正確には Welch の方法と呼ばれる解析方針です。他の方針として、全体の時系列データをフーリエ変換し周波数領域で平均化するやり方もあります。どちらのやり方も、時間領域で自己相関関数 $\phi(\tau)$ が τ が大きくなるにつれて十分に速く収束することを意味します。

[8]実際にはオーバーラップを持たせて切り出すことが常套手段となっています。これは、後で述べるように、ウィンドウ関数をかけるため端の情報が落ちるため、ずらす事によってその影響を低減するためです。

[9]例えば周期数 100 秒の固体地球の弾性振動を解析する場合を考えます。この場合には地震波は地球を数周することが分かっているため、T は 1 日程度になります。

5.2 トレンドの除去

時系列は多くの場合に変動に比べ平均が大きな場合が多く問題となります。平均やトレンドは長周期成分を含むため、フーリエ解析する際に高周波数側のパワースペクトルにしみ出し、本来のパワースペクトルをゆがめます。例えば地震学の場合には[10]、潮汐による変動がスペクトル推定にバイアスをかける事が知られています。これは次に述べるウィンドウ関数でも低減しきれないこともしばしばです。そのためフーリエ解析する際には、まず平均・トレンドを取り除くことが常套手段となります[11]。十分に長い時系列が存在する場合には、全体の時系列に対してハイパス・フィルタをかける事も有効です。

5.3 ウィンドウ関数

不連続な点がある関数をフーリエ変換すると、Gibbs の現象とよばれる現象をおこします。不連続点のみ、正しく推定できるのであれば問題ありませんが、不連続付近の振動が非常に広い周期帯に悪影響を及ぼしてしまいます。

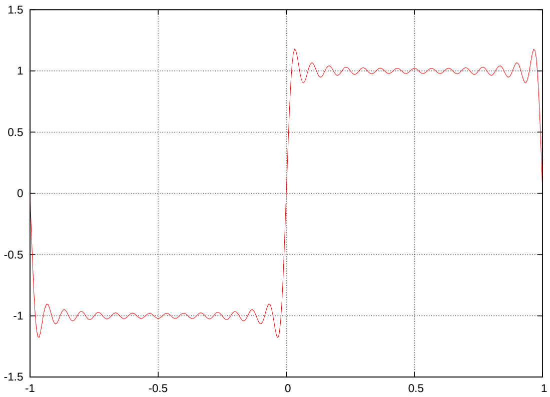


Figure 1: Gibbs の現象。打切り次数 35 次.

DFT では暗に周期性を仮定しているために、いま考えている領域の両端を無理矢理つないでいる事になります。そのために、そこで Gibbs の現象を起してしまいます。この悪影響を避けるために通常考えている領域の両端を緩やかにつぶす (tapering) 必要があります。

実例として、Welch ウィンドウと矩形ウィンドウの例を示します[12]。

$$\text{矩形ウィンドウ} \quad , \quad w(t) = 1(0 < t \leq T) \tag{6}$$

$$\text{Welch ウィンドウ} \quad , \quad w(t) = \sqrt{\frac{15}{8}T}\left[1 - \left(\frac{1 - T/2}{T/2}\right)^2\right] (0 < t \leq T) \tag{7}$$

[10] より具体的には、広帯域地震計で周期 100-1000 秒程度の地動を観測する場合。

[11] トレンドは最小二乗法で回帰直線を計算し、取り除くことが常套手段となっています。

[12] Hanning window $(w(t) = (1 - \cos(2\pi t/T))/2)$ や Hamming window $(w(t) = 0.54 - 0.46\cos(2\pi t/T))$ がよく使われます

そのフーリエ変換は

$$\text{矩形ウィンドウ} \quad , \quad \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \tag{8}$$

$$\text{Welch ウィンドウ} \quad , \quad w(t) = \frac{15}{2}T\left[\frac{1}{(\pi f T)^2}\left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} - \cos(\pi f T)\right)^2\right] \tag{9}$$

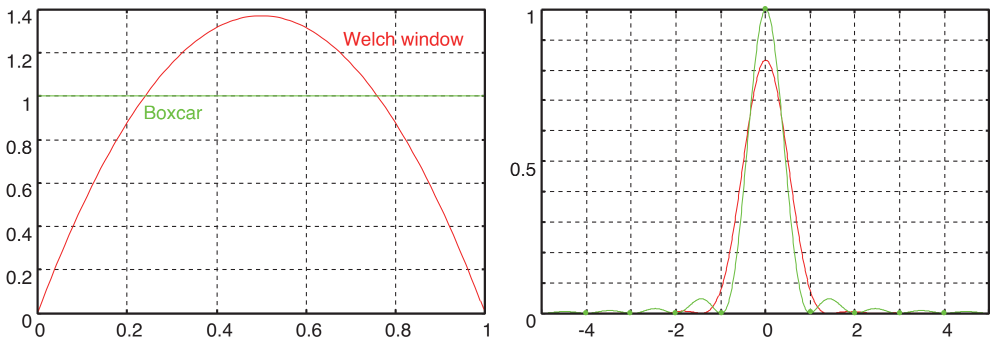


Figure 2: 矩形ウィンドウと Welch ウィンドウの例。ここで $T = 1$ とした。

図を見ると分かるように、矩形ウィンドウではサイドローブ (緑の線) が続きます。ウィンドウ関数をかけると、ピークの幅は広がりますが、サイドローブの影響が少なくなります。長く尾を引くサイドローブが Gibbs の現象と対応しています。

ウィンドウ関数 $w(t)$ をかける事により、シグナルの振幅が変化するために補正する必要があります。統計的に定常な現象を見ているとすると $w(t)u(t)$ の分散は $u(t)$ の $\sqrt{\sum w(t)^2/N}$ 倍となるはず。その効果を補正する必要があります。

$$\overline{u}(k\Delta t) = \sqrt{\frac{T}{\Delta t \sum_{k=0}^{N-1} w_k^2}}\, u(k\Delta t) \tag{10}$$

ここで、時刻 $t_k = \Delta t k$ N はデータの点数です。$T = N\Delta t$ となります。

5.4 離散フーリエ変換 (DFT)

理論上は自己相関関数を計算した後にフーリエ変換を行います。しかし実際にスペクトル解析をする際には、切り出した時系列を離散フーリエ変換 (DFT) します。数値計算上そのほうが高速なためです。

離散フーリエ変換は

$$U_j = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-2\pi i f_j t_k}, \tag{11}$$

と書けます。Δt はサンプリング間隔、周波数 $f_j = \Delta f(k-1)$, 時刻 $t_k = \Delta t k, \Delta f = 1/(\Delta t N)$, N はデータの点数です。$T = N\Delta t$ となります。ナイキスト周波数 $f_n = 1/(2\Delta t)$ より短周期側の現象は正しく表現出来ません。

逆変換は

$$u_k = \frac{1}{N\Delta t}\sum_{j=0}^{N-1} U_j e^{2\pi i f_j t_k}, \tag{12}$$

とかけます。

式の形を見ると分かるように離散フーリエ級数展開しているので、フーリエ変換と違い暗に周期性を仮定することになります。そのためいかに述べるように、ウィンドウ関数をかける (端をつぶすので、tapering とも呼ばれます) など、注意が必要です。

また実際の計算には Fast Fourier Transform (FFT) と呼ばれるアルゴリズムを使います。実装の仕方にもよりますが、点数が 2 のべき乗の時に効率的に計算することができます。FFT は色々な分野で使われているため、多くのライブラリが提供されています (例えば FFTW, FFTPACK 等)。ライブラリによってフーリエ変換の定義 (規格化と exp の符号) が違うので注意しましょう。パワースペクトルを時系列長 T に合わせて規格化する必要もあります。片側スペクトルの場合

$$\Phi(f_j) = \frac{2\langle \bar{U}_j \bar{U}_j^* \rangle}{T}, \tag{13}$$

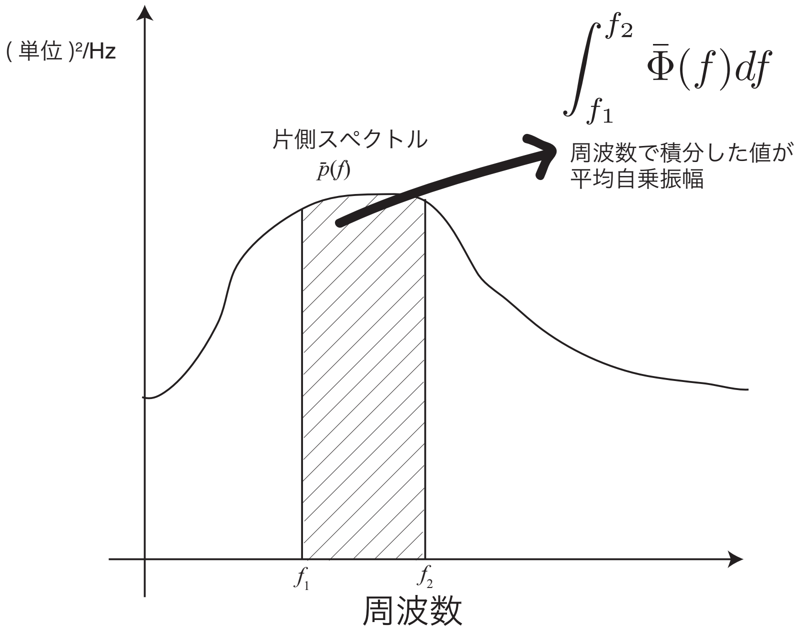
と補正し、切り出した窓の数だけ平均化します。

5.5 定常シグナルに対する解析手順

解析手順

1. 時系列データを細かい時系列に分ける
2. トレンドを除去:長周期成分の除去
3. tapering する:不連続が生じる事を防ぐ
4. 分割した時系列に対して DFT する
5. Window 関数 $w(t)$ の効果の補正. $\overline{U}_j = \sqrt{\frac{T}{\Delta t \sum_i w_i^2}} U_j$
6. 分割した時系列に対してパワースペクトルを計算
7. 推定誤差の低減のためパワースペクトルを平均化する

6 パワースペクトルの読み方



- 片側スペクトルの場合、パワースペクトル ($\bar{p}(f)$) は正の周波数のみで定義される。
- 縦軸・横軸ともにリニアの場合に、面積は平均自乗振幅に対応。
- 対数・対数プロットの場合には、面積と振幅が対応しなくなるので注意が必要[a]。地球物理では観測量がべき分布するために対数プロットすることが多いので特に注意する必要がある。
- 縦軸の単位は (時間領域での単位)^2/Hz となる。

[a]フーリエ変換は微分演算子に対する固有演算子としての意味合いもある。そのため、線形のシステムに対するレスポンスを考える場合 (弾性振動の固有値問題等) に解釈しやすい。

問題 1

$\Phi = 1$ を対数・対数プロットした場合を考えてみよう。面積と平均自乗振幅の対応はどうなるか?

7　白色雑音 (ホワイトノイズ)

定常シグナル一般を理解することは難しいので、ここでは白色雑音に限って考えていきましょう。白色雑音とは、あらゆる周波数成分を等しく含んでいる不規則変動だと定義しよう[13]。そのために $\Phi(f) = const$ となります。

もう少し具体的に考えていきましょう。Figure 3 の左の図を見てください。いま時間間隔 Δt で離散化された時系列 $u(t)$ を考えます。各時刻で、ランダムにサイコロを振り (平均 0 分散 1 の正規分布に従うとします)。ここで自己相関関数 $\phi(\tau)$ を考えてみましょう。

$$\phi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t+\tau)dt, \tag{14}$$

と本章では自己相関関数を定義しました。いま時刻 Δti と Δtj では全く相関がないため

$$\phi(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases} \tag{15}$$

となります。フーリエ変換すると、$\Phi(f) = 1$ となります。パワースペクトル (片側スペクトル) は 2 となります。

7.1　実データで計算

理論的な事は計算できました。では実際に数値データを作り計算してみたらどうなるでしょうか？乱数を使い白色雑音を生成し、フーリエ解析してみましょう。

まずは切り出したウィンドウ 1 つを考えてみましょう。周波数 f でのフーリエスペクトルを考えてみましょう。離散フーリエ変換の定義から

$$U(f) = \Delta t \sum_{k=0}^{N} u(t_k) e^{-i2\pi f t_k}, \tag{16}$$

となります。$u(t_k)$ は乱数なので、$U(f)$ も乱数になります。パワースペクトルは $|U(f)|^2$ で計算出来るため、一定の値を足らずランダムな値を取ります[14]Figre **??** 右のグレーの点が実際に計算した点です。これは少し奇妙です。$\Phi(f) = 1$ となるはずが一回 FFT するだけでは、2 と同じ桁という程度のことしか分かりません。何故でしょうか？

それは自己相関関数が統計的な量なためです。多くのアンサンブルに対して平均を (この場合は切り出した多くのウィンドウ) 取らないと意味のある値になりません。より具体的に言うと推定誤差が 100%となってしまいます。一見とても奇妙ですが、この振る舞いは時系列全体を一度にフーリエ変換しようとすることに起因します。時系列を長くすればするほど周波数解像度 $\Delta f = 1/T$ も細かくなってしまうため、白色雑音の周波数スペクトルはいたるところで不連続となります[15]。

そこで何度も FFT をし平均をとってみましょう。段々と 2 に近づいていくことがわかると思います[16]。このようにパワースペクトルとるはあくまで統計的な

---

[13]太陽光のアナロジーです。一般に白色はあらゆる周波数成分を含む事を、赤色は低周波に富む事、青色は等は周に富むことを意味します。

[14]正確には χ^2 分布に従います。

[15]超関数として取り扱うことは可能で、白色雑音の自己相関関数は Dirac のデルタ関数となり、パワースペクトルはあらゆる周波数成分を等しく含む (定数) となります。

[16]確認ですが、今時間領域で分散 1 の時系列を考えています。Percival の公式からパワースペクトルの積分は 2×0.5 となり一致します。

量なため、十分な数だけ平均化しないと推定誤差が大きくなりすぎてしまいます。例えば N 個のウィンドウを切り出して平均化した場合を考えてみましょう。時系列が正規分布に従う場合推定誤差は $1/\sqrt{N}$ となります。そのように誤差が N にしたがって小さくなっていく様子も、図から見て取れるはずです。

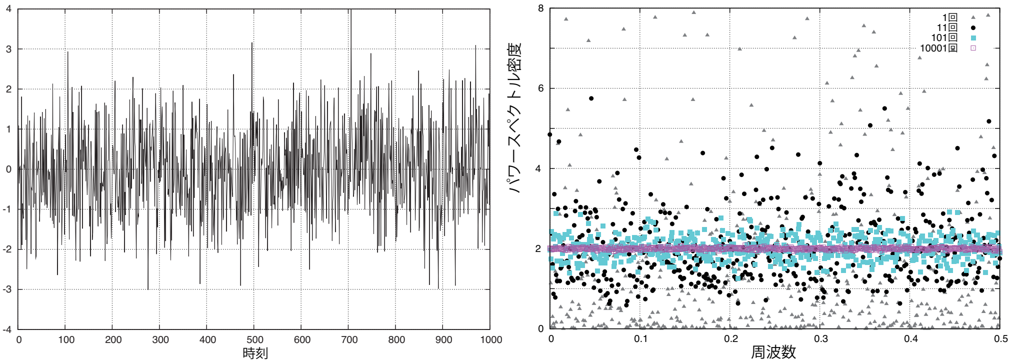


Figure 3: 図左:白色雑音の時系列。図右:スペクトルをとりパワースペクトルを計算した結果。アンサンブル平均をとる数を増やす毎に、推定値は 1 に近づいていく。

問題 2

アナログのデータを離散化する際には、離散化誤差が生じる。ここで時間間隔 Δt で物理量 y を測定している状況を考える。測定量 y を $\Delta y j$ で離散化したとすると (j は整数)、$y - \Delta y j$ だけの離散化誤差が生じる。離散化誤差が $[-\Delta y/2, \Delta y/2]$ の一様乱数で近似できる仮定すると、離散化誤差のパワースペクトルの大きさがどの程度になるか見積もれ。またサンプリング間隔と量子化誤差の大きさについて議論せよ。

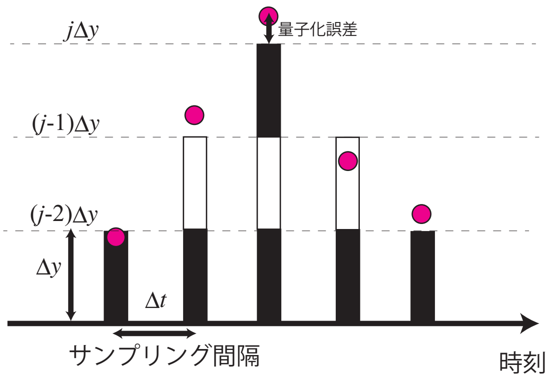


Figure 4: 離散化の模式図。

付録

A　Fourier 変換のまとめ

時系列 $u(t)$ に対し、その Fourier 変換 $\mathcal{F}$ と Fourier 逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ を

Fourier 変換の定義

$$U(f) \equiv \mathcal{F}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i2\pi f}dt, \tag{17}$$

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}(U) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} U(f)e^{i2\pi f}df, \tag{18}$$

$$\text{ただし} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt < \infty \tag{19}$$

と定義する。ここで、U は時系列 u のフーリエ成分を表します。

性質まとめ

- $u(t)$ が実関数ならば $U(f) = U^*(-f)$,
- Parseval の公式: $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(f)^2 df$,
- 畳み込み積分の Fourier 変換: $\mathcal{F}(u * v) = UV$,
- Cross spectrum $\Psi(u, v; f) = \mathcal{F}(\psi) = U^* V$
- Wiener- Khinchin の定理: $\Phi(f) = \mathcal{F}(\phi) = \mid U \mid^2$.

ここで畳み込み積分は

$$u(t) * v(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(t - t')v(t')dt'.$$

と定義し、自己相関関数 ϕ は

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t + \tau)dt.$$

と定義する。

相互相関関数 ψ は

$$\psi(u, v; t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t + \tau)dt.$$

と定義する。

フーリエ変換の符号と規格化 (注意点)

フーリエ変換の exp の肩の符号と規格化には不定性があります。そのために、多くの流儀が入り乱れ混乱を招く原因となります。例えば地震学の分野内に限っても、Quantitative Seismology, 2nd Edition (Aki and Richards, 2002) では $\int e^{i\omega t} dt$ で順変換を定義しますが、Modern global seismology (Dahlen and Tromp, 1998) では $\int e^{-i\omega t} dt$ と定義します。これは、Aki and Richards (2002) では波動の伝播をもとに符号を来見ているためです。そのため、周波数領域での演算に際して、複素共役の取り方が互いに逆となります。時系列解析 (日野, 2010) は良い教科書ですが、ω で記述したパワースペクトルと、f で記述したパワースペクトルでは規格化が違い混乱しがちです。論文などを読む際には、フーリエ変換は自分はどの流儀に則っているかしっかりと把握しましょう。

B　地震計のレスポンスの補正

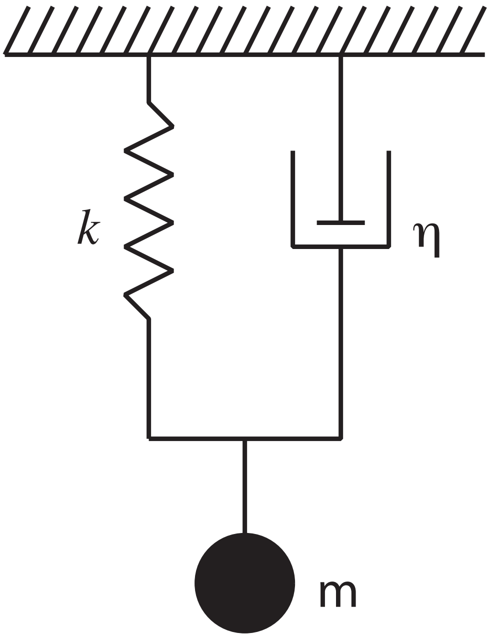


Figure 5: 地震計の概念図

$$m\frac{d^2(x+u)}{dt^2} = -\eta\frac{dx}{dt} - kx(t). \tag{20}$$

Fourier 変換すると

$$\tilde{x}(f) = \frac{\omega^2}{-\omega^2 + 2h\omega_0 i\omega + \omega_0^2} U(f) \tag{21}$$

ここで $\omega_0^2 = K/M$, $h = \eta/(2M\omega_0)$. レスポンスは因果律を満たさなくてはいけないため、z 平面で上半面では解析的でなくてはならない。

pole と zero を使ってレスポンスを表す。ラプラス変換で表現をするため、$s = \omega i$ とすると

例

POLES 4
-.03701 -0.03701
-.03701 +0.03701
-459.9 -236.2
-459.9 +236.2
ZEROS 3
920.5 0.0
CONSTANT -290.22033

$$\tilde{x}(s) = \frac{(s - 920.5)s^2}{(s + 0.03701 + 0.03701i)(s + .03701 - 0.03701i)(s + 459.9 + 236.2i)(s + 459.9i236.2i)} U(s)$$

とかける。左反面にのみ極があるので、このシステムは確かに因果律を満たす。