

学位論文

Theoretical study on arresting mechanism of dynamic earthquake faulting

- A new method of the analysis of spontaneous rupture growth
with geometrical complexity -

地震停止機構の理論的研究

—複雑な形状の断層破壊の新しい計算法を用いて—

東京大学大学院理学系研究科 地球惑星物理学専攻

亀 伸樹

Nobuki Kame

平成9年12月博士（理学）申請

D. Sc. Thesis, the University of Tokyo, 1997

要旨

蓄積した歪みおよび破壊強度分布が均質な線形弾性体中に亀裂があり、破壊成長を始めるぎりぎりの臨界状態にあるとしよう。この状態からいったん動的な破壊が始まってしまうと、破壊成長はただちに高速化し、そのまま伝播し続け永遠に停止しない。これは線形破壊力学に基づく従来の考察であるが、そこでは解析の困難さから暗に直線形状の亀裂が仮定されている。この枠内で破壊成長が止まるためには(1)歪みエネルギーの蓄積していない領域、または、(2)極端に破壊強度の高い領域へ亀裂先端が進展する必要がある。しかし、これら二つの不均質の観点から地震：断層の剪断破壊現象をみても、地殻歪みが十分広範に蓄積されている状況下においてもほとんどの地震は止まっている。また、線形破壊力学の考察によれば亀裂が成長し大きくなればなるほど亀裂先端にはそれだけ強い応力集中が生じるため、動的破壊開始後急激に大きくなる亀裂の破壊成長を止めるには破壊開始時より桁違いに大きい非現実的な程の破壊強度が必要になる。すなわち、従来の力学モデルでは地震断層の破壊成長停止を説明することができなかったのである。

これは従来のモデルには破壊停止にとって本質的な要素が欠けていることを意味する。本論文ではこの破壊成長停止を支配する要素として、複雑な断層破壊形状の形成過程を取り上げる。例えば1943年の鳥取地震の地殻測量による推定断層面は破壊停止端で大きく屈曲している。また、直線形状亀裂の動的進展問題の解析によれば、破壊速度が高速になると亀裂の先端付近の最大剪断応力の向きが亀裂面からずれ始める、すなわち、亀裂は自ら曲がろうとする性質がある。これら非直線的な破壊形状の生成過程はこれまでは数学的困難さからモデル計算できなかった。しかし、亀裂の破壊進展に明らかに影響を与えるこの破壊形状という基本要素をモデルに取り入れられない限り、破壊成長停止の力学機構の理解に至ることはできないと考える。

本論文では亀裂進展の支配要素の一つと考えられる複雑な破壊面形状を取り扱うために(a)将来の破壊経路を予め仮定することなく、且つ、(b)これから進む向きに全く制限のない亀裂の自発的破壊成長を計算する新しい手法を開発した。定式化には亀裂形状を自由にとれる境界積分方程式法(Boundary Integral Equation Method: BIEM)を採用し、2次元P-SV剪断型亀裂を取り扱った。BIEMで数学的に問題となる超特異積分は、将来の破壊経路に自由度を持たせた場合その評価が困難になるが、超関数理論で定義される有限部分の概念を適用することにより解決をはかる。破壊基準として、(i)破壊方向の基準：亀裂先端の最大剪断応力の向きに破壊進展する、(ii)破壊進展の基準：剪断応力値が基準値を越えると破壊進展する、を設けた。

均質な破壊パラメタの条件下で、臨界状態にある亀裂を時刻 $t = 0$ から動的破壊成長を開始させる。破壊規準を満たす方向に次なる新たな離散滑り要素を置くことを繰り返し、破壊形状の時間発展を数値計算により解析した。このような形状自由な剪断型亀裂の自発的破壊計算は世界で初めての試みである。計算開始後、臨界亀裂から始まる動的な破壊成長は、急激に加速され高速に伝播するようになる。そして、この高速破壊伝播の最中に亀裂は自発的に曲がりはじめ、広角に亀裂面の向きを変えた後に進展を停止する結果と

なった。この高速破壊伝播中に起きる剪断型亀裂の自発的停止機構は次のように考えられる。新たな破壊面が生じて剪断応力が解放されることにより放射される波動は最大剪断応力軸を亀裂面からずらす効果があるが、その効果の継続時間はわずかで波動が遠ざかるとただちに最大剪断は静的な最大方向（亀裂面と同じ方向）に戻ってしまう。しかし、破壊速度が高速化すると新たな破壊面が次々に生成され、亀裂先端付近では波動の伝播にともなう応力場が卓越する状態が現れる。この段階では亀裂先端の剪断応力軸が亀裂面方向からずれ、亀裂は自発的に曲がり始める。破壊進展にともなう波動は屈曲以前の直線亀裂の進展方向に沿って卓越しているが、亀裂がこの卓越方向からずれ始めると波動はただちに亀裂先端付近から遠ざかっていく。この応力波動が亀裂先端を通過していく過程で亀裂面はより広角に屈曲を深める。2方向からの圧縮応力場における剪断破壊では亀裂面の角度がある敷居値よりも広角度になると剪断応力を解放する亀裂面上の滑りの向きが反転する。従って、広角に屈曲した後の亀裂面ではもはや破壊が進展しても剪断応力が解放されなくなり破壊成長が自発的に停止する結果となる。本論文の結果は、従来の線形破壊力学の考察とは異なり、均質な破壊パラメタ分布の下では破壊はすぐに止まることがむしろ本性であることを示す。この自発的な破壊停止機構の発動に対して破壊パラメタ分布の不均質性は破壊成長を継続させるためにこそ必要な要素であり、これは従来の考え（破壊の停止には強い破壊パラメタ分布の不均質が必要）とは全く正反対になる。本論文が明らかにしたこの新しい破壊停止機構は、これまでの破壊の概念を改め、地震断層の動的破壊成長停止の動力学を自然に説明するものである。

目次

要旨	i
1 はじめに	1
2 形状自由な亀裂の新しい計算手法	7
2.1 境界積分方程式法	7
2.2 表現定理	8
2.3 任意形状の2次元 P-SV 剪断型亀裂に対する積分方程式	11
2.4 離散化	14
2.5 数値計算手法の精度確認	17
3 モデル	21
3.1 基準応力場と境界条件	21
3.2 初期設定と破壊基準	23
4 形状自由な自発的破壊成長過程	27
4.1 形状自由な自発的破壊成長過程	27
4.2 高速破壊伝播中に起きる剪断型亀裂の自発的停止機構	33
4.3 自発的破壊停止機構の諸性質	37
4.4 自発的停止機構の破壊パラメタ不均質依存性	42
4.5 断層帯構造における自発的破壊成長停止機構	45
4.6 摩擦の存在下で起きる自発的破壊停止機構	49
5 議論	54
5.1 破壊の3つのモード	54
5.2 断層形状の成熟過程と地震活動度	58
6 おわりに	59
参考文献	63
A 超特異積分とその評価法について	68

B 静的平衡問題の解法

72

謝辞

74

表 目 次

3.1	2次元剪断型亀裂の動的破壊問題のまとめ	22
4.1	摩擦を考慮した計算で用いたパラメタ	50

目次

1.1	自発的破壊伝播過程のスナップショット（直線形状亀裂モデル）	5
1.2	1943年鳥取地震の推定断層面	6
2.1	差分法による複雑形状の破壊計算の試み	9
2.2	定式化に用いた亀裂の幾何的配置	10
2.3	離散化したBIEMの模式図	16
2.4	解析解と数値解の比較の比較1：滑り量	19
2.5	解析解と数値解の比較2：剪断応力	20
3.1	モデルの配置図と座標系	24
3.2	フープ応力	26
4.1	自発的破壊伝播過程のスナップショット（分岐モデル）	29
4.2	自発的破壊伝播過程のスナップショット（屈曲モデル）	30
4.3	分解能の異なる計算結果の比較	32
4.4	フープ応力の単位滑り速度応答	34
4.5	剪断応力降下量の方位依存性	36
4.6	破壊先端の時空間分布	38
4.7	検討モデルのパラメタ分布図	39
4.8	理論速度波形	41
4.9	不均質による破壊規模の比較	43
4.10	断層帯の地表地図の例	46
4.11	断層帯の階層構造	47
4.12	既存の弱面に沿って始まる破壊過程のスナップショット	48
4.13	摩擦係数が小さい場合の破壊過程のスナップショット	52
4.14	摩擦係数が大きい場合の破壊過程のスナップショット	53
5.1	破壊の3つのモード	56
5.2	2次元亀裂の自発的破壊停止機構の考察	57
6.1	破壊現象理解へ向けての新たな局面	62

Chapter 1

はじめに

地震学の最も挑戦的な問題に、断層帯の岩石の性質とその地域のテクトニックな応力の研究から、地震の全破壊過程と結果として生じる地震動を予測することがある。この問題を解くためには3つの研究が必要となる。1つは断層帯の諸性質、すなわち、(i) 断層帯内部に存在する亀裂の分布状態、および、(ii) 静摩擦、動摩擦、破壊強度、 D_c など破壊面の構成則をなす物理量の性質、大きさ、空間分布を知ることである。2つ目は、断層帯に働くテクトニックな応力場を知ることである。3つ目は、テクトニックな応力場と断層帯物質の性質のみに基づき、地震の始まりから終わりまでの全ての破壊現象を破壊の力学から予測することである。本論文ではこの3つ目の実現を目指して、断層の自発的な破壊成長の問題（応力場と断層帯の性質が全て与えられている状況下で破壊成長が進むか否かを破壊の力学に基づき考える）に取り組む。

従来の自発的な破壊問題の研究においては断層を一枚の平面としてモデル化することが普通であった。この枠内では破壊成長が進むか否かの支配要素としてモデル平面上で二つの破壊パラメタの不均質を考えてきた。一つは応力解放の不均質であり、もう一つは破壊強度の不均質である。例えば、応力降下量（歪み解放量）の大きく大振幅の地震波を放射する領域はアスペリティ（Lay and Kanamori 1980, Ruff and Kanamori 1983）、破壊強度が高く破壊成長の停止に寄与する領域はバリアー（Das and Aki 1977b）等と名付けられ破壊過程の解釈にしばしば利用されている。応力降下量と破壊強度の不均質は最も基本的なモデルパラメタの一つである。従って、これまで断層の平面モデル上に予め破壊パラメタ（バリアー、アスペリティ、動摩擦、構成則、etc..）を不均質に分布させることによりモデル平面上で破壊が自発的にどう成長するか、また、それによりどのような地震波を放射するかが研究されてきた（Das and Aki 1977b, Miyatake 1980a 1980b 1992a, Day 1982, Shibasaki and Matsu'ura 1992 1995）。しかし、これらの自発的な破壊成長の研究を通じてわかったことは破壊を止めることが大変困難だということである。

破壊パラメタが一様均質に分布している線形弾性体中に亀裂があり、破壊成長を始めるぎりぎりの臨界状態にあるとしよう。この状態からいったん動的な破壊が始ると、破壊成長は急激に加速され飽和速度に達しそのまま高速で伝播し続ける。すなわち一度始まった破壊成長は永遠に停止しない（図 1.1 参照）。平面

断層モデルの枠内で破壊成長の停止を考える限りは (1) 歪みエネルギーの蓄積していない領域、または、(2) 極端に破壊強度の高い領域へ亀裂先端が進展する必要がある。しかし、これら二つの不均質の観点から地震：断層の剪断破壊現象をみてみると、地殻歪みが十分広範に蓄積されている状況下においてもほとんどの地震は止まっている。また、線形破壊力学の考察によれば亀裂が成長し大きくなればなるほど亀裂先端にはそれだけ強い応力集中が生じるため、動的破壊開始後急激に大きくなる亀裂の破壊成長を止めるには破壊開始時より桁違いに大きい破壊基準が必要になる。Husseini et al. (1975) は 2 次元 SH 型亀裂問題において一様応力降下量の下、いったん破壊の成長が始まった後の亀裂の自発的な進展を止める為に必要な破壊エネルギー基準値を求めた。彼らの概算によると、均質な応力降下量 (10 bar) の下、1 km 成長した亀裂の破壊停止には開始時より 1000 倍大きい破壊基準値が必要になる。しかも、これは下限の見積もりであり、破壊が大きく成長するほど停止には更に桁で大きい基準値が更に必要になる。しかし、このような極端な破壊強度領域の存在は現実的ではない。このように、直線形状の破壊は容易には止まらない、すなわち、従来の力学モデルでは未だに地震断層の破壊成長停止を説明することができないのである。

破壊停止という地震における最も基本的な現象の動力学が解明されずに残っていることは、平面モデルと破壊パラメタの不均質の考え方が破壊の本質すべてでは無いことを示唆する。また、破壊パラメタの不均質とってその指し示すものは様々である。例えば、地震波形の逆解析から求められた大地震の断層面上の破壊パラメタ不均質 (Quin 1990, Miyatake 1992b, Ide and Takeo 1996 1997, Horikawa 1997) は、実際は平面的でない断層帯で起きる破壊現象をモデル平面上のパラメタへ投影して捉えたものであり (Matsu'ura et al. 1992, Cooke 1997, Ide and Takeo 1997)、常には断層帯でおきる破壊現象の物理的実体そのものに対応しないことに注意が必要である。その実体は依然として曖昧な部分が残し、特に自発的破壊問題においては物理的実体としてのパラメタ不均質と巨視的に不均質として振る舞う別の要素との区別が大切である。

それでは、従来取り入れられてこなかった地震破壊の本質を担う要素は何なのであろうか。近年、その候補として注目をあびているのが破壊要素間の相互作用である。Carlson and Langer (1989) らは、Burridge and Knopoff (1967) らの数個のバネブロックを一行に並べた地震断層のモデル (BK-model) を多数のブロックが並ぶように拡張し地震活動の数値計算を行った。隣り合う個々のブロックが相互作用する総体として系全体がどう振る舞うかを調べたのである。彼らは、そのモデルには全く均質なパラメタしかないにも関わらず初期条件のわずかの不均質だけで大地震に相当する滑りが起きる毎に滑りの不均質を自ら再生産しながら様々な規模の滑りが発生することを示した。そして、発生する地震規模頻度分布はべき乗則 (Gutenberg and Richter 1944) に従うのである。これは破壊の複雑な現象が、破壊強度不均質が無い状況下においてもなお破壊要素間相互作用により生じる可能性を示唆している (BK-model がそのまま地震断層のモデルとして妥当であるかについて議論はある)。この以後、地震断層を破壊要素間相互作用系としてモデル化する試みがなされ、地震破壊の持つ複雑さの理解に新たな局面を生み出している (Yamashita and

Knopoff 1992, Yamashita and Fukuyama 1996)。

自発的破壊の分野では、断層帯の地学的構造に注目し、これを複数の破壊要素からなる相互作用系としてモデル化する試みが始まっている。例えば、断層帯に存在する巨視的な2、3の断層セグメントに注目し、それら破壊要素間に働く力学的相互作用が動的破壊過程においてバリアーやアスペリティのように振る舞うことが計算により示された (Harris and Day 1993, Yamashita and Umeda 1994)。これら2、3の破壊要素間の相互作用を扱う研究を経て、断層帯を大規模な相互作用系としたモデル計算に至る (Kame and Yamashita 1997)。Kame and Yamashita (1997) は断層帯内部における大地震直前の亀裂密度が高い状態を多数の亀裂の集合体としてモデル化し、それら多数の亀裂間相互作用の働くなかで始まる動的な初期破壊過程の計算を行った。その結果、大地震に特有の初期フェーズの放射機構、震央近傍での強震動発生機構、大地震前の地震活動の静穏化のメカニズム等の広範囲にわたる地震現象を大地震直前の亀裂分布に特有の卓越する力学相互作用モードの観点から統一的に説明した。しかし、破壊要素間相互作用を考えてもなお、我々は破壊の停止機構について定量的に説明のつく力学機構を持たないままである。それでも地震は止まっている。

本論文では破壊成長の停止を支配する要素として、複雑な破壊面形状の形成過程を取り上げる。破壊形状の複雑さの解析は亀裂問題において最も基本的な問題の一つであるが、計算手法がないために最後まで残されたままになっていた。これは亀裂問題の持つ数学的な取り扱いの難しさを反映している。亀裂問題は弾性体の偏微分方程式 (運動方程式) を混合境界条件の下で解く問題になり、亀裂自身がその境界として表現される。それゆえに境界面が直線形状からはずれるとその解法は極端に困難になる。非直線的な破壊面の例として1943年の鳥取地震の断層面を示す (図 1.2 参照)。地殻測量による推定断層面は破壊停止端で大きく屈曲している (Kanamori 1972)。このような破壊形状は、従来の自発的破壊の問題に全く取り入れられていない。また、ある速度で破壊伝播する直線亀裂問題の解析解によれば、高速破壊進展時には亀裂先端の最大剪断応力の働く面が亀裂面からずれることが指摘されてきた (Yoffe 1951, Freund 1990)。実際、数値計算により直線形状亀裂の自発的問題を解き、破壊速度が加速していく亀裂先端の剪断応力の方位分布を見ると亀裂面から次第にずれていくのが分かる (図 1.1 参照)。このように亀裂は自ら曲がろうとする性質があるのに関わらず、従来は複雑形状の破壊面の動的破壊は解析することが数学的に不可能であった。ゆえに曲がろうとする亀裂を不本意ながらまっすぐ破壊させるしかなかった。破壊進展の本性を表現できていない以上、これまでの直線形状の断層破壊モデルで破壊停止の本質的な機構の理解に至ることができなかったのは当然であろう。

そこで本論文では、**亀裂形状を完全自由にした場合に自発的な破壊進展の経路はどうか**、という最も基本的な問題に取り組む。変形は2次元面内型を仮定し、破壊モードIIのP-SV剪断型亀裂を考える。この問題は従来の計算手法では解けないため、本論文において新しく (a) 将来の破壊経路を予め仮定する

ことなく、且つ、(b) これから進む向きに全く制限のない動的亀裂進展の計算手法を開発した。定式化には亀裂形状を自由にとれる境界積分方程式法 (Boundary Integral Equation Method: BIEM) を採用した。BIEM で数学的に問題となる超特異積分は、将来の破壊経路に自由度を持たせた場合その評価が困難になるが、超関数理論で定義される有限部分の概念を適用することにより解決をはかる。第 2 章でこの新手法開発について述べる。

第 3 章で解析に用いるモデルと境界条件について述べる。一様に封圧がかかる無限弾性体中に動的破壊開始直前の静的平衡状態にある臨界亀裂を用意し、この臨界亀裂の先端から破壊を開始させその後の破壊成長を解析する。破壊基準として (i) 破壊方向の基準: 最大剪断応力の向きに破壊進展する、(ii) 破壊進展の基準: 亀裂先端の剪断応力値が基準応力値を越えると破壊進展する、を採用する。破壊規準を満たす方向に次なる新たな離散滑り要素を置くことを繰り返し、破壊成長の時間発展を数値計算により解析する。このような形状自由な剪断型亀裂の自発的破壊計算は世界で初めての試みである。

第 4 章では破壊シミュレーションの結果を記す。従来の形状固定の自発的破壊と全く異なり、形状自由になると完全均質な破壊パラメタ分布の下でも破壊は自発的に曲がりそして停止する結果となった。また、この高速破壊伝播中に起きる剪断型亀裂の自発的な破壊成長の停止をもたらす動力学について考察する。

第 5 章では、本論文で直接解析を行ってきた 2 次元 P-SV 剪断型亀裂 (破壊モード II) の自発的停止の解析で得た知見を用いて、計算を行わなかった残りの 2 つの破壊モードに対して破壊が自発的に停止するかについてその可能性について検討する。その結果、モード III の剪断型亀裂は自発的に破壊停止する可能性が残っているが、モード I の引っ張り型亀裂の場合は歪みと破壊強度が完全に均質である限り自発的に破壊停止する可能性がないことが示される。また、実際の地震断層帯の累積滑り量に伴う幾何的構造の特徴の変化に対して、個々の地震断層の自発的破壊停止過程がつくりだす複雑な破壊面形状の観点から説明を試みる。

地震断層の破壊モデルに残された最後の要素、複雑な破壊形状が計算が可能になったことにより、破壊成長停止の動力学が明らかになった。地震の破壊成長停止のメカニズムを手にしたことにより、いったん始まった破壊がどこまで成長できるかという問題設定が可能になる。そこで、第 6 章では強度不均質と破壊要素間相互作用による実際の破壊形状複雑化の局面について指摘し、それを踏まえ現実の断層に対して (i) 破壊の規模予測と (ii) 強震動の予測を実現するための手順について考察する。本論文の研究成果はこれら二つの目標達成への重要な第一歩として位置づけられるであろう。

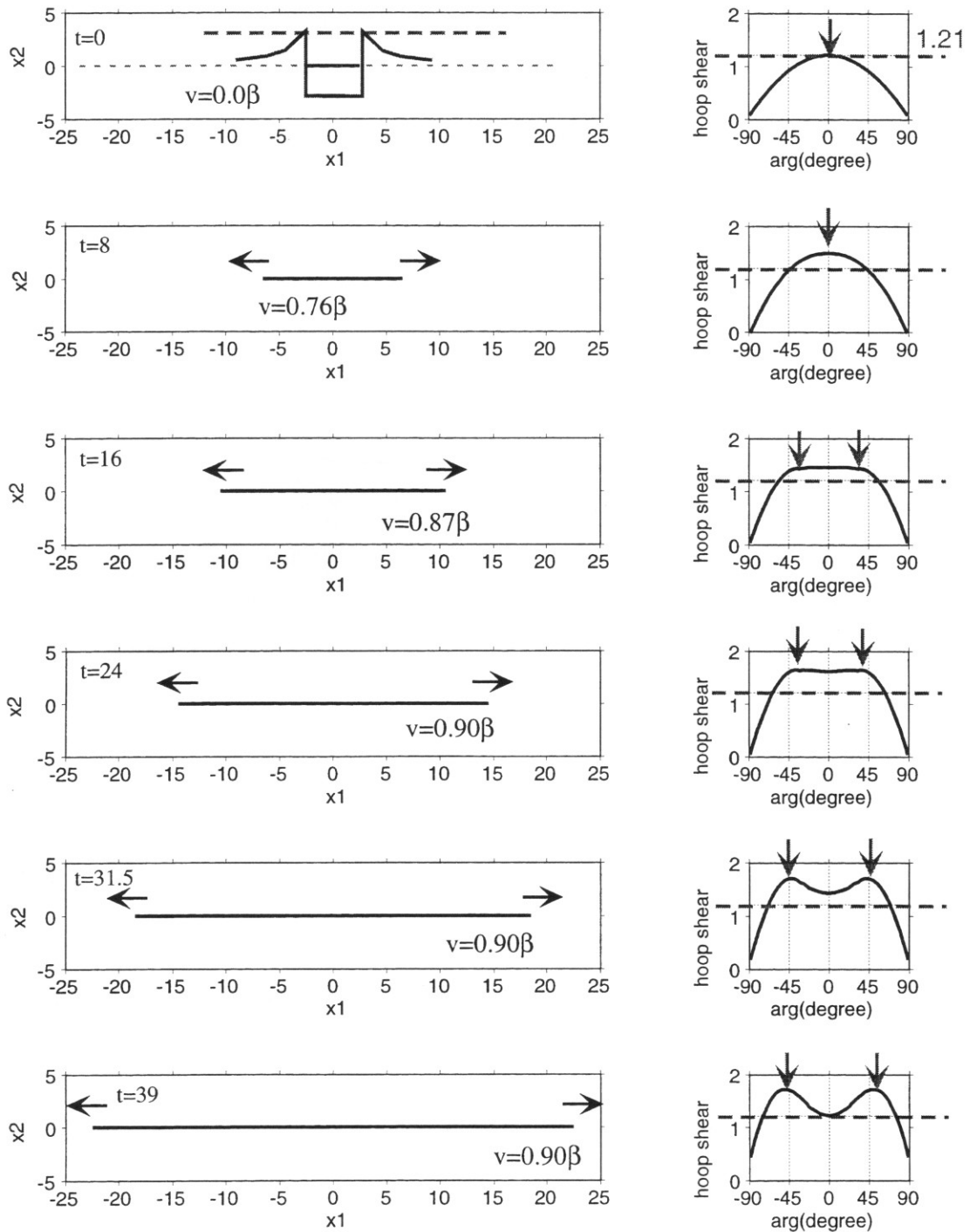


図 1.1: 直線形状亀裂の自発的破壊伝播過程のスナップショット。臨界亀裂長 $l_0 = 5$ 、破壊基準値 $T_t^c = 1.21$ で破壊を開始させた (モデルパラメタの説明は第 3 章で述べる)。破壊はただちに加速し高速化する。図の右列は各時刻の亀裂先端の剪断応力の方位分布で \downarrow は最大剪断応力をとる角度を示す。 $t = 16$ より後、亀裂面先端での最大剪断応力の方向が亀裂面からずれる。破壊は飽和速度に達した後 ($t = 24$)、永遠に伝播し続ける。

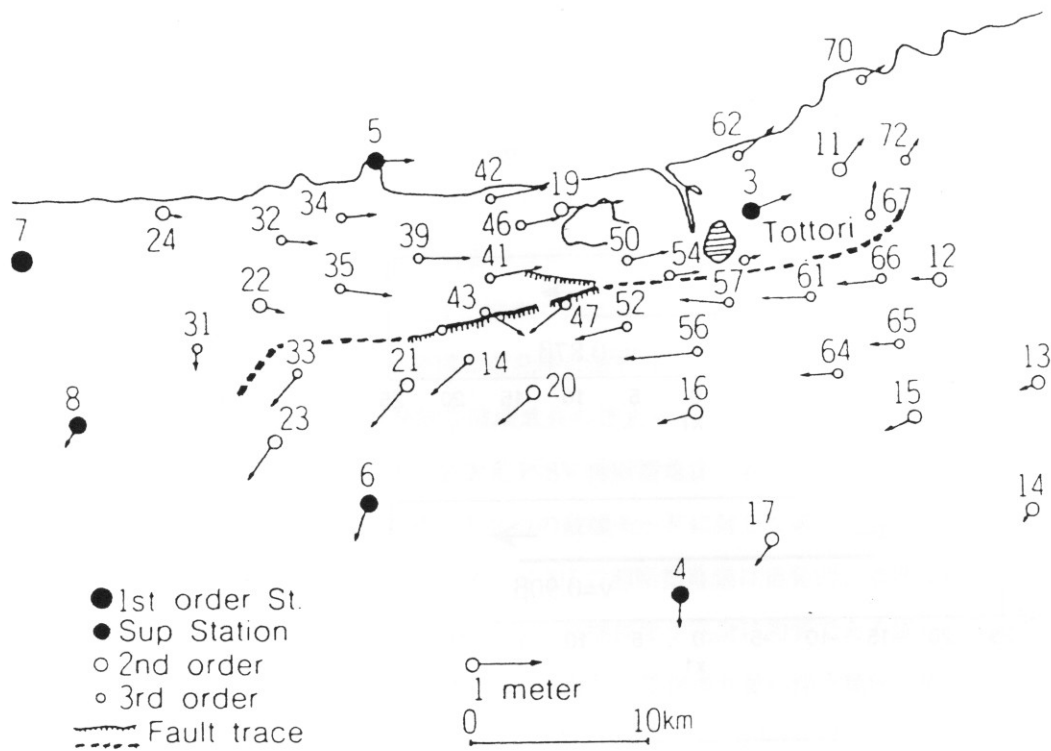


図 1.2: 1943 年の鳥取地震の地殻測量による推定断層面。断層端で大きく屈曲している (Kanamori 1972)。

Chapter 2

形状自由な亀裂の新しい計算手法

本章では、破壊進展を支配する要因でありながら従来は計算困難であった複雑形状の亀裂進展問題の解法について考えていく。亀裂問題は弾性体の偏微分方程式（運動方程式）を混合境界条件の下で解く問題になるために、亀裂（境界条件を課す面）が直線形状（座標軸に沿う）からずれた場合その解法は極端に難しくなる。真の自発的破壊過程を実現するためには（a）破壊の経路を予め決める必要がないことと（b）破壊方向に全く制限のないことの2つの要請を満足する計算手法が必要である。本章ではこの2つの要請に応える新計算手法の開発について述べる。

2.1 境界積分方程式法

本論文では境界積分方程式法（Boundary Integral Equation Method, BIEM）を採用する。BIEMは、表現定理から導かれる亀裂面上の滑りと応力の間になり立つ解析的な積分方程式を用いた混合境界値問題の解法であり任意形状の亀裂に対して定式化できる利点がある。しかしながら、BIEMによる亀裂問題の解法には発散積分を評価しなくてはならないという数学的な困難さがつきまとう。亀裂が直線形状の場合、この発散積分の評価法は過去の研究により確立されている。その一つの方法は正規化法（regularization method）であり、積分核の持つ積分不可能な超特異性を部分積分や積分変換を利用して積分可能な弱い特異性まで下げ、積分値を評価するものである。従来のBIEMによる亀裂進展問題の解法には正規化法により発散積分の評価が成されてきた（Cochard and Madariaga 1994, Fukuyama and Madariaga 1995, Perrin et. al. 1995）。しかし、正規化法では亀裂形状が座標軸に沿わない場合にこの発散積分の評価が極端に困難になる。破壊経路が既知の場合の任意形状の亀裂に対して正規化法を適用した研究はあるが（Tada 1995, Tada and Yamashita 1997）、将来の破壊経路に自由度を持たせる本論文の問題設定に対して有用ではない。そこで本論文は、超関数理論で定義される発散積分の有限部分の概念¹（the finite part of divergent integrals）を

¹従来は、工学材料中の亀裂による散乱波の計算という亀裂形状が時間発展しない問題で用いられてきた（Hirose and Achenbach 1988 1989 1993, Hirose 1994）。

任意方向に亀裂が進展する問題に適用して解決をはかる (Appendix A 参照)。

亀裂進展問題の主要な解法の一つに差分法 (Finite Difference Method, FDM) がある。差分法による複雑形状の亀裂の計算には、破壊面の傾く角度に制約が無い替りに破壊経路を予め決める必要のある方法 (Inoue and Miyatake 1995) や形状未知のまま破壊計算を始めることが出来るが破壊進展方向が限定される方法 (Xu and Needleman 1994) がある² (図 2.1 参照)。しかし、(a) 経路未知かつ (b) 方向自由の両方を同時に満たす計算手法はない。本論文で新しく開発した BIEM による亀裂の自発的破壊進展の計算方法は (a)、(b) を同時に満たすことができる世界で初めてのものである。

2.2 表現定理

境界積分方程式 (Boundary Integral Equation, BIE) の導出は表現定理から出発する。表現定理により、媒質中の任意位置の動的弾性変位場は媒質中に存在する亀裂面上の滑りを用いて表される。静的過去 ($t \leq 0$ で亀裂に滑りが無く、全媒質が静止している) を持ち亀裂面で応力が連続な場合、表現定理は

$$\begin{aligned} u_l(\vec{x}, t) &= \int_{\Gamma} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Delta u_i(\xi, \tau) c_{ijpq} n_j(\xi) \frac{\partial}{\partial y_q} G_{lp}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}(\xi), 0) \\ &= - \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta u_i(\xi, \tau) c_{ijpq} n_j(\xi) \frac{\partial}{\partial x_q} G_{lp}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}(\xi), 0), \end{aligned} \quad (2.1)$$

となる (例えば Aki and Richards 1980, Section 3.1)。ここで、 $u_l(\vec{x}, t)$ は位置 \vec{x} 時刻 t における l 方向の変位成分、 Γ は亀裂面、 ξ は亀裂面 Γ に沿う弧長、 $\Delta u_i(\xi, \tau)$ は亀裂面上の位置 ξ 時刻 τ における i 方向の滑り成分、 c_{ijpq} は弾性定数、 $\vec{n}(\xi)$ は亀裂面上の位置 ξ での単位法線ベクトル (ξ が増加する方向の左手にとる)、 $\vec{y}(\xi)$ は亀裂面上の位置 ξ の位置ベクトル、 $G_{lp}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}, 0)$ は変位グリーンテンソルで p 方向の単位力が位置 \vec{y} 時刻 0 において作用したときの位置 \vec{x} 時刻 $t - \tau$ における l 方向の変位を表す。また、引数 $\vec{x} - \vec{y}$ を持つ関数に対して成り立つ微分演算子の関係式

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (2.2)$$

を利用してグリーンテンソルの微分を \vec{y} (震源座標) から \vec{x} (観測点座標) へ変換した。なお、上式には和の規約を用いている。本論文で用いる亀裂の幾何的配置と表記を図 2.2 に示す。

フックの法則により変位場 (歪場) と応力場を接続すると、亀裂面上の滑りによる応力場の表現

$$\begin{aligned} \sigma_{kl}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2} c_{klrs} \left(\frac{\partial u_s}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_s} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_q} \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta u_i(\xi, \tau) c_{ijpq} n_j(\xi) \Sigma_{klp}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}(\xi), 0) \\ &= - \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta u_i(\xi, \tau) c_{ijpq} n_j(\xi) \frac{\partial}{\partial x_q} \Sigma_{klp}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}(\xi), 0), \end{aligned} \quad (2.3)$$

²Xu 等の扱ったのは材料の引張破壊であり剪断破壊の場合は境界条件が十分に表現できないという問題点がある。

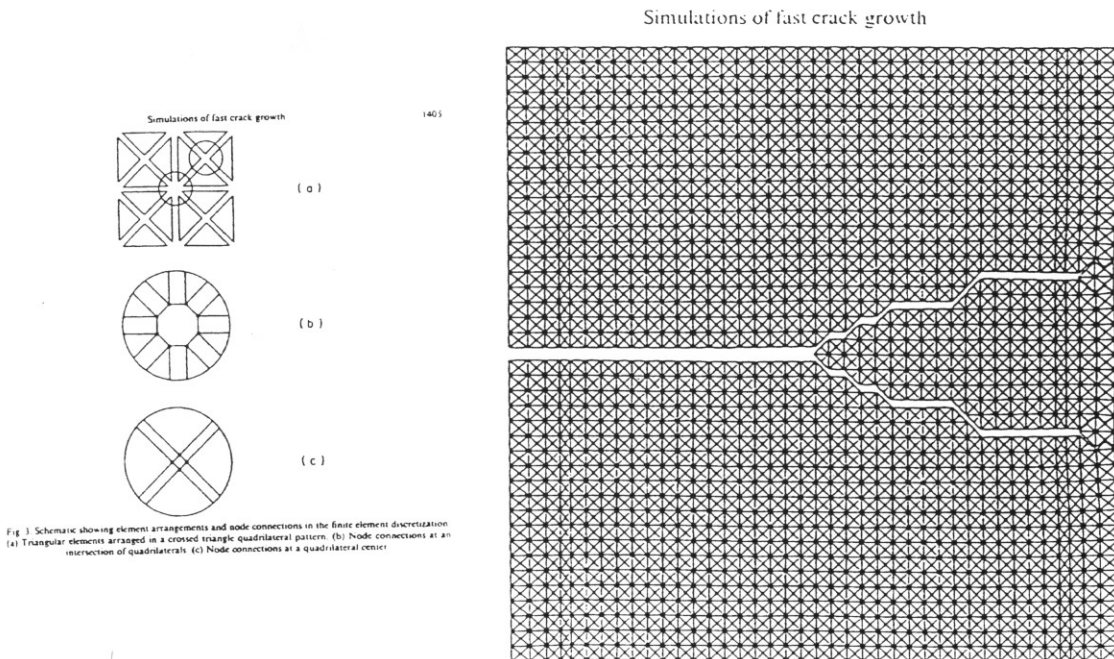
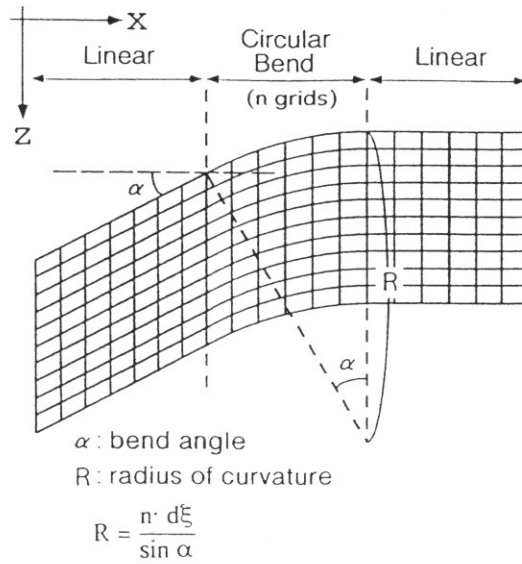


図 2.1: 差分法による複雑形状の破壊計算の試み。上: Inoue and Miyatake (1995)。破壊面形状に沿う Curved Grid を用いる。破壊面の屈曲角度は自由に取れる。下: Xu and Needleman (1994)。突然の引っ張りによる材料開口破壊の計算。破壊形状を決めずに計算できるが破壊進展は離散的な方向 ($0, \pm 45$ 度) に限定される。

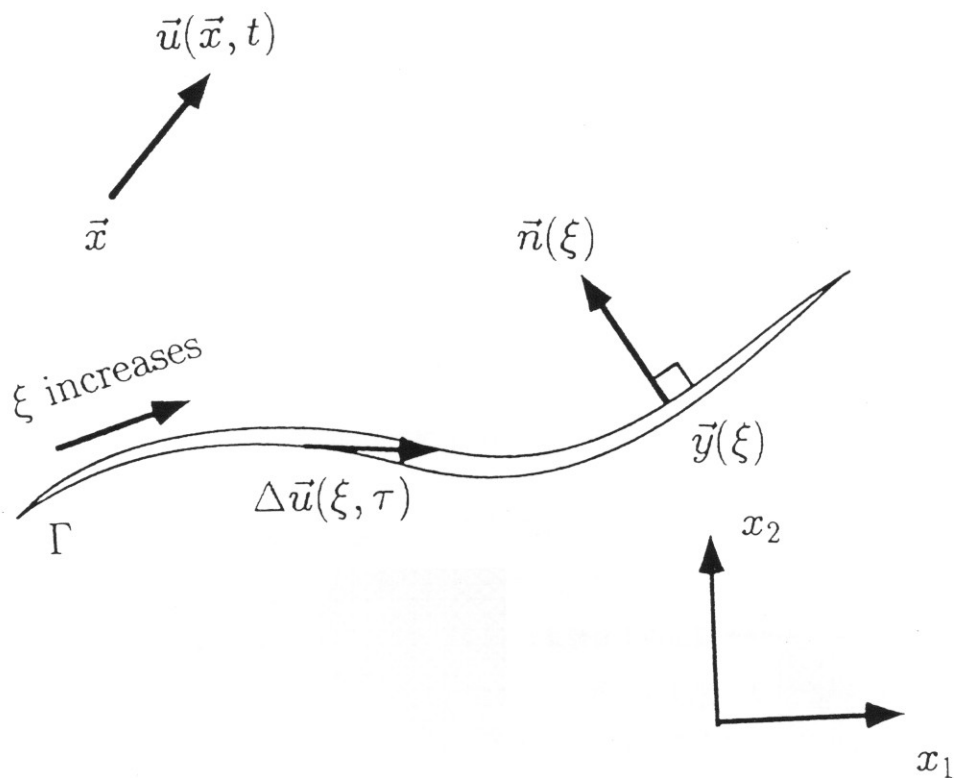


図 2.2: 定式化に用いた亀裂の幾何的配置図。 $\vec{u}(\vec{x}, t)$ は位置 \vec{x} 、時刻 t における変位を表す。 Γ は亀裂面、 ξ は亀裂面 Γ に沿う弧長、 $\Delta\vec{u}(\xi, \tau)$ は亀裂面上の弧長 ξ 、時刻 τ における滑り量を指す。 $\vec{n}(\xi)$ は弧長 ξ の位置における亀裂面の単位法線ベクトルであり、 ξ が増加する向きの左手方向にとる。 $\vec{y}(\xi)$ は亀裂面上弧長 ξ の位置ベクトルである。

を得る。ここで、 $\sigma_{kl}(\vec{x}, t)$ は位置 \vec{x} 時刻 t での応力の kl 成分であり、

$$\Sigma_{klp}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}, 0) \equiv c_{klrs} \frac{\partial}{\partial x_s} G_{rp}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}, 0) \quad (2.4)$$

は応力グリーンテンソルである。 $\Sigma_{klp}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}, 0)$ は、位置 \vec{y} 時刻 0 での p 方向の単位力によって生じる位置 \vec{x} 時刻 $t - \tau$ での kl 成分の応力を表す。本来は積分の外側からかかるべき観測点座標に関する微分演算子

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{\partial}{\partial x_s} \right) \text{ or } \frac{\partial}{\partial x_q} \quad (2.5)$$

が積分の内側に入ることに注意されたい。この微分演算と積分演算の順序交換が積分核の持つ弱い特異性を超特異性にまで強め、積分値が発散するという問題をもたらす。

静的な問題の場合には時間を含まない形で同様に、

$$u_l(\vec{x}) = - \int_{\Gamma} d\xi \Delta u_i(\xi) c_{ijpq} n_j(\xi) \frac{\partial}{\partial x_q} G_{lp}(\vec{x}; \vec{y}(\xi)) \quad (2.6)$$

$$\sigma_{kl}(\vec{x}) = - \int_{\Gamma} d\xi \Delta u_i(\xi) c_{ijpq} n_j(\xi) \frac{\partial}{\partial x_q} \Sigma_{klp}(\vec{x}; \vec{y}(\xi)), \quad (2.7)$$

と変位場と応力場がそれぞれ表される。この場合も、動的な問題と同様に、積分微分演算の順序交換を行った。

2.3 任意形状の 2 次元 P-SV 剪断型亀裂に対する積分方程式

本章では無限均質等方弾性体媒質における任意形状の 2 次元 P-SV 剪断型亀裂に対する積分方程式の表現を Tada (1995), Tada and Yamashita (1997) にならひ書き下す。弾性場の物理量が第 3 の座標軸に独立になるように座標系 $x_1 x_2$ を取る。P-SV 剪断型亀裂面に沿う右ずれ剪断滑りを Δu_t と表すと座標軸に沿う滑り成分はそれぞれ、

$$\begin{cases} \Delta u_1(\xi, \tau) = n_2(\xi) \Delta u_t(\xi, \tau) \\ \Delta u_2(\xi, \tau) = -n_1(\xi) \Delta u_t(\xi, \tau) \end{cases}, \quad (2.8)$$

と表される。式 2.8 を用いて変位場 2.1 を表すと

$$\begin{aligned} u_1(\vec{x}, t) &= - \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \left\{ [\Delta u_1(\xi, \tau)(\lambda + 2\mu)n_1(\xi) + \Delta u_2(\xi, \tau)\lambda n_2(\xi)] \frac{\partial}{\partial x_1} G_{11} + \right. \\ &\quad \left. + [\Delta u_1(\xi, \tau)\lambda n_1(\xi) + \Delta u_2(\xi, \tau)(\lambda + 2\mu)n_2(\xi)] \frac{\partial}{\partial x_2} G_{12} + \right. \\ &\quad \left. + (\Delta u_1(\xi, \tau)\mu n_2(\xi) + \Delta u_2(\xi, \tau)\mu n_1(\xi)) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} G_{11} + \frac{\partial}{\partial x_1} G_{12} \right) \right\} \\ &= - \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta u_t(\xi, \tau) \mu \left[2n_1(\xi)n_2(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} G_{11} - \frac{\partial}{\partial x_2} G_{12} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} G_{11} + \frac{\partial}{\partial x_1} G_{12} \right) \right] \\ &= - \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta \dot{u}_t(\xi, \tau) \mu \left[2n_1(\xi)n_2(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} G_{h11} - \frac{\partial}{\partial x_2} G_{h12} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ (n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} Gh_{11} + \frac{\partial}{\partial x_1} Gh_{12} \right) \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} u_2(\vec{x}, t) = & - \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta \dot{u}_t(\xi, \tau) \mu \left[2n_1(\xi)n_2(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} Gh_{21} - \frac{\partial}{\partial x_2} Gh_{22} \right) + \right. \\ & \left. + (n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} Gh_{21} + \frac{\partial}{\partial x_1} Gh_{22} \right) \right], \quad (2.10) \end{aligned}$$

となる。ここで、右辺の積分において変数 τ で部分積分を行い滑り $u_t(\xi, \tau)$ から滑り速度 $\dot{u}_t(\xi, \tau)$ への変換を行った。これに伴い、積分核に含まれるグリーンテンソル $G(\tau)$ も $Gh(\tau) \equiv \int_0^\tau G(t)dt$: グリーンテンソルの一階時間積分関数へ変換される。物理的には、入力外力の時間関数がインパルス型の場合の応答が G 、ステップ型の応答が Gh に対応する。同様に応力場 2.3 は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{11}(\vec{x}, t) - \sigma_{22}(\vec{x}, t)) = & -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta u_t(\xi, \tau) \mu \times \\ & \times \left[(n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \Sigma_{111} + \frac{\partial}{\partial x_1} \Sigma_{112} - \frac{\partial}{\partial x_2} \Sigma_{221} - \frac{\partial}{\partial x_1} \Sigma_{222} \right) + \right. \\ & \left. + 2n_1(\xi)n_2(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Sigma_{111} - \frac{\partial}{\partial x_2} \Sigma_{112} - \frac{\partial}{\partial x_1} \Sigma_{221} + \frac{\partial}{\partial x_2} \Sigma_{222} \right) \right] \\ = & - \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta u_t(\xi, \tau) \mu^2 \times \\ & \times \left\{ (n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (G_{11} - G_{22}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) G_{12} \right] + \right. \\ & \left. + 2n_1(\xi)n_2(\xi) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} G_{11} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} G_{22} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} G_{12} \right) \right\} \\ = & - \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta \dot{u}_t(\xi, \tau) \mu^2 \times \\ & \times \left\{ (n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (Gh_{11} - Gh_{22}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) Gh_{12} \right] + \right. \\ & \left. + 2n_1(\xi)n_2(\xi) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} Gh_{11} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} Gh_{22} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} Gh_{12} \right) \right\} \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{11}(\vec{x}, t) + \sigma_{22}(\vec{x}, t)) = & - \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta \dot{u}_t(\xi, \tau) \mu(\lambda + \mu) \times \\ & \times \left\{ (n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (Gh_{11} + Gh_{22}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) Gh_{12} \right] + \right. \\ & \left. + 2n_1(\xi)n_2(\xi) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} Gh_{11} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} Gh_{22} \right) \right\} \quad (2.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(\vec{x}, t) = & - \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta \dot{u}_t(\xi, \tau) \mu^2 \times \\ & \times \left\{ (n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} Gh_{11} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} Gh_{22} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} Gh_{12} \right) + \right. \\ & \left. + 2n_1(\xi)n_2(\xi) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (Gh_{11} - Gh_{22}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) Gh_{12} \right] \right\} \quad (2.13) \end{aligned}$$

となる。ここで、 λ と μ は Lamé の定数であり、また 同値式

$$G_{12} = G_{21} \quad (2.14)$$

を利用した。本論文で用いる事はないが、残りのゼロでない応力成分 σ_{33} は他の成分と簡単な式

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2(\alpha^2 - \beta^2)}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.15)$$

で関係付けられる。 α 、 β はそれぞれ P 波速度、S 波速度を示す。

応力評価点を亀裂面上に近づける極限操作 $\vec{x} \rightarrow \vec{y}(s)$ を行くと、亀裂面上の弧長 s 時刻 t における剪断応力 $T_t(s, t)$ の表現を得る。

$$T_t(s, t) = 2n_1(s)n_2(s)\frac{1}{2}(\sigma_{11}(\vec{y}(s), t) - \sigma_{22}(\vec{y}(s), t)) + (n_2^2(s) - n_1^2(s))\sigma_{12}(\vec{y}(s), t). \quad (2.16)$$

これが、亀裂面上の滑りと応力との間に成り立つ境界積分方程式である。同様にして、亀裂面上の弧長 s 時刻 t における垂直応力 $T_n(s, t)$ は

$$\begin{aligned} T_n(s, t) &= \frac{1}{2}(\sigma_{11}(\vec{y}(s), t) + \sigma_{22}(\vec{y}(s), t)) - \\ &\quad - (n_2^2(s) - n_1^2(s))\frac{1}{2}(\sigma_{11}(\vec{y}(s), t) - \sigma_{22}(\vec{y}(s), t)) + 2n_1(s)n_2(s)\sigma_{12}(\vec{y}(s), t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる。

本論文で用いる 2 次元面内変形に対するグリーンテンソルの具体的表現は

$$\begin{aligned} G_{11}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}, 0) &- G_{22}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}, 0) = \\ &= -\frac{1}{2\pi\mu}(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)\frac{\beta^2}{r^2} \left[2(t - \tau)^2 - \frac{r^2}{\alpha^2} \right] \frac{1}{\sqrt{(t - \tau)^2 - (r/\alpha)^2}} H(t - \tau - \frac{r}{\alpha}) + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi\mu}(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)\frac{\beta^2}{r^2} \left[2(t - \tau)^2 - \frac{r^2}{\beta^2} \right] \frac{1}{\sqrt{(t - \tau)^2 - (r/\beta)^2}} H(t - \tau - \frac{r}{\beta}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} G_{11}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}, 0) &+ G_{22}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}, 0) = \\ &= \frac{1}{2\pi\mu}\frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{1}{\sqrt{(t - \tau)^2 - (r/\alpha)^2}} H(t - \tau - \frac{r}{\alpha}) + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi\mu} \frac{1}{\sqrt{(t - \tau)^2 - (r/\beta)^2}} H(t - \tau - \frac{r}{\beta}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} G_{12}(\vec{x}, t - \tau; \vec{y}, 0) &= \frac{1}{2\pi\mu}\gamma_1\gamma_2\frac{\beta^2}{r^2} \left[2(t - \tau)^2 - \frac{r^2}{\alpha^2} \right] \frac{1}{\sqrt{(t - \tau)^2 - (r/\alpha)^2}} H(t - \tau - \frac{r}{\alpha}) - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\mu}\gamma_1\gamma_2\frac{\beta^2}{r^2} \left[2(t - \tau)^2 - \frac{r^2}{\beta^2} \right] \frac{1}{\sqrt{(t - \tau)^2 - (r/\beta)^2}} H(t - \tau - \frac{r}{\beta}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

である (Tada and Yamashita 1997)。ここで、 $r \equiv \|\vec{x} - \vec{y}\|$ 、 $H(\cdot)$ はヘビサイドのステップ関数、 $\gamma_i \equiv (x_i - y_i)/r$ である。各関数の一階時間変数積分 Gh は解析的な関数形で存在するが、ここではその具体的

表現は割愛する。最後に、変位速度場は変位場 2.9、2.10 の両辺を変数 t で微分することにより得られ

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(\vec{x}, t) = & + \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta \dot{u}_t(\xi, \tau) \mu \left[2n_1(\xi)n_2(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} G_{11} - \frac{\partial}{\partial x_2} G_{12} \right) + \right. \\ & \left. + (n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} G_{11} + \frac{\partial}{\partial x_1} G_{12} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_2(\vec{x}, t) = & + \int_{\Gamma} d\xi \int_0^t d\tau \Delta \dot{u}_t(\xi, \tau) \mu \left[2n_1(\xi)n_2(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} G_{21} - \frac{\partial}{\partial x_2} G_{22} \right) + \right. \\ & \left. + (n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} G_{21} + \frac{\partial}{\partial x_1} G_{22} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。

2.4 離散化

BIEM で離散化するのは亀裂面上の滑り速度のみである。変位、変位速度、応力は媒質中の任意の地点で評価することができる。亀裂上の滑り速度の時空間分布を、空間間隔 Δs の直線要素を用い、時間間隔 Δt で分割し、長方形要素 $\Delta s \Delta t$ の中で滑り速度一定の関数形を仮定し離散化する。

$$\Delta \dot{u}_t(s, t) = \sum_k \sum_i V^{i,k} d(s, t; s^i, t^k). \quad (2.23)$$

ここで、 $V^{i,k}$ は離散化された滑り速度、 $d(s, t; s^i, t^k)$ は

$$\begin{aligned} d(s, t; s^i, t^k) = & +H(s - s^i)H(t - t^k) - H(s - s^{i+1})H(t - t^k) \\ & -H(s - s^i)H(t - t^{k+1}) + H(s - s^{i+1})H(t - t^{k+1}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

と表される滑り速度場の基底関数で離散要素内 $s^i = i\Delta s \leq s \leq (i+1)\Delta s = s^{i+1}, t^k = k\Delta t \leq t \leq (k+1)\Delta t = t^{k+1}$ で 1、外で 0 の値をとる。この離散化された滑り速度を応力場の各々の式に代入して、各離散要素内で一定値をとる量を積分の外側にだすと、すべて

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\vec{x}, t_{obs}^n) = & \int_{\Gamma} \int_0^t \Delta \dot{u}_t(\xi, \tau) \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} Gh d\xi d\tau \\ = & \sum_{k=0}^n \sum_i V^{i,k} p.f. \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} Gh d\xi d\tau \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_i V^{i,k} I^{i,k-n}(\vec{x}) \quad (2.26)$$

の形に表せる。ここで $t_{obs}^n = (n+1)\Delta t$ であり、観測時刻は離散的になる (2.3 参照)。観測位置 \vec{x} は連続的なままである。ここでは滑り速度と積分核のみに注目して形式的に表し、各応力成分毎に異なる弾性定数 μ^2 or $\mu(\lambda + \mu)$ と離散要素毎に異なる法線ベクトルの成分 $2n_1(\xi_i)n_2(\xi_i)$ or $(n_2^2(\xi_i) - n_1^2(\xi_i))$ を省略した。 $p.f.$ は区間積分が発散積分になる場合に対して、有限部分を取ることを意味する。本論文の BIEM に

よる亀裂問題の定式化には右辺が滑り速度と積分核関数（グリーンテンソルの時間一階積分、空間2階微分関数）との因果律を満たす領域（弾性波円錐の内側）での畳み込み積分の形になっている。弾性波円錐の波頭でグリーンテンソル自身は積分可能な弱い特異性しか持たないが、積分微分演算によって積分核は超特異性を持つようになり積分値が発散する。従って積分核の積分区間が波頭にかかる要素に対しては有限部分を用いて評価する³。滑り速度の (i, k) 要素が位置 \vec{x} 時刻 t_{obs}^n に作り出す応力を意味する離散積分核

$$I^{i,k-n}(\vec{x}) = p.f. \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} Gh d\xi d\tau \quad (2.27)$$

は数値積分を用いることなく全て解析的に表わすことができる（Appendix A 参照）。有限部分法は、亀裂面の向きとは独立した形で積分核のみしか関係しない形で発散積分を評価することができ、このことが自由形状の亀裂問題に現れる発散積分の評価法に有限部分を用いる利点である。発散積分のもう一つの評価法である正規化法では積分核の超特異性の処理は亀裂面の向きに依存するため離散化より前の段階で発散積分の評価をする必要が生じるので（Tada 1995, Tada and Yamashita 1996 1997）、形状未知の破壊計算には見通しが悪くなり不利である⁴。

亀裂面上の (l, n) 要素上においては応力評価点を要素中点 $s_{obs}^l = s^l + \Delta s/2$ に置き、この点で境界条件を課すことにする。 (l, n) 要素上の全ての応力成分 $\sigma_{ij}(s_{obs}^l, t_{obs}^n) = \sigma_{ij}^{l,n}$ を離散式で書き下し、亀裂面の (l, n) 要素に沿う剪断応力 $T_t^{l,n}$ を構成した後、離散滑り速度要素の観点からまとめると

$$T_t^{l,n} = \sum_{k=0}^n \sum_i V^{i,k} K^{l-i,n-k} \quad (2.28)$$

の代数方程式を得る。これが亀裂面上の剪断応力と滑り速度の離散化された積分方程式である。法線ベクトルと弾性定数は応力成分の場合と同様省略した。滑り速度 $V^{i,k}$ が (l, n) に作り出す応力の寄与が $K^{l-i,n-k}$ であり、因果律を満たす範囲内にある $V^{i,k}$ の作り出す応力寄与の総和が $T_t^{l,n}$ になるということである（図 2.3 参照）。

応力変化量が各離散要素上で境界条件として

$$T_t^{l,n} = \Delta \sigma^{l,n} \quad (2.29)$$

と与えられる場合、 n ステップ目の滑り速度は $n-1$ ステップまでのすべり速度を用いて、式 2.28 より

$$V^{l,n} = \frac{\Delta \sigma^{l,n}}{K^{0,0}} - \frac{1}{K^{0,0}} \sum_k \sum_i V^{i,k} K^{i-l,k-n} \quad (2.30)$$

で求められる。

³観測点が離散要素上に位置する場合は、その要素内の区間積分は $r \equiv \|\vec{x} - \vec{y}\| = 0$ が現れ発散するので、同様に $p.f.$ を考える。

⁴Tada and Yamashita (1996) の手法は離散要素の内部でなめらかに形状が変化する場合をも扱える点で優れている。

Descretized BIE

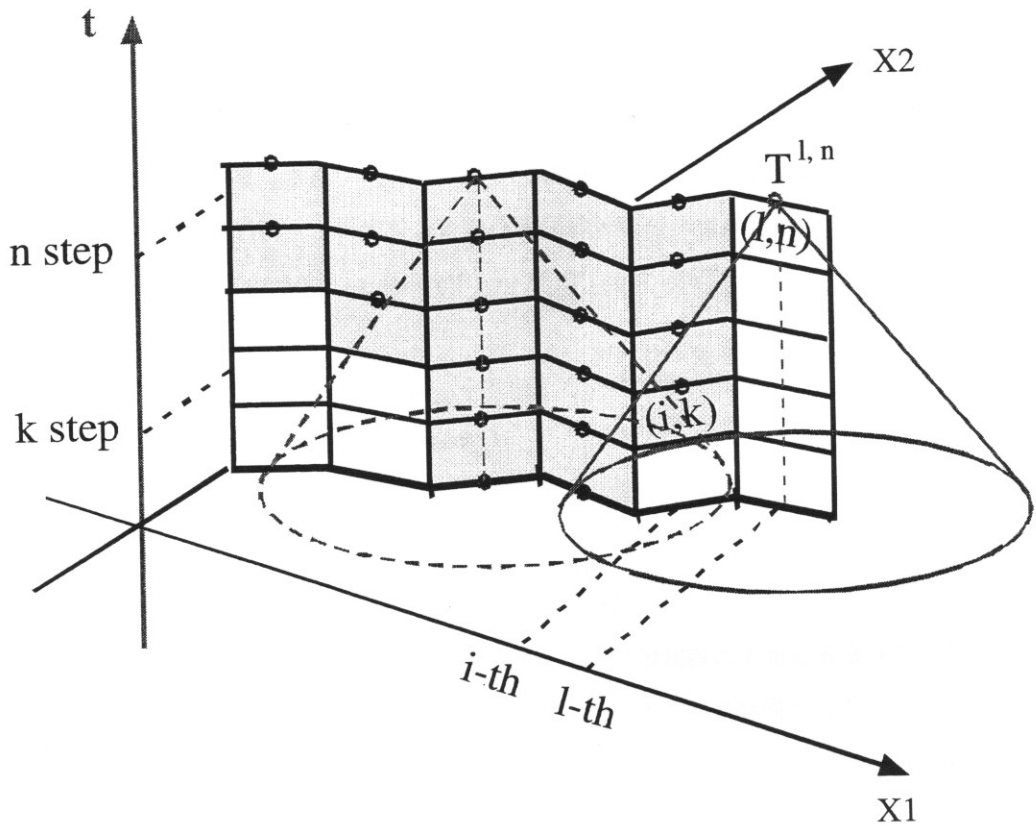


図 2.3: 離散化したBIEMの模式図。○印は亀裂面上の応力評価点を示す。ある地点のある時刻の応力は因果律を満す時空間領域(波動円錐内部)における滑り速度と積分核関数との畳み込み積分(離散化後は足し算)で表わされる。

一度、亀裂面上の $V^{i,k}$ が求めれば、任意の観測点での応力は式 2.26 より計算することができる。また、任意の観測点での変位速度波形は、式 2.21、2.22 を離散化した積分式

$$\begin{aligned} \dot{u}(\vec{x}, t_{obs}^n) &= \int_{\Gamma} \int_0^t \Delta \dot{u}_t(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial x_p} G d\xi d\tau \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_i V^{i,k} p.f. \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial}{\partial x_p} G d\xi d\tau \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_i V^{i,k} H^{i,k-n}(\vec{x}) \quad (2.32)$$

から計算できる。

数値計算は諸物理量を無次元化して行った。媒質は $\alpha/\beta = \sqrt{3}$ の Poisson solid を仮定し、離散要素の時空間の比は $\alpha\Delta t/\Delta s = 0.5$ にとった。単位長さに空間離散間隔 Δs を選び、剛性率 μ 、P 波速度 α を用いて物理量を無次元化する。これ以後の数値計算の結果は無次元化した座標系 $x' = x/\Delta s, y' = y/\Delta s, t' = \alpha t/\Delta s$ 、無次元化した応力、変位 $\sigma' = \sigma/\mu, u' = u/\Delta s$ を用いて表示している。

2.5 数値計算手法の精度確認

本論文で開発した計算手法を用いて求めた数値解の計算精度の確認を行う。動的破壊伝播する亀裂周辺の変位場や応力場の解析解は非常に限定された状況でしか与えられていない。ここでは Kostrov (1964) の求めた直線形状で一定速度で伝播する亀裂の解析解を用いて、亀裂面上の滑りと応力の時間発展を比較しよう。Kostrov の解は複素積分の形で書かれており数値的に評価する事が困難であるので、その解を実数の楕円積分の形で書き下した Tada (1995) の式を利用した (対象性が成り立つ座標軸上のみ実数表示できる)。 $t = +0$ の瞬間に破壊が始まり x_1 軸上を一定速度 $v = 0.8\beta$ で伝播する亀裂を考える。亀裂面上で単位応力降下量を与えた。

数値計算を行うと、時間ステップ数を重ねるとともに次第に数値不安定が生じて滑り速度が振動し始め、終いには発散してしまう。この数値不安定は、本来亀裂面全域で満たされるべき境界条件が数値計算上は離散的な点でしか満足することができないことにより生じる誤差に起因すると考えられる。特に破壊面が進む亀裂問題にたいしては亀裂先端の応力が特異性を持つことによりこの離散的な境界条件適用によって決まる数値解は真の解との誤差を含みがちになり、それが時間とともに増幅して不安定に至る。そこで本研究では Yamashita and Fukuyama (1994) に従い、亀裂面の滑り速度を決定する際に式 2.33 に示す人工的な安定項を導入することによりこの不安定を防ぐことにする。

$$V^{l,n} = \frac{\Delta\sigma^{l,n}}{K^{0,0}} - \frac{1}{K^{0,0}} \sum_k \sum_i^{n-1} V^{i,k} K^{l-i,n-k} + c (V^{l-1,n} + V^{l+1,n} - 2V^{l,n}). \quad (2.33)$$

ここで c は粘性の強さをしめす正の定数である。人工的な安定項を導入することにより数値計算が安定になり、滑り速度の不安定な振動は抑制されようになる。 c の値は 0.5 にした。

滑り、剪断応力の数値解と解析解の比較をそれぞれ、図 2.4 と図 2.5 にそれぞれ示す。滑りの比較点は、 $x_1 = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ であり、剪断応力の比較点は $x_1 = 10, 20, 30, 40, 50$ に取った。数値計算で決定するのは滑り速度であるので、滑りの比較には滑り速度の時間ステップの和を取った。滑りの時間発展は非常に精度良く決まっていることがわかる。亀裂前方の応力場に関しても波動によるピークが良く表現されている。ただ、亀裂面内の滑り速度の決定時に人工的な安定項を加えた影響により、亀裂面内での応力境界条件が亀裂のすぐ内側では満たされなくなってしまう。

平面状亀裂の動的成長の解析には差分法がしばしば用いられる。その中で精度がよいと考えられている Virieux and Madariaga (1977) のスタッガードグリッドを用いた差分法による計算では図 2.5に見られる波動の鋭いピークは亀裂をかなり多点で表現した場合でさえなだらかな盛り上がり程度にしか表現できない。これは運動方程式の微分項を差分式で表現することにより微分の高次項が落ち数値分散がおきるからと考えられる。BIEM では定式化に現れる積分微分演算を全て解析的に行うため差分法とくらべて少ない離散点で精度が高く計算できるという利点がある⁵ (図 2.5 参照)。

⁵ 計算精度の良い反面、差分法に比べて数値計算スキームを組むまでの作業に労が多いのが難点である。

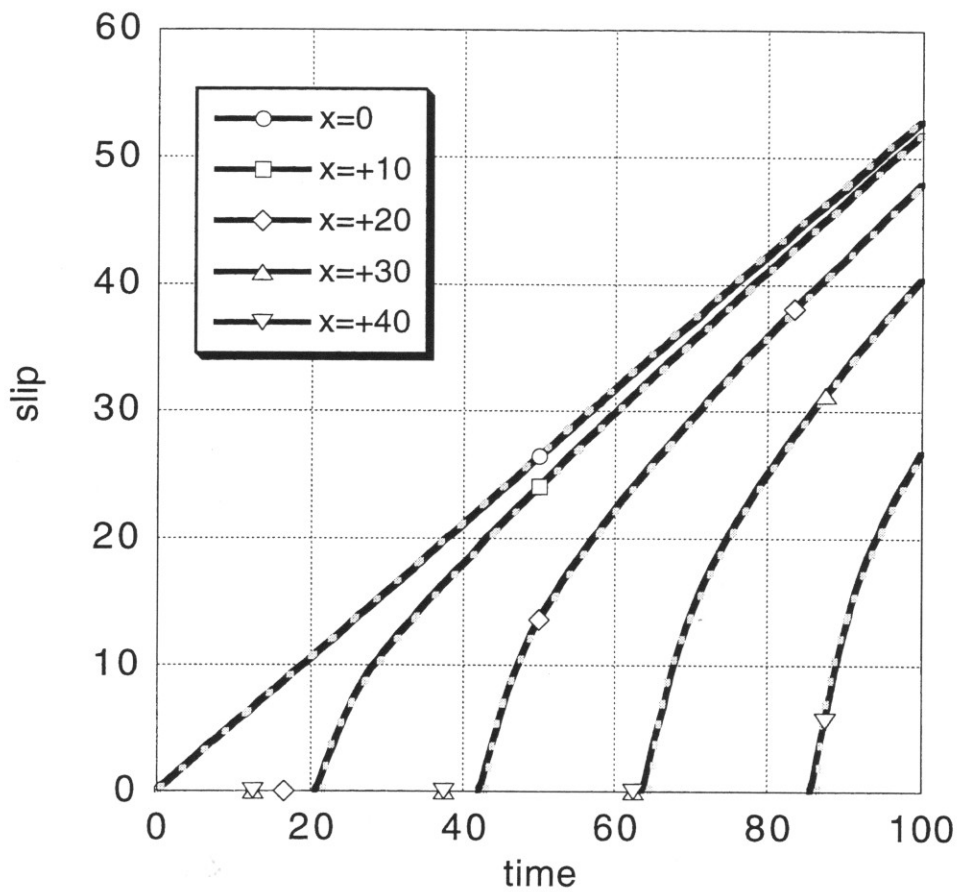


図 2.4: 解析解と数値解の比較：滑り量。一定速度 $v = 0.8\beta$ で破壊伝播する亀裂のある面上 4 点における滑り量の時間履歴を示す。実線が解析解、点線が数値解を指す。安定項の係数、亀裂面上の応力変化量はそれぞれ $c = 0.5$, $\Delta\sigma_0 = -1.0$ を用いた。

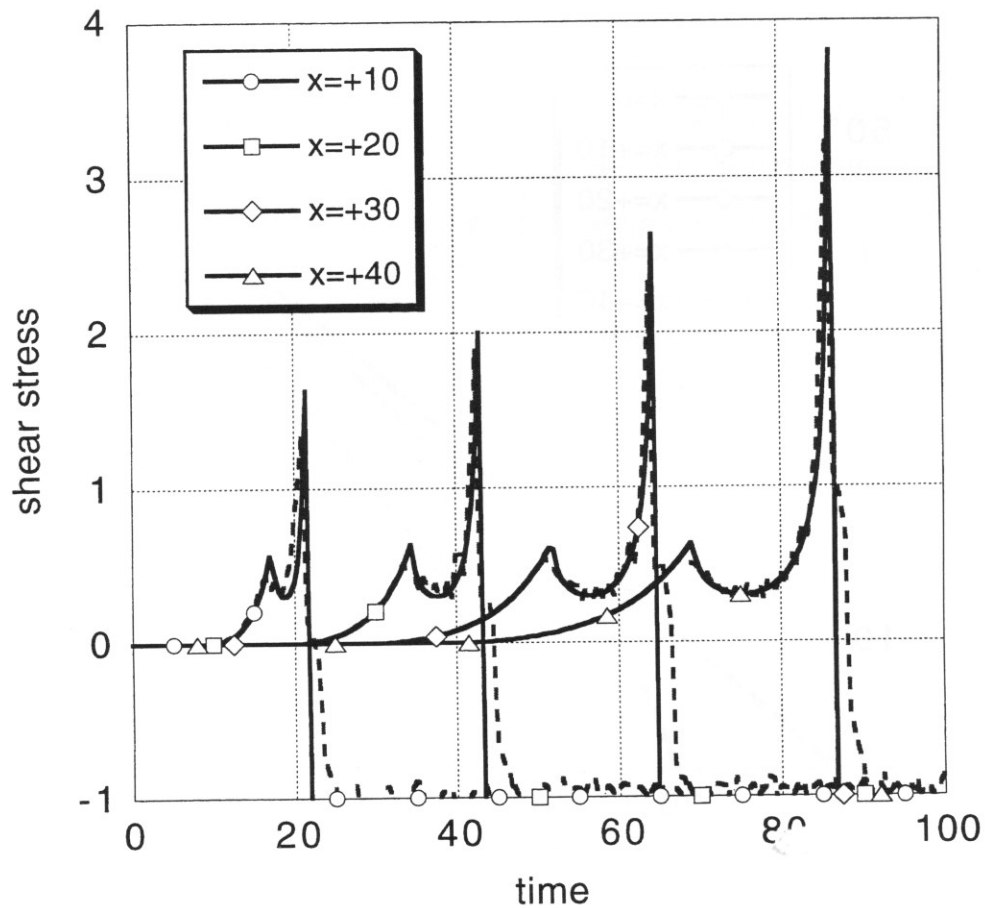


図 2.5: 解析解と数値解の比較 2: 剪断応力。一定速度 $v = 0.8\beta$ で破壊伝播する亀裂のある面上の 5 点における滑り量の時間履歴亀裂のある面上の剪断応力の時間変化を示す。実線が解析解、点線が数値解を指す。各観測点で、先ず波動による応力集中がありその後亀裂先端の通過による応力集中がある。亀裂面内にはいると、境界条件 $\Delta\sigma_0 = -1$ になるはずであるが、人工的な安定項により完全には満たされない。

Chapter 3

モデル

これまで解析されてきた剪断型亀裂の進展問題はすべてあらかじめ決められたトレース上を破壊が「走る」ものであった。これに対して、本論文は破壊の経路そのものを計算により決めるものである（表 3.1 参照）。本章では、破壊経路の時間発展を決める亀裂モデルの諸設定（初期条件、境界条件、破壊基準）と計算手順について述べる。

3.1 基準応力場と境界条件

直交する 2 方向 $x_1 = \mp x_2$ からそれぞれ σ_{XX} 、 σ_{YY} の封圧がかかっている状態を考える（図 3.1 参照）。引っ張りを正に取るので、 $\sigma_{XX} < \sigma_{YY} < 0$ となる。亀裂がなく一様に歪んでいるこの状態を基準状態と呼ぶことにし、上付き記号 0 で表現する。この 2 方向からの封圧による x_1x_2 座標形での応力テンソル \mathbf{s}^0 は

$$\mathbf{s}^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & \tau^0 \\ \tau^0 & \sigma^0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

となる。ここで σ^0 、 τ^0 はそれぞれ封圧和と差応力の半分である。

$$\sigma^0 = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} < 0 \quad (3.2)$$

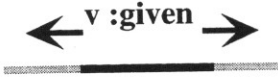
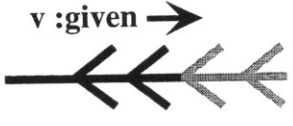
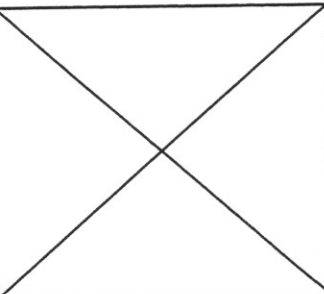

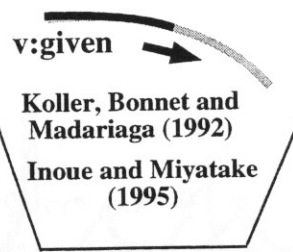
$$\tau^0 = \frac{\sigma_{YY} - \sigma_{XX}}{2} > 0 . \quad (3.3)$$

従来の亀裂問題と異なり、本論文では亀裂面の向きが破壊成長の途中で変化する状況を考える。このとき亀裂面の傾きが変化すると、それに応じて亀裂面上の境界条件の表現が変化することに注意が必要である。このことに関して、 x_1 軸から角度 φ だけ傾いた面に働く応力を考えよう。この面の法線ベクトルと接線ベクトルの成分はそれぞれ

$$\vec{n} = (-\sin \varphi, \cos \varphi) \quad (3.4)$$

$$\vec{t} = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad (3.5)$$

2次元剪断型亀裂の動的破壊伝播問題

	直線形状	非直線的形状	
		形状既知	形状未知
<p>強制的 破壊伝播 問題 (破壊速度既知)</p>	 <p>e.g., Kostrov (1966)</p>	 <p>Tada and Yamashita (1997)</p>	
<p>自発的 破壊伝播 問題 (破壊速度未知)</p>	 <p>e.g., Das and Aki (1977a)</p>	 <p>Koller, Bonnet and Madariaga (1992) Inoue and Miyatake (1995)</p> <p>なし</p>	

v :rupture velocity

表 3.1: 2次元剪断型亀裂の動的破壊問題のまとめ。従来の全ての研究は決められたトレース上を破壊が走るものである。本研究は破壊形状を予め決めずに計算を始め、破壊の経路を決めていく世界初の試みである。

である。この角度 φ だけ傾いた面に働く基準状態の応力ベクトルの法線成分と接線成分は、それぞれ

$$T_n^0(\varphi) = S_{ij}^0 n_j n_i = \sigma^0 - \tau^0 \sin 2\varphi, \quad (3.6)$$

$$T_t^0(\varphi) = S_{ij}^0 n_j t_i = \tau^0 \cos 2\varphi \quad (3.7)$$

となる。 $T_t^0(\varphi)$ をみると右向き剪断応力ベクトルが最大になる面が x_1 軸になることがわかる。さて、この媒質中のどこかに滑り Δu_t を起こしている亀裂が存在すると、応力場はこの基準状態から変化する。この亀裂による応力場の変化分が x_1 軸から角度 φ 傾いた面に作り出す応力ベクトルの法線成分、接線成分をそれぞれ $\Delta T_n(\varphi)$ 、 $\Delta T_t(\varphi)$ と記す。従って、この亀裂の作り出す応力場の寄与も含めた φ 傾いた面での絶対応力ベクトルは

$$T_n(\varphi) = T_n^0(\varphi) + \Delta T_n(\varphi) \quad (3.8)$$

$$T_t(\varphi) = T_t^0(\varphi) + \Delta T_t(\varphi) \quad (3.9)$$

で表される。

2次元 P-SV 剪断型亀裂において亀裂面に沿う滑り Δu_t は右ずれ滑りを正にとる。なお、封圧の影響下で開口変位は生じないものとする。本研究において亀裂は全て Griffith crack を仮定する。すなわち、亀裂先端の応力集中に耐えきれず破壊面が新たに生じた場合、亀裂面上の剪断応力は直ちに残留レベルまで降下するものとする。残留剪断応力がクーロン摩擦力に等しいとすると、傾き φ の亀裂面における剪断応力の残留レベル $T_t^{res}(\varphi)$ は摩擦係数 μ_f を用いて

$$T_t^{res}(\varphi) = \mu_f \cdot T_n(\varphi) \quad (3.10)$$

と表される。

線形弾性体の運動方程式を解く際、基準状態からの変化量（亀裂による変形分）のみが数値計算の対象になる。実際に数値計算の対象になる量は ΔT_t 、 ΔT_n 、 Δu_t である。すなわち、本論文で扱う混合境界値問題は亀裂面 Γ 上で剪断応力の変化分 $\Delta T_t^\Gamma(\varphi)$ を与えて、未知滑り Δu_t を BIEM により決定することになる。この亀裂面 Γ 上での基準状態からの剪断応力の変化分は式 3.9 より

$$\Delta T_t^\Gamma(\varphi) = \mu_f \cdot T_n(\varphi) - T_t^0(\varphi) \quad (3.11)$$

で与えられる¹。

3.2 初期設定と破壊基準

本論文では、動的破壊伝播開始寸前の臨界状態にある既存亀裂の先端から始まる破壊成長を考える。そのために動的な破壊計算に先立ち、静的平衡状態にある亀裂を予め弾性体中に用意する。臨界亀裂長 l_0 を決

¹ 応力「降下量」としては $\Delta T_t^{drop}(\varphi) = -\Delta T_t^\Gamma(\varphi)$ が対応する。

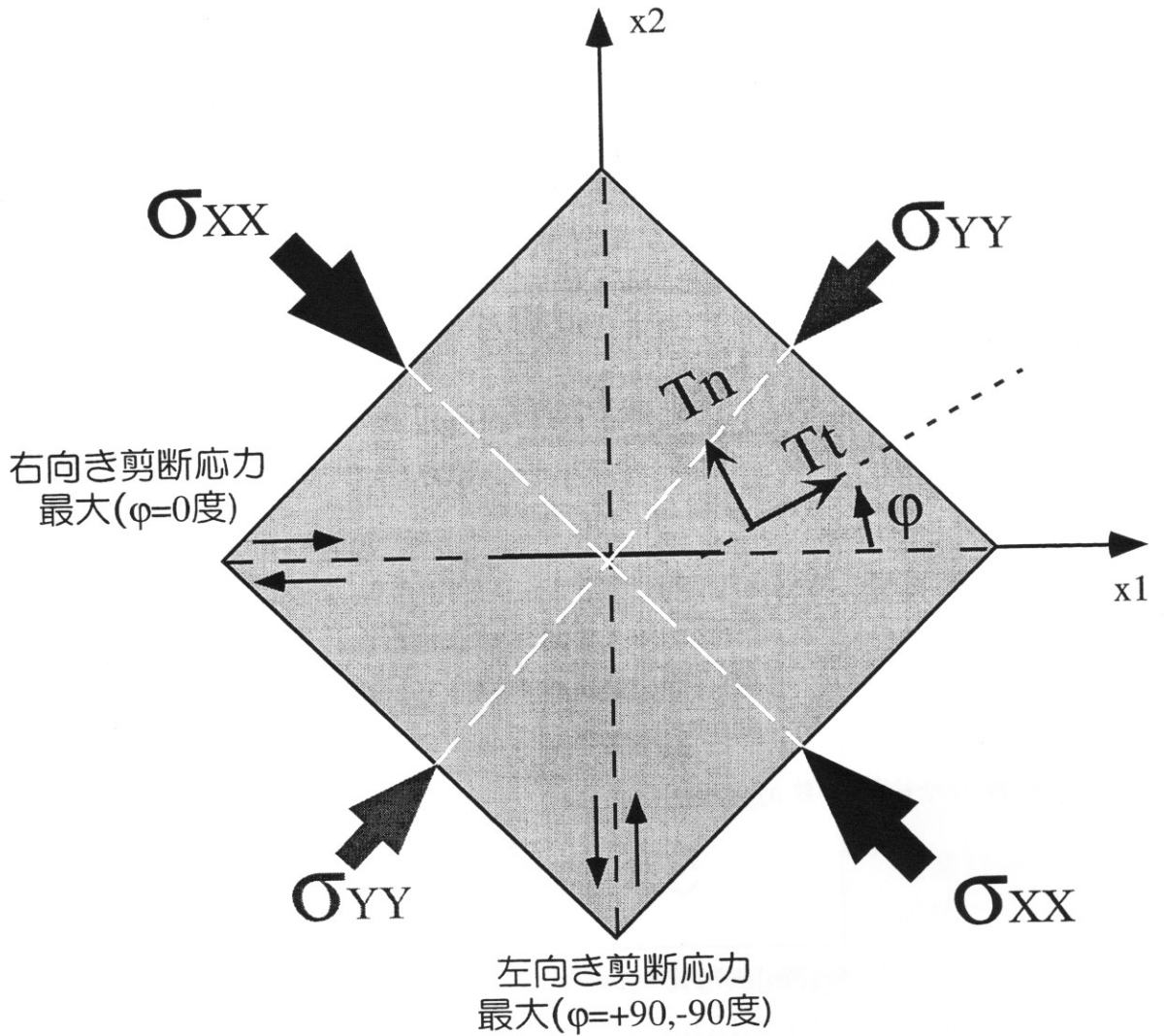


図 3.1: モデルの配置図と座標系。2 軸の封圧がかかる弾性体を基準状態として採用する。右向き最大剪断力の働く面を x_1 軸にとる。 x_1 軸から φ 傾いた面での応力ベクトルの法線成分、剪断成分を矢印でそれぞれ示す。

め、応力降下量が最大になる角度 φ_0 に傾いた面上に置く（この初期角度 φ_0 において亀裂先端に集中する応力が最も大きくなり破壊が一番始まりやすい状況になる）。この亀裂面上に境界条件から決まる応力変化量を与え、臨界亀裂面上の静的滑り量 D^i を先ず決定する（Appendix B 参照）。こうして求めた静的平衡滑り量 D^i を亀裂面上に分布させると亀裂先端に応力集中の生じた動的破壊開始直前の臨界状態が作り出される。

自発的破壊伝播問題を考えるためには、破壊が進むか進まないかを定める基準が必要になってくる。本論文ではこの破壊進展の基準に最大剪断応力値基準を用いる（Das and AKi 1977b）。これは亀裂先端の剪断応力の増分 $\Delta T_t(\varphi)$ が基準値 T_t^c を越えると破壊進展すると考える基準である。方向の破壊基準として最大剪断応力の方向に破壊が進むことにする。最大剪断応力は次のようにして求める。今ある亀裂前方に亀裂先端を中心に Δs （亀裂の一離散要素分の長さ）を半径とする円を考える。亀裂の延長線を基線にとり、 ± 90 度の方向に 1 度間隔の半径方向に傾いた面を考え、それぞれの面の midpoint で応力成分 σ_{11} 、 σ_{12} 、 σ_{22} を計算して各面に沿う剪断応力 ΔT_t をつくる。これら亀裂前方の 181 方向の ΔT_t を比較し、最大値とその方向を決める。最大剪断応力が破壊基準値を越えている場合は亀裂面をその方向に 1 グリッド分進める。亀裂先端を起点に円を考え半径方向に沿う応力ベクトルは「フープ応力」（hoop traction, or, circumferential traction）と名付けられている（図 3.2 参照）。

破壊基準値 T_t^c は、静的平衡状態にある亀裂先端の応力より決める。先ず、静的滑り量を用いて亀裂先端の剪断応力の最大値 ΔT_t^{max} を求める。 T_t^c は ΔT_t^{max} よりわずかに小さな値に設定する。こうして設定した T_t^c を動的計算の最初のステップに適用することで、静的平衡状態にある臨界亀裂の先端から動的破壊開始させる。

静的すべり量 D^i による静的応力場を考慮すると、動的破壊による亀裂面上でのすべり速度は、

$$V^{l,n} = \frac{\Delta \sigma^{l,n}}{K^{0,0}} - \frac{1}{K^{0,0}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_i V^{i,k} K^{l-i,n-k} + \sum_{i_0} D^{i_0} K_{static}^{l-i_0} \right) \quad (3.12)$$

で決定される。ここで i_0 は初期亀裂の存在する範囲についての和をとる。上式は $t \geq 0$ で動的破壊が起きない（新たに応力降下する要素がない）場合にはすべり速度 0 を与えるのみ、すなわち静的平衡を満したままの状態を与える。なお式 3.12 では簡単のため安定項を省いて書いてある。

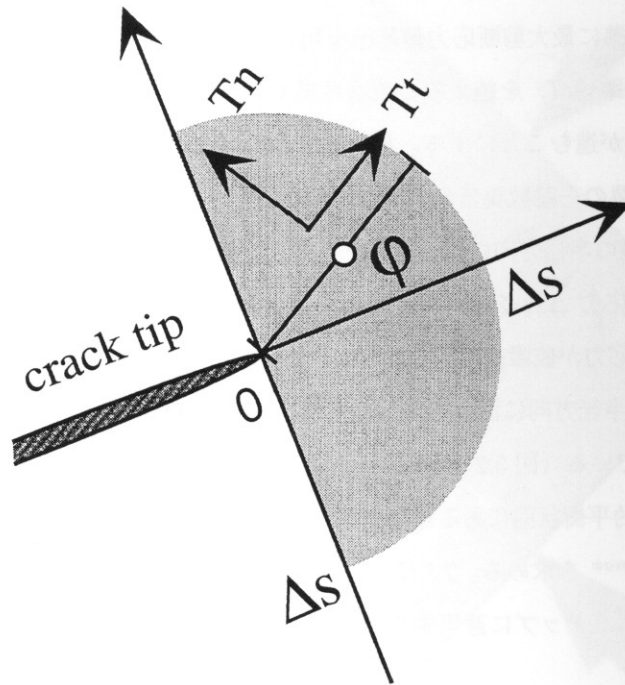


図 3.2: フープ応力 (hoop traction, circumferential traction) は亀裂先端を中心とする円を考え、半径方向の面に働く応力ベクトルを意味する。数値計算では半径 Δs の円を考え、その中点 o に応力評価点を置いた。

Chapter 4

形状自由な自発的破壊成長過程

破壊速度が高速になると亀裂先端の最大剪断応力軸が亀裂面からずれる。しかし、これまでの自発的破壊伝播の計算は直線方向に限定されており破壊は最大剪断応力の方向に進むことができなかった。本章では、亀裂形状を自由にした場合に破壊はどのように成長していくのか、本論文で開発した新しい計算手法による数値シミュレーションの結果について述べる。

4.1 形状自由な自発的破壊成長過程

先ず、境界条件に法線応力依存性の無い単純な場合 ($\mu_f = 0$) について解析を行う。 $\mu_f = 0$ の場合、臨界亀裂面の向きは $\varphi_0 = 0$ 度になり、境界条件は差応力 $\sigma_{YY} - \sigma_{XX} = 2\tau^0$ のみに依存する。そこで $\tau^0 = 1.0$ を単位応力量として用いることにする。このとき臨界亀裂面上で単位応力降下量 $\Delta\sigma^{drop} = 1.0$ を生ずる。臨界亀裂長を $l_0 = 5$ に設定すると破壊基準値は $T_t^c = 1.21$ に決まる。破壊強度は空間一定値とする。不均質なパラメータは一切無く、破壊成長経路は純粹に動的破壊伝播中の亀裂先端の剪断応力軸の向きの変化に支配されている。静的平衡状態にある臨界亀裂の先端から時刻 $t = 0$ に動的破壊を開始させる。この場合の計算結果を図 4.1 に示す。既存の臨界亀裂から始まる破壊成長は急激に加速し時間 $t = 8$ で破壊速度 $v = 0.76\beta$ に達する。破壊は時空間的に離散的に伝播するのである瞬間の破壊速度は存在しない。そこで平均的な破壊速度を空間 7 グリッドを進むのに必要な時間ステップを用いて定義している。先の例では $t = 8$ における亀裂先端のグリッドを含む前後の合計 7 グリッドを破壊が通過するのにかかる時間ステップ数を計測して破壊速度を決定した。 $t = 8$ では亀裂前方の剪断応力分布はまだ $\varphi = 0$ 度が最大である。 $t = 15.5$ になると最大剪断応力軸が $\varphi = \pm 42$ 度になり、このとき初めて $\varphi \neq 0$ 度で破壊基準値を越える。このときの破壊速度は $v = 0.87\beta$ に達している。2 方向で破壊基準値を越えるため破壊は二股に分岐する。分岐後に新たに生じた 2 つの亀裂先端に対してもそれぞれ ± 90 度の軸方向範囲に対して 1 度毎に剪断応力を計算する。こうして自発的破壊の計算を継続すると、 $t = 16$ に今度は最大応力の方向が ± 84 度になって破壊

基準値を越える。このあと計算を続けても亀裂先端の剪断応力が破壊基準値を越えることは無い。従って、破壊がこれ以上先へ進むことは無くなる、すなわち、ここで亀裂先端の進展は停止する。停止した亀裂の x_1 軸方向への投影長は $l_{stop} = 20.7$ である。しかし、亀裂面上の滑りは亀裂先端の進展停止後直ちに停止するわけではなく、停止端から亀裂の内側に向かって順に亀裂進展停止のフェーズが伝わり滑り速度が低下していく。本計算では逆向きの滑りを禁止していないので、亀裂の中央部分では慣性で行きすぎた滑り分を平衡状態に戻そうとして負の滑り速度が生じる。逆向きの滑りを禁止した場合は、逆滑りになる所がかわりに停止端より順に固着するようになるのみで最終的な破壊形状が変化することはない。以下、他のモデルとの比較する場合、図 4.1 の破壊モデルを「分岐モデル」と呼ぶ。

図 4.2 は破壊の進展方向は自由だが、亀裂先端の分岐を許さない条件の下で計算した結果である。 $t = 15.5$ で ± 42 度の方向で剪断応力が最大になり破壊基準値を越えるのは分岐モデルと同じである。このとき、どちらの枝に破壊するかは法線応力により決定する。亀裂先端の剪断応力分布 $\Delta T_n(\varphi)$ は亀裂面に関して偶関数であるが、法線応力分布 $\Delta T_n(\varphi)$ は奇関数になっている。亀裂が分岐する状況になったときは、それぞれの枝での法線応力を比べこれが引っ張りになっている方向へ進むと決めた。法線応力は剪断応力が分岐しそうになるとき、破壊する枝を一つにする判断に用いているのみであり、破壊進展基準には剪断応力しか用いていない。法線応力が引っ張りの方向を選択する理由は亀裂面上に働く摩擦力を考えた場合に引っ張り応力が働く面が破壊面として生き残り易いと考えたからである（摩擦を考えた計算は後節で改めて取り扱う）。亀裂面の分岐を許さない場合、 $t = 15.5$ で亀裂面は最初の屈曲を行い、 $t = 16.5$ で更に広角の -82 度方向に屈曲する。その後、 $t = 18$ に -84 度方向に曲がる。この後、亀裂先端の剪断応力を計算し続けても再び破壊基準値を越えることはなく、この形で亀裂の進展は停止する ($l_{stop} = 21.2$)。このモデルを「屈曲モデル」と名付ける。分岐モデルと屈曲モデルでは直線亀裂から曲がったあと破壊伝播が停止するまでの延びる枝の長さが異なる。分岐モデルが 2 グリッドの枝を伸ばして停止したのに対し、屈曲モデルでは 3 グリッド枝を伸ばして停止する。これは、分岐モデルでは歪み解放のエネルギーが 2 つの亀裂先端に分散してしまうのに対し、屈曲モデルでは 1 つの亀裂先端のみに集中する結果であると考えられる。両モデルともに初期亀裂長さの約 4 倍で破壊停止するが、これは臨界亀裂から始まった破壊が加速して亀裂先端の最大剪断応力軸が傾く速度に達するまでに亀裂が 4 倍程度の大きさに成長する必要があることを意味している。

次に、この計算結果の本質が数値離散化にある可能性を否定しておく必要がある。このために分解能をあげた（亀裂をより多数の要素で表現した）破壊進展の計算を行った（図 4.3 参照）。先の屈曲モデルの計算より約 2 倍（正確には $11/5$ 倍）の要素数で臨界亀裂を表現してある。動的破壊開始後の加速ステージで亀裂前方に向いていた最大剪断応力軸は、破壊速度が増すにつれ本来は連続的に傾き始めることが期待されるが、グリッド間隔が粗い計算ではこの遷移過程の表現能力に劣り、 $t = 15.5$ の時間ステップでいきなり 42 度の方向に向きを変える。分解能をあげた計算では、その点に改善が見られ、はじめ 8 度で曲がりその

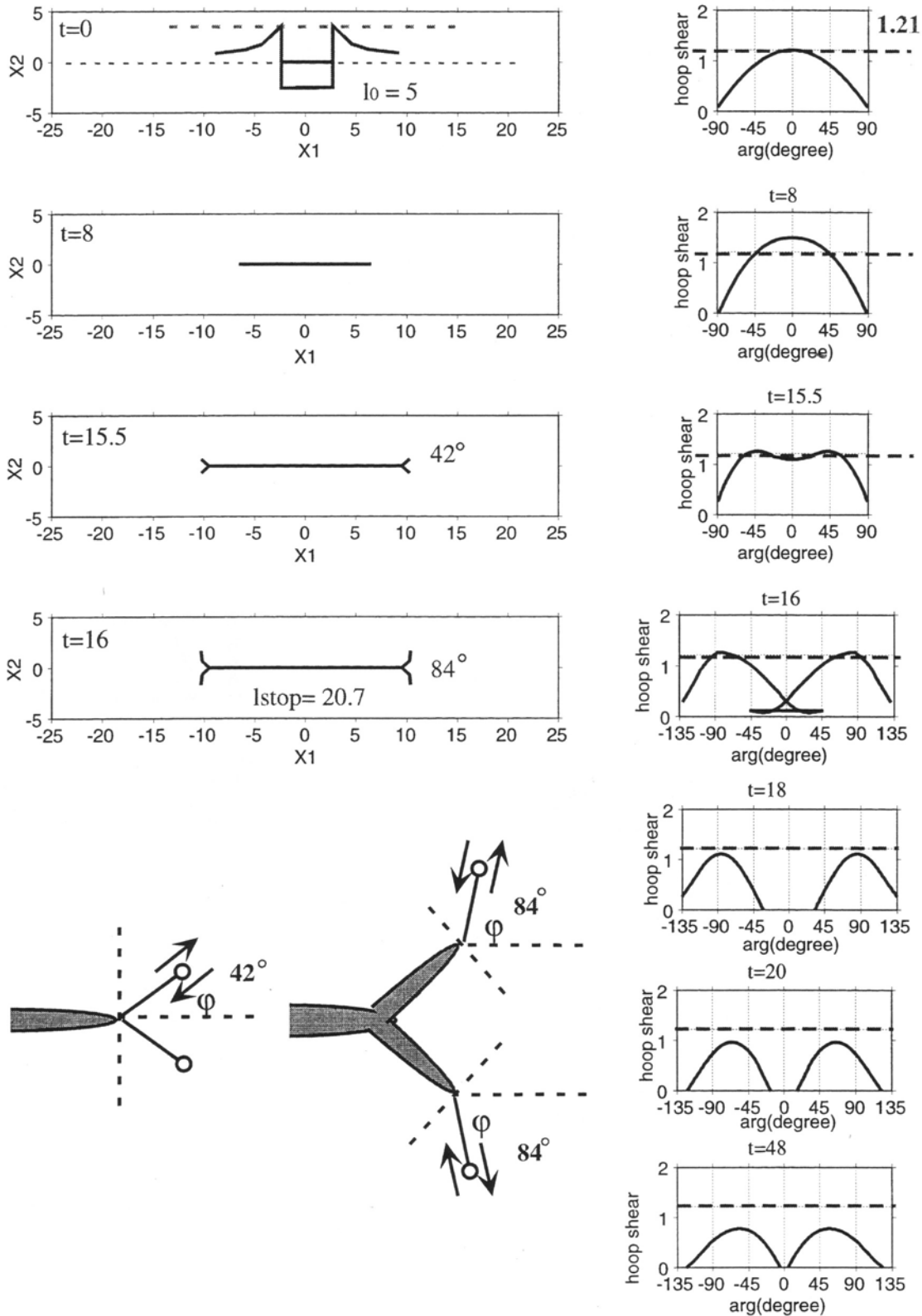


図 4.1: 「分岐モデル」の破壊過程のスナップショット。図の右列は各時刻の亀裂先端の剪断応力の方位分布を示す。破壊速度が高速化すると時刻 $t = 15.5$ に亀裂先端の最大剪断応力分布が二股に別れ、破壊面が 2 方向に分岐する。破壊は分岐後、時刻 $t = 16$ 以降その進展を停止する。破壊進展停止後の時刻 $t = 18, 20, 48$ の剪断応力値は破壊基準値を越えない。

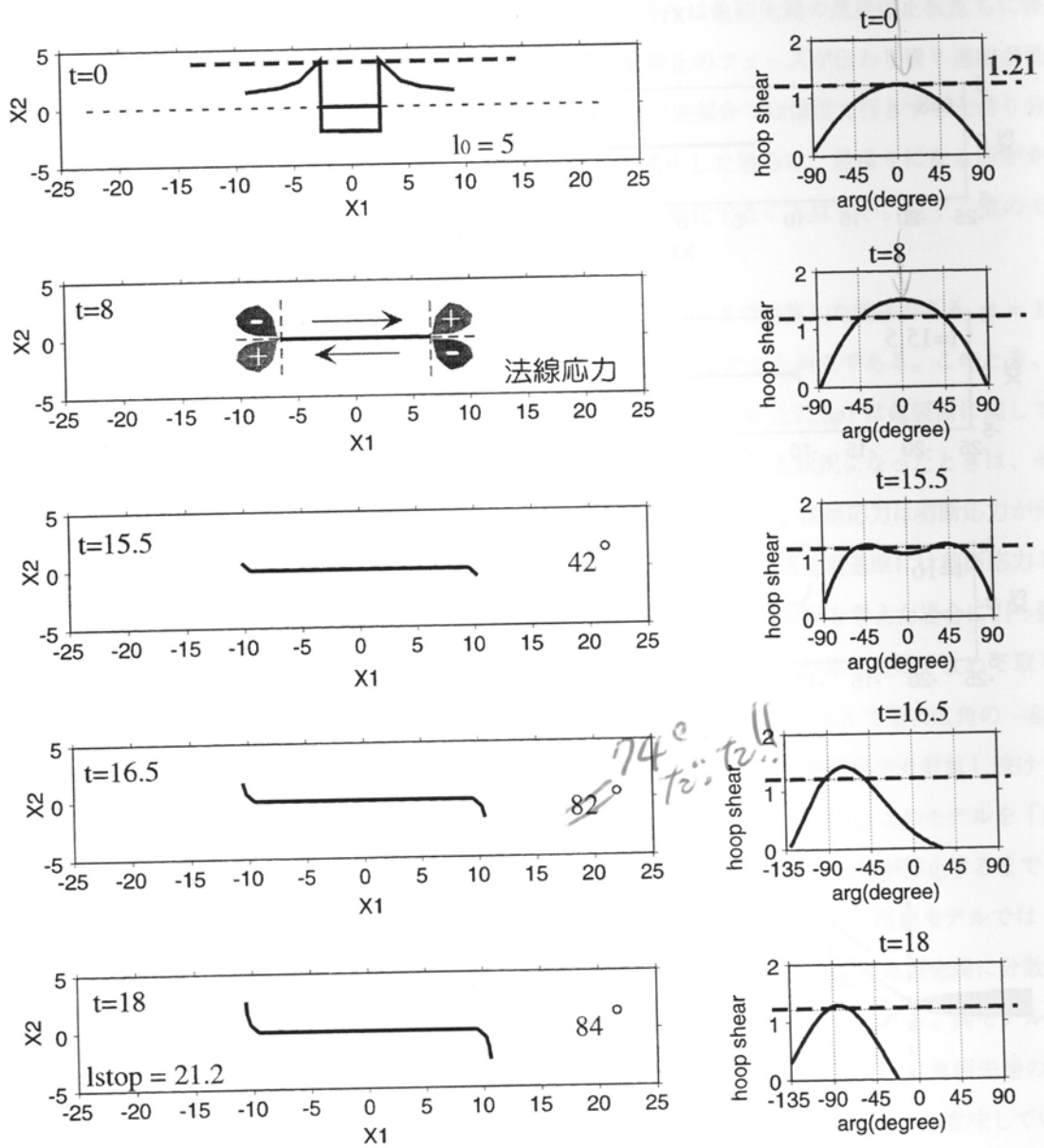


図 4.2: 「屈曲モデル」の破壊過程のスナップショット。図の右列は各時刻の亀裂先端の剪断応力の方位分布を示す。破壊速度が高速化すると亀裂先端の最大剪断応力分布が二股に別れる。その時、亀裂の作り出す法線応力が引張側を選択して破壊成長させた。「分岐モデル」と同様に、破壊は広角に屈曲した後、時刻 $t = 18$ 以降その進展を停止する。

後 28、57、77 度と次第に広角度の方向に屈曲していく。更に分解能を上げた極限を考えれば、なめらかなカーブに収束すると考えられる。最終的な亀裂形状は亀裂の離散点数には、ほとんど依存しないことも図 4.3 からわかる。従って、破壊は力学過程として曲がるのであり、数値計算による人工的なものではないということが、粗い計算ではあるが、示されたことになる。実際の数値計算においては計算機の能力の兼ね合いからグリッドは在る程度までしか多くできない。本計算法はグリッド数を 2 倍にすると計算時間が 4 倍になる。そこで本研究では、現実的な計算時間で終了できる問題の規模として試行錯誤の末に初期亀裂を 5 要素で表現することにした。本論文で注目している破壊形状の変化開始時には亀裂を 20 要素程度で表現するようになるので亀裂の表現点数として十分であると考えた。

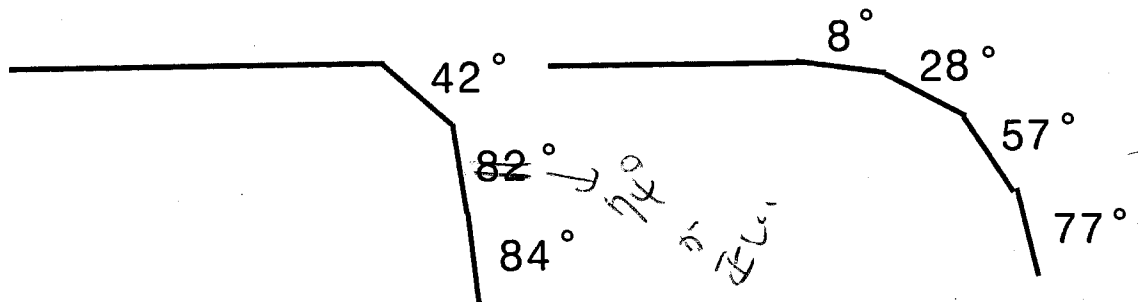
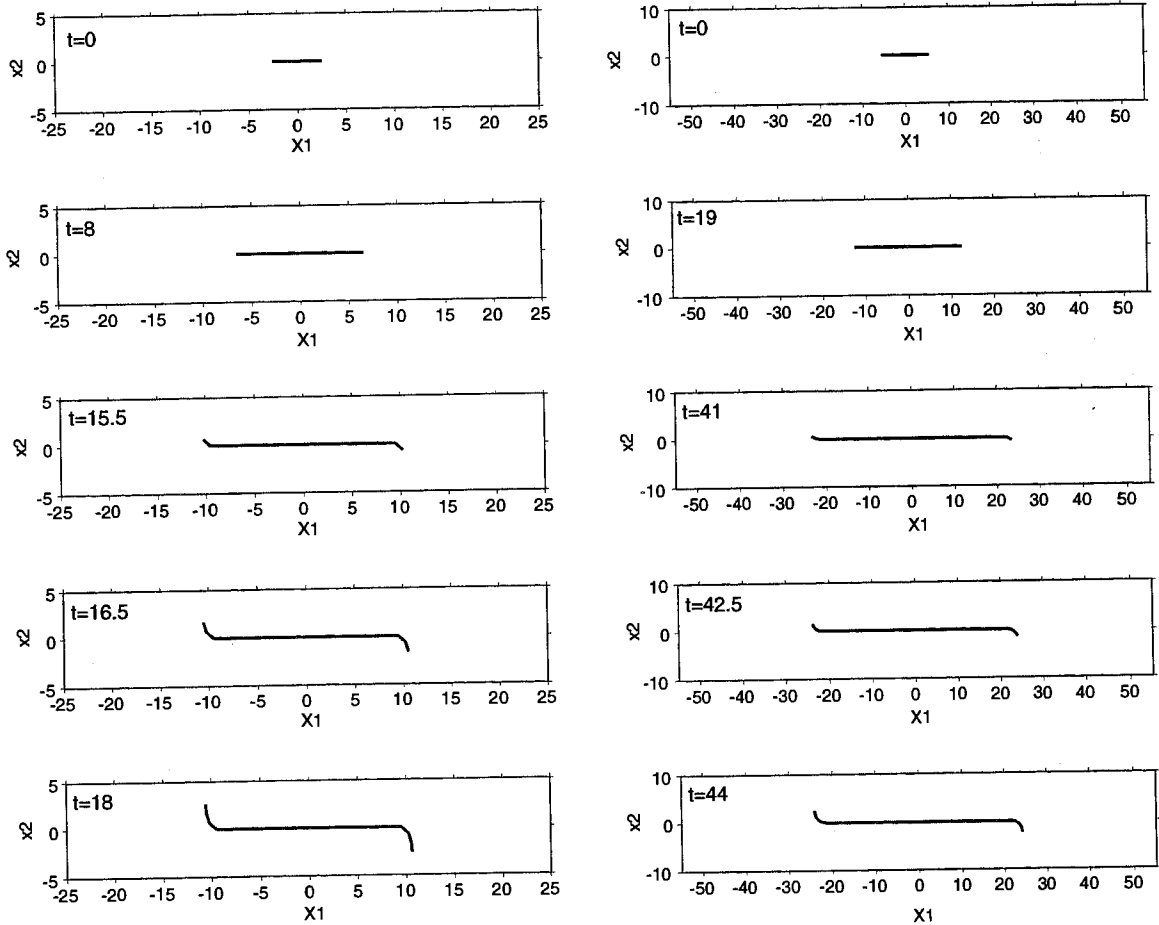


図 4.3: 分解能の異なる計算結果の比較。臨界亀裂の離散数を左は 5、右は 11 にとった。分解能をあげると (右) 屈曲角度変化が小さくなり、より滑らかな破壊形状になる。最終的な破壊形状の傾向は変化しない。

4.2 高速破壊伝播中に起きる剪断型亀裂の自発的停止機構

形状を自由にした亀裂の自発的破壊成長の数値計算の結果、亀裂は高速破壊伝播に至ると自ずから曲がりはじめ、その後、亀裂の進展は停止した。本節ではこの破壊の自発的停止過程をもたらす動力学機構について考察することにする。

高速破壊伝播中に起きる亀裂の自発的形狀複雑化の動力学

まず、高速破壊伝播中に起きるフープ応力の傾きをもたらす動力学について考えよう。破壊が動的に伝播するということは、応力解放を起こす新たな亀裂面を弾性波の時間スケールで生成し続けることである。新たな亀裂面における短い時間スケールで起きる応力エネルギーの解放は亀裂面上に速い滑り速度をもたらし、その速い滑り速度により生じた弾性波動が媒質中に伝播していく。この新たな亀裂面生成に伴う波動が作り出すフープ応力の時間発展を考えよう。

そのために、一つの離散滑り速度要素上に単位滑り速度を $t = 0$ ステップ目に与えた後の、要素端点におけるフープ応力の応答を計算した (図 4.4 参照)。 $t = 0$ の単位滑り速度に対して、フープ応力は波動が到着する $t = 0.5$ より後の時間ステップに値を持つ。 $t = 0.5$ の応答では亀裂面より後方 ± 95 度で最大値をもち、 $t = 1$ で亀裂前方 ± 46 に移動する。 $t = 1.5, 2, 2.5$ の波動が伝播していく過渡的な応答の後に、フープ応力はほぼ定常状態に達し ($t = 3, 3.5, 4, 4.5$)、静的極限に漸近していく。この極限は単位静的滑り量に対する静的フープ応力になり最大値の方向は 0 度になる。すなわち、フープ応力の単位滑り速度応答はごく短い緩和時間を持つ波動の卓越する遷移的部分 (最大方向は $\varphi \neq 0$ 度) とその後を訪れる静的滑りに対応する部分 (最大方向は $\varphi = 0$ 度) に分けて理解することができる。このフープ応力の単位滑り速度応答を基に、静的平衡にある亀裂の先端から動的破壊が始まり次第に加速していく亀裂先端のフープ応力の変化を考えよう。破壊速度が遅い間は、新たな破壊面から放射される波動が補充される割合が小さく、遷移的部分はまもなく緩和してしまい $\varphi = 0$ 度が最大方向の静的な応力場応答が卓越する。次第に破壊速度が高くなり更なる亀裂面生成による波動場の供給の割合が波動応力応答の緩和の割合を越えるようになると、遷移的部分が卓越し始める。こうして最大剪断フープ応力の方向が亀裂面方向からずれ始め、その結果、破壊面形状が自発的に曲がり始めるのである。破壊進展にともなう波動場は屈曲以前の直線亀裂進展方向に沿って卓越しているが、亀裂がこの波動卓越方向からずれる始めるとそれまで放射されてきた波動はただちに亀裂先端から遠ざかっていく。このとき亀裂先端を通過する波動の作り出す応力集中の効果で亀裂面はより広角に屈曲を深める。

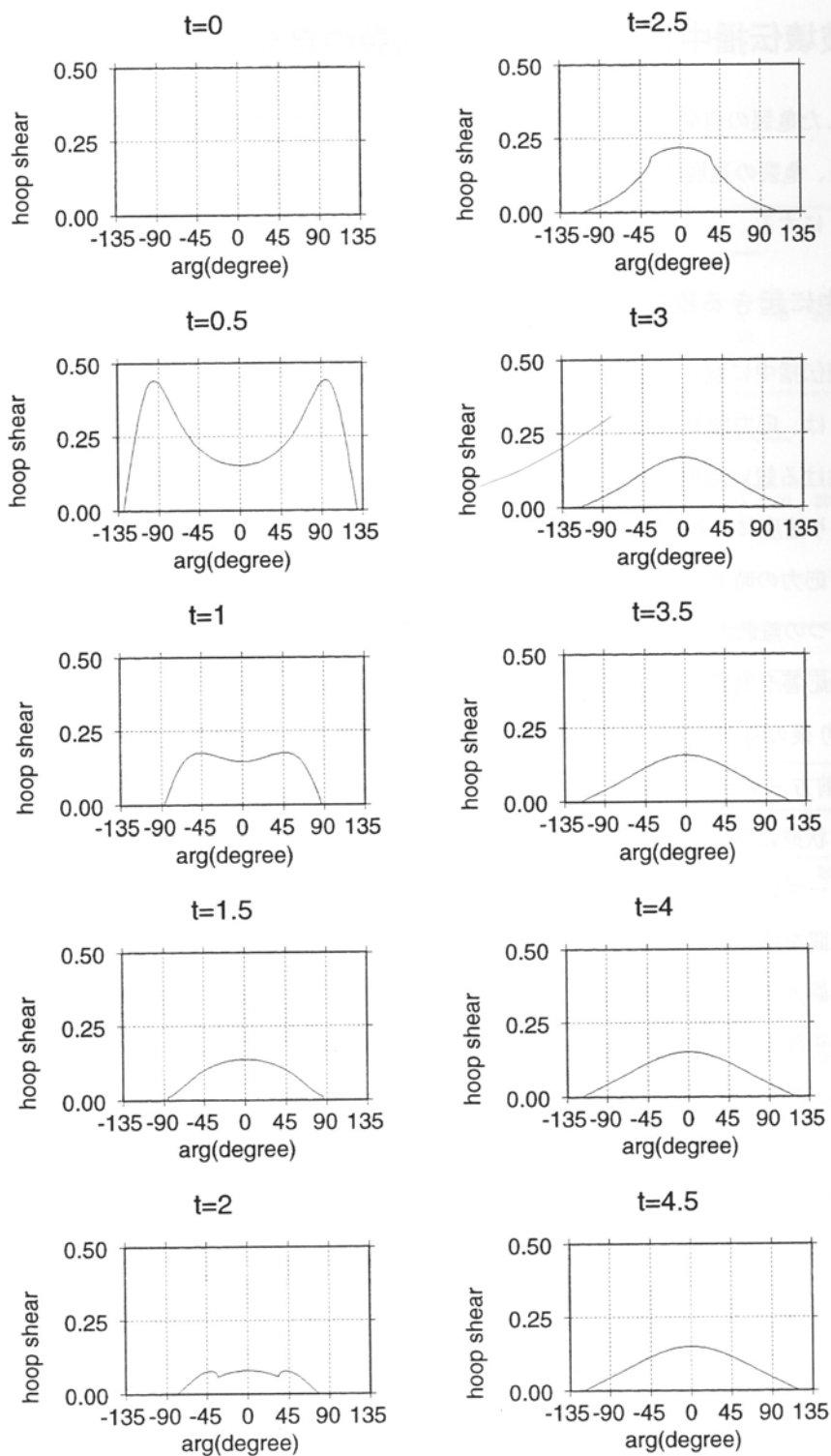


図 4.4: フープ応力の単位滑り速度応答。 $t=0$ の単位滑り速度を与えた亀裂要素の端点におけるフープ応力の応答。波動の寄与は剪断フープ応力の最大方向を $\varphi \neq 0$ 度方向にするが ($t=0.5, 1$)、波動はすぐに亀裂付近から遠ざかるので、 $t=3$ 以降はほぼ静的滑り応答に近い値で変化しなくなる。

亀裂形状の変化がもたらす破壊成長の停止機構

さて、破壊が曲がった後に成長が停止するかどうかは別の要因に支配されている。それは亀裂面の角度の変化による境界条件の変化である。本研究で考えてきた、面内剪断型亀裂は2方向からの圧縮応力場の中で破壊成長する。この応力場には2つの共役な最大剪断面が存在し、それぞれの面に沿って破壊が生じたときの滑りの向きは右横ずれと左横ずれとなり互いに逆である。本論文ではこの共役な最大剪断面のうち右ずれの面に初期亀裂を置き破壊を計算してきた。この剪断面に沿って破壊が起きる、すなわち、剪断応力の解放が起きると亀裂面上に右ずれの滑りが生じる。剪断応力の解放により破壊は加速していくのであるが、前述の通り亀裂は高速破壊の最中に波動の作り出す応力集中の効果により自発的に曲がり始める。屈曲開始後、亀裂先端を通過していく波動の応力集中により亀裂面は広角に曲がる（もっぱら波動場の移動に注目して解釈しているが、最終的な破壊形状は屈曲途中の境界条件にも当然依存している）。この広角に曲がった亀裂面は進展を止めてしまう。なぜなら、この亀裂面では破壊が起きてももはや剪断応力が解放できない境界条件になるからである。2方向の圧縮応力の下では亀裂面が45度より広角になると、剪断応力が解放するための滑りの方向は左滑りに変化する（図4.5参照）。従って、右ずれの亀裂面の破壊は広角度になると破壊が進行しても歪みが解放されずに逆に増加することになってしまう。この負の剪断応力降下量という境界条件になった亀裂面では右ずれ滑りの成長が抑制され、亀裂先端の応力集中が低下して破壊基準値を越えることができなくなり亀裂の進展が停止してしまうのである。従来の直線亀裂の破壊成長の停止機構の一つに亀裂面上で負の応力降下量を考えるものがあるが、この自発的破壊停止の巧みなところは応力テンソル \mathbf{s}^0 が空間一様であっても亀裂の向きによって応力降下量が負に転じる場所である。この点が、直線亀裂の破壊において負の応力降下量により強制的に破壊を停止する考えかたと異なる。剪断型亀裂は動的な効果により自発的に亀裂面の傾きをかえ、その結果自動的に境界条件が負の応力降下になって止まるのである。

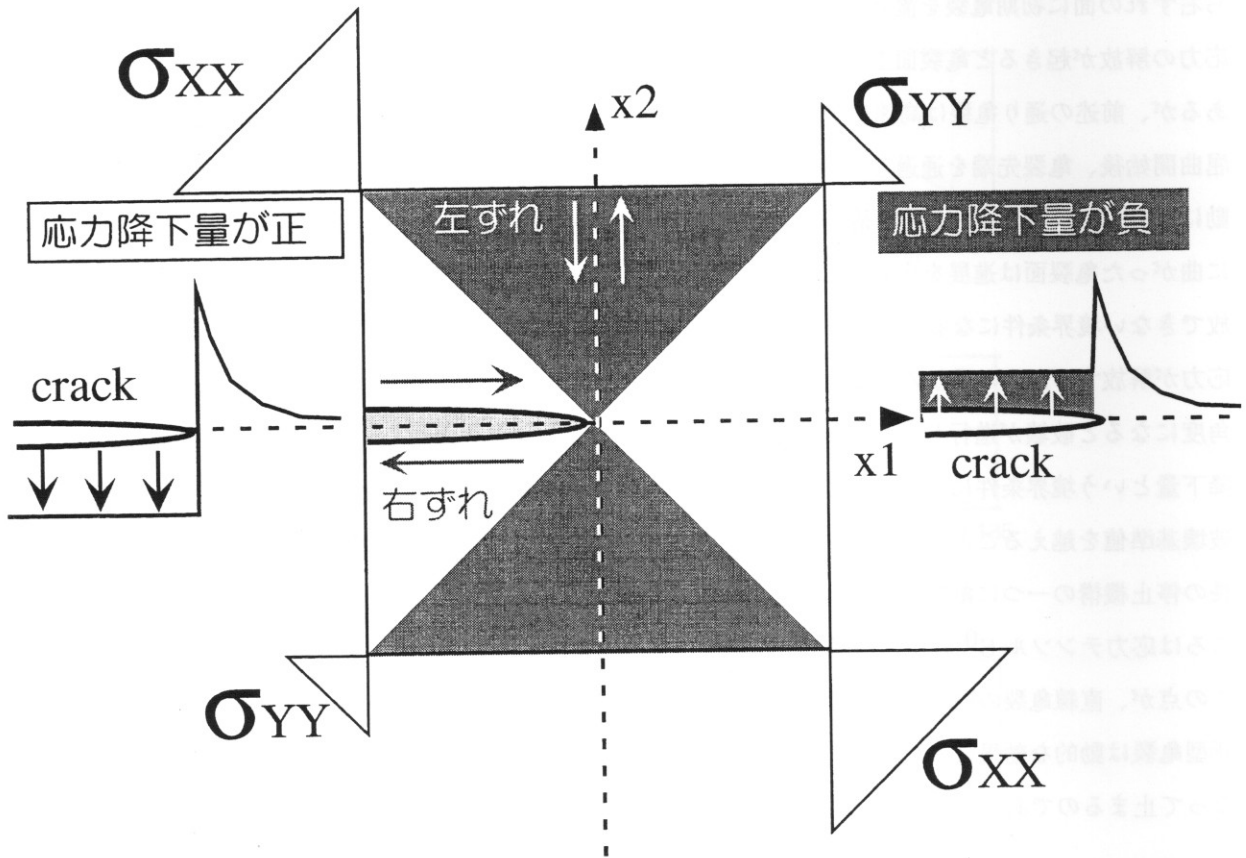


図 4.5: 剪断応力低下量の方角依存性。2 方向の圧縮応力下においては、剪断応力を解放する共役な剪断面が存在し、互いに応力を解放する滑りの向きが逆である。右滑りの破壊面が高角度になると破壊しても応力解放しない領域に入るため破壊成長が停止する。 $\mu_f = 0$ の場合、境界条件の符号が変化する角度は ± 45 度になる。

4.3 自発的破壊停止機構の諸性質

破壊停止機構には、本論文で明らかにした破壊パラメータ様のモデルでも発動する自発的破壊停止機構と従来型の直線亀裂形状限定の下で破壊パラメータ不均質による強制破壊停止機構がある。本節では両機構による破壊成長停止過程の比較を行う。強制破壊停止のモデルとして代表的な二つのモデル、自発的停止のモデルとして既に示した二つのモデルを用いる。

- バリアーモデル：破壊形状は直線限定、亀裂面上の $|x_1| \geq 10.5$ で破壊強度無限大のバリアーを置く、亀裂面上で応力降下量は一様で 1.0 を与える。
- 負の応力降下量モデル：破壊形状は直線限定、亀裂面上の破壊強度は T_t^c で一様、亀裂面上の応力降下量は $|x_1| < 6.5$ で 1、 $6.5 \leq |x_1| \leq 9.5$ の範囲で線形に減少し、 $|x_1| > 9.5$ の範囲で -0.25 になる。
- 「分岐モデル」と「屈曲モデル」：破壊形状自由：一様応力 S^0 の圧縮から応力降下を起こす（初期亀裂面で 1.0）、破壊基準値一様。

各モデルの破壊開始から停止までの亀裂先端位置の時間発展を図 4.6 に示した。バリアーモデルでは亀裂面上での応力降下量が一様であるので速やかに加速し $|x_1| = 10.5$ で突然停止する。自発的破壊モデル 2 つの場合の破壊の時間発展も同様に急激な加速ステージと突然の亀裂進展の停止が起きる。これに対し負の応力降下量モデルでは、正の応力降下の範囲では破壊が加速するが、負の応力降下量の領域に進入すると減速がはじまりゆっくり止まる。このことから、自発的な屈曲による停止過程は亀裂先端の運動としてはバリアーモデルと見かけ上同じである。

次に破壊停止後の亀裂面上の境界条件と亀裂先端の最大剪断応力の模式図を図 4.7 に示す。バリアーモデルでは応力降下量一様で変化しないために亀裂長が長くなるとそれだけ亀裂先端の剪断応力値が大きくなっている。そして、この剪断応力の集中によっても壊れないバリアーにぶつかることによって亀裂の進展が阻止される。負の応力降下量モデルでは、負の境界条件領域に破壊面が深く入り込むに従い亀裂先端の最大剪断応力値が低下していき、ついには基準値を越えることができなくなり停止する。自発的破壊停止モデルでは、かかっている応力は一様なのであるが、亀裂面が傾くことにより自動的に応力降下境界条件が負の値に転じる。これにより、亀裂先端の応力集中が減ることになり、破壊基準値を越えることができなくなり破壊停止する。亀裂先端の応力の観点からすると、自発的破壊は負の応力降下の要因で停止する事がわかる。以上をまとめると、自発的破壊停止は亀裂先端の運動はバリアー的に止まり、亀裂先端の応力集中の観点からは負の応力降下量モデル的にとまっている。

最後に各モデルの破壊過程から放射される理論変位速度波形を図 4.8 に示す。波形はローパスフィルターを施してある。観測点は x_1 軸上 $x_1 = 20$ の地点に起き、変位速度は亀裂進展と直交方向の速度成分が v_2 、亀裂進展方向が v_1 である。バリアーモデルと自発的破壊停止モデルの波形は大まかな形で一致する。これ

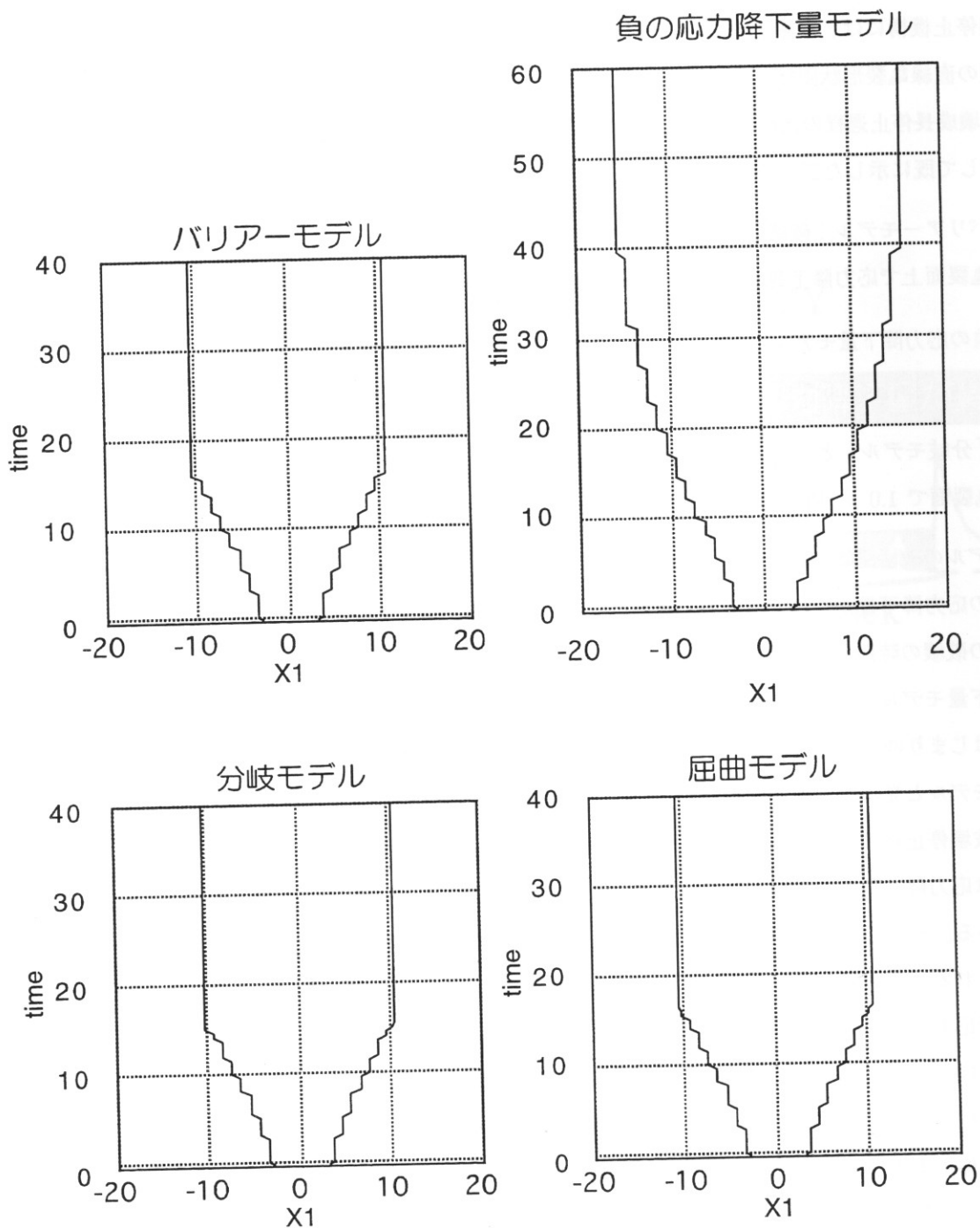


図 4.6: 検討モデルの破壊成長の時間推移。上は強制破壊停止の2つのモデル。下の自発的破壊停止モデルはバリアーモデル的にとまる。

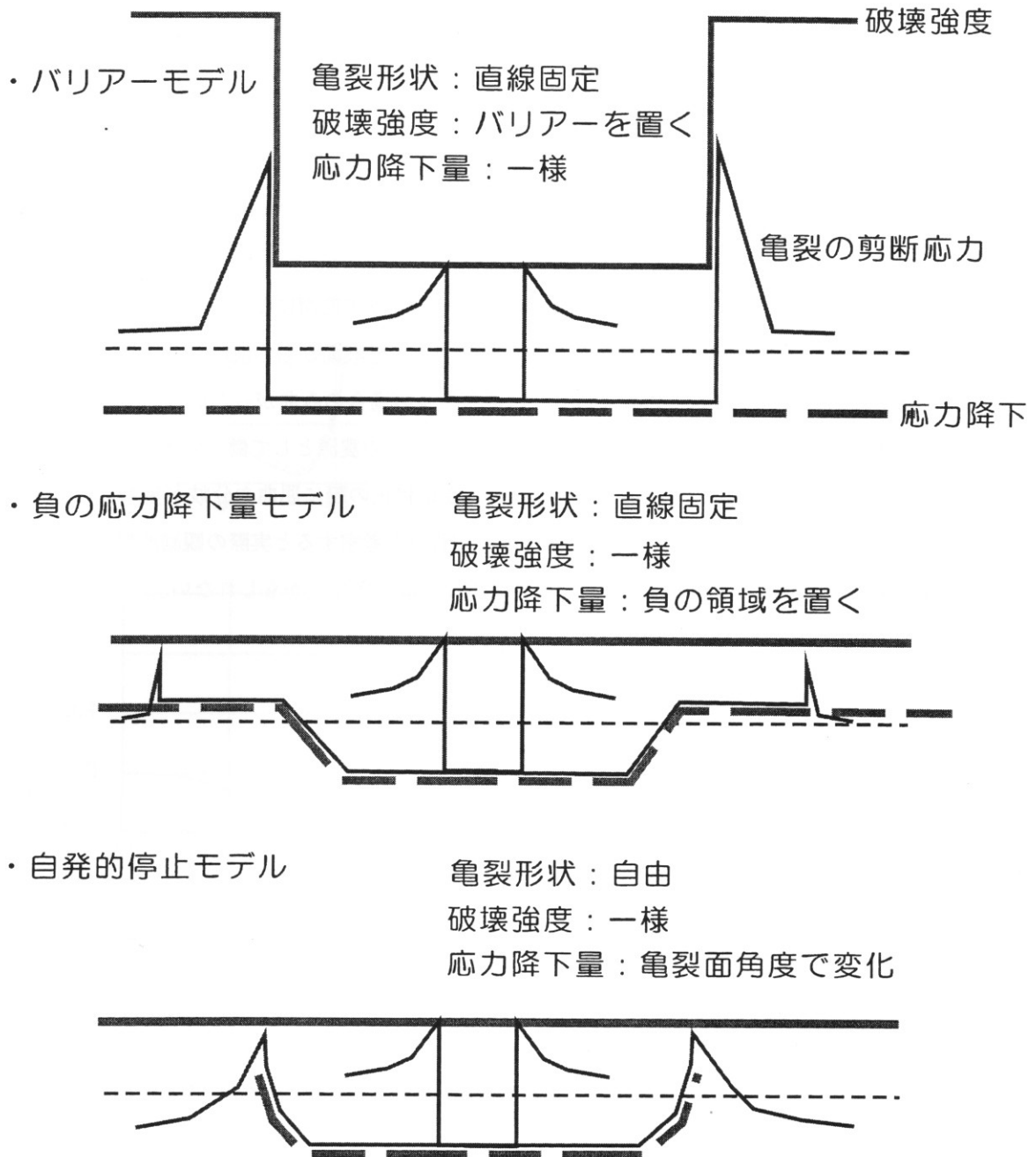


図 4.7: 検討モデルのパラメタ分布の模式図。各モデルの破壊強度、応力降下量、破壊成長停止後の亀裂先端の剪断応力が定性的に示してある。

は亀裂面上の滑りの解放過程の時系列がほとんど同じことに対応する。自発的破壊停止モデルの波形の立ち上がり部分には $t = 30$ 以降に短周期の波がのるのが見える。これは破壊面の分岐と屈曲のフェーズである。ただ、曲がった後の破壊面は短く、応力降下境界条件が負になることで滑り速度も抑制されるので、大振幅の波動として波形に現れることはない。負の応力降下量モデルの場合は負の応力効果領域に亀裂面が進入して停止に至るまでの部分の亀裂面上で滑り速度が抑制されるようになる。このことにより、波形の振幅が小さくなっている。波が片側一回振動する時間は破壊の停止の情報が S 波速度で亀裂中心まで届くのかかる時間に相当している。また、これは亀裂の進展が停止して滑り速度が増加から減少に転じるのかかる時間とも解釈される。

次に速度波形の v_1 成分を見てみると、直線形状の場合ちょうど節面になっているので理論波形の振幅は 0 である。分岐モデルは破壊形状が x_1 軸に対象になるので、分岐面からの波動がちょうど打ち消し合いこれもまた理論波形の振幅は 0 になる。よって、屈曲モデルの場合のみ曲がった亀裂面からのフェーズが見える。これは、傾いた破壊面が直線部分とは異なるメカニズムの震源として働くためである。このメカニズムの途中変化による波形の違いを利用すれば、自然地震の停止の際に屈曲や分岐が実際におきていることが検証できよう。しかし、地震波伝播経路の地殻の不均質性を考慮すると実際の観測波形の振幅情報から自発的破壊停止のこの微妙な違いのフェーズを区別することはできないかもしれない。

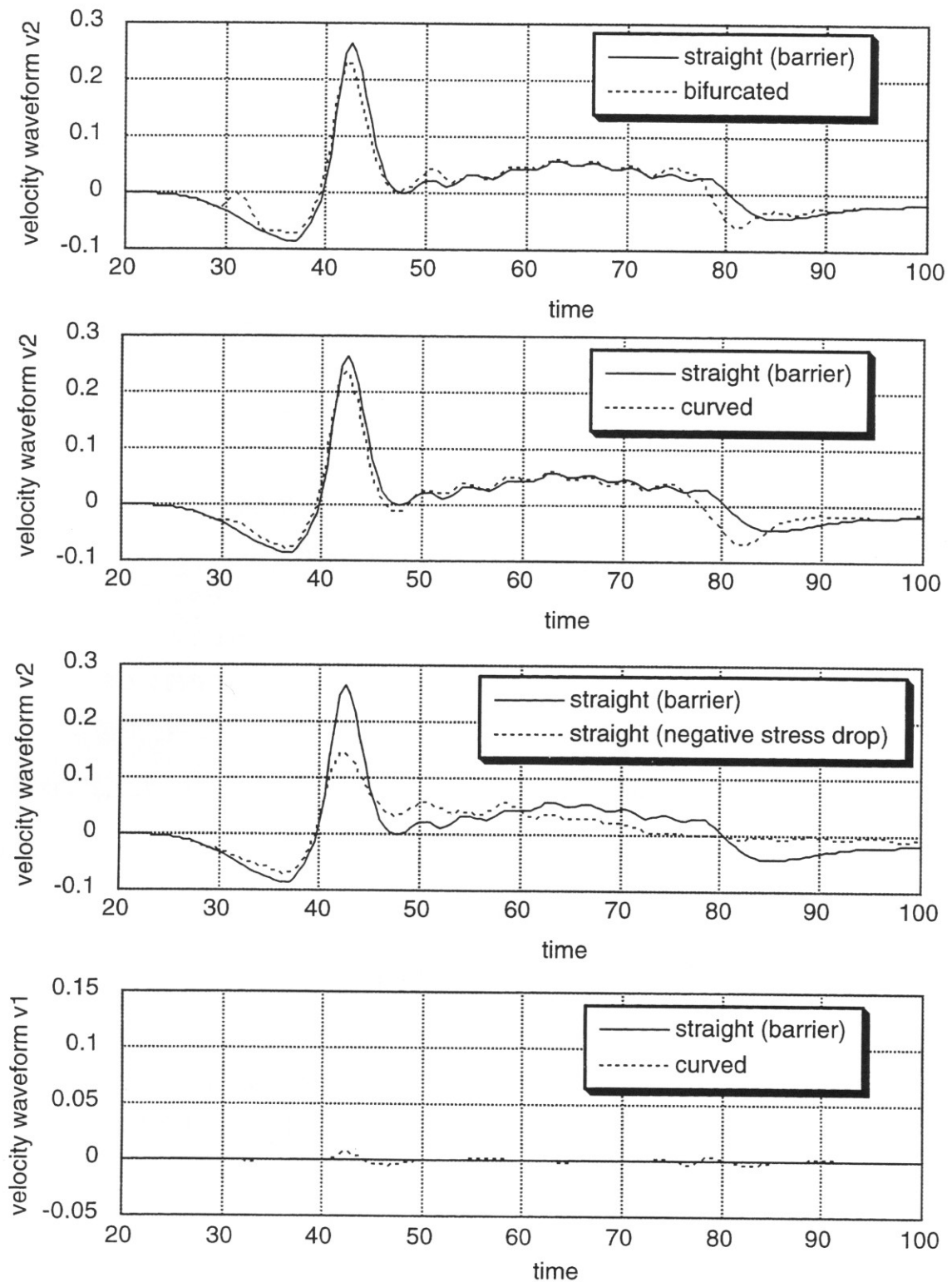


図 4.8: 各モデルの破壊過程から放射される理論変位速度地震波形。上、中上、中下： v_2 成分の速度波形。下： v_1 成分の速度波形。 v_2 成分の図に比べて縦軸を 2 倍拡大してある。

4.4 自発的停止機構の破壊パラメタ不均質依存性

破壊パラメタが一様分布する媒質においては、亀裂の大きさが初期亀裂長の約4倍に成長した時点で自発的破壊停止機構が発動して進展がとまった。しかしながら、地震が起きる断層帯においては破壊パラメタが完全一様に分布する訳ではない。不均質の存在下で破壊がどこまで成長するのかは地震規模予測にとって大きな関心事である。本研究では、不均質がある場合に破壊がどこまで成長して止まるのかを調べる。なお、本節で考えるパラメタ不均質は従来の直線亀裂の自発的破壊問題においては亀裂進展の停止にはほとんど寄与できない弱い不均質である。

4つのパラメタ不均質モデルを用いて、既に図4.2に示した「屈曲モデル」と比較する。亀裂がある程度成長してからパラメタ不均質領域に亀裂先端が進入するように設定した。これは臨界亀裂の初期状態を全てのモデルで同じにするためである。

臨界亀裂の初期状態は、基準応力 \mathbf{S}^0 の下、初期亀裂長 $l_0 = 5$ 、破壊基準値は $T_t^c = 1.21$ 、で全てのモデルで統一してある。基準モデルでは停止亀裂長は $l_{stop} = 21.24$ であった。

考えた不均質モデルは、応力 \mathbf{S} の大小、破壊基準値 T_t^c の大小の4種類である。図4.9に示すように臨界亀裂のある白地領域ではパラメタを基準モデルとそろえて、灰色地になるところから基準値と異なるパラメタを与えた。それぞれの不均質の下、自発的破壊伝播の計算を行い、最終的な破壊形状を決定した(図4.9参照)。結果は以下の通りである。

- $|x_1| \geq 5.5$ で破壊基準値が80%の場合、破壊進展停止時刻 $t = 9.5$ 、停止亀裂長 $l_{stop} = 13.66$
- $|x_1| \geq 9.5$ で破壊基準値が150%の場合、破壊進展停止時刻 $t = 40.5$ 、停止亀裂長 $l_{stop} = 36.33$
- $|x_1| \geq 8.5$ で応力が50%の場合、破壊進展停止時刻 $t = 35$ 、停止亀裂長 $l_{stop} = 28.40$
- $|x_1| \geq 5.5$ で応力が200%の場合、破壊進展停止時刻 $t = 9.5$ 、停止亀裂長 $l_{stop} = 13.32$

この結果を見ると、自発的な破壊停止機構に対して応力と強度の不均質は従来の強制的な破壊停止機構の場合とは全く正反対の効果をもたらすことが分かる。従来の強制的な破壊停止の考えでは、破壊強度が低い、または、応力降下量大きいことは破壊が促進する効果に働き停止には寄与しない。しかし、形状が自由な場合には破壊が促進されるがためにかえってはやい段階で自発的屈曲が生じ、より短い亀裂長で進展が止まる。反対に、破壊強度が高い、または、応力降下量が小さいことは破壊成長が抑制される方向に働くのであるが、この効果により破壊が高速化するまでにかかなり長い破壊成長が必要になりかえって自発的破壊停止機構の発動が遅れる結果となる。

本節の計算結果によれば、破壊パラメタの弱い不均質性が破壊規模にかなり影響を及ぼす。このことは、破壊強度が極端に高いバリアー領域やそもそも歪みが蓄積していないような領域といった明らかに破壊停

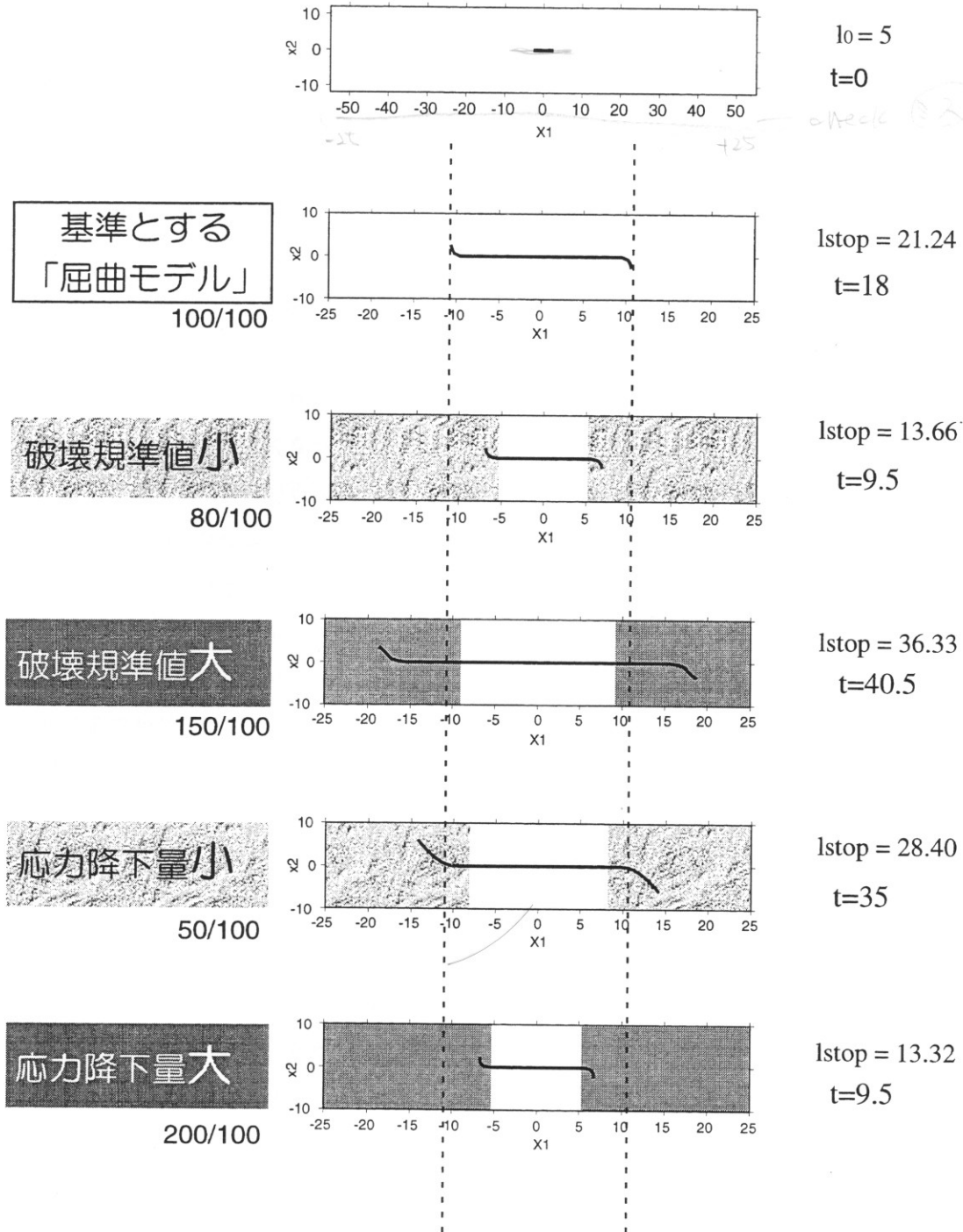


図 4.9: 不均質による破壊規模の比較。各モデルの不均質の領域を灰色で表し、不均質の大きさを百分率で示した。中央の無色の領域では破壊パラメタを「屈曲モデル」と揃えてある。

止をもたらす不均質の存在が予めわかる場合を除けば、破壊がどの程度まで成長した後に停止するか破壊開始以前に正確に予測することが困難であることを示唆している。

4.5 断層帯構造における自発的破壊成長停止機構

地震は繰り返し起きることによって、断層帯という地学的に特徴のある構造をつくる。地表に露出した地震断層帯の地表面のトレースの観察より、断層帯の内部には様々なスケールの破壊要素（小断層、亀裂）が存在することがわかっている（Tchalenko and Berberian 1975）（図 4.10 参照）。これらの破壊要素は周囲の地殻岩石に比べ破壊強度が低く断層破壊において力学的には既存の弱面として振る舞う。すなわち、地震が起きる断層帯は、様々なスケールの既存弱面の集合体としてとらえることができる。

これまで示してきた亀裂の自発的な進展停止は破壊強度分布が等方的である場合に起きた。断層帯の構造を仮定しても、断層帯に比べて亀裂長がかなり小さい場合には破壊強度は等方分布であると近似できる（図 4.11 参照）。また、この破壊停止機構は破壊強度が不均質に分布していてもその分布には関係なく起きることは前節に既に示した通りである。しかし、この断層帯のなかで亀裂が密分布して亀裂群が容易に動的結合できるような状況では、亀裂は断層帯よりも長い大きさにまで比較的容易に成長するであろう。亀裂長が断層帯よりはるかに大きくなった状況下では、近似的に、亀裂に沿う面上のみが破壊強度の低い領域となり、周辺の岩石は強度が高い領域になる。このような断層帯特有の不均質構造に対しては、破壊は止まりにくくなるであろう。なぜなら、破壊が高速化して自発的に曲がろうとし始めても亀裂に沿う面以外は強度が高いので曲がるのが困難になるからである。

本節では、上に述べた断層帯に特有な破壊強度不均質の下での破壊成長停止について調べる。断層帯で始まる破壊は力学的弱面を選んで壊れようとするであろう。このような状況でも破壊は自発的に曲がって止まる事ができるのかどうかに興味の対象である。

断層帯モデルにおいて弱面の媒質の力学的諸条件を 4.1 節の「屈曲モデル」とそろえる。すなわち、臨界亀裂の大きさ、弱面の破壊基準値は屈曲モデルと同じ $l_0 = 5$ 、 $T_f^c = 1.21$ である。周辺岩の破壊基準値は弱面の 2 倍に決めた。この断層帯モデルの自発的破壊計算を行い、基準モデルと計算結果の比較を行った（図 4.12 参照）。破壊強度が等方的である場合には破壊は約 4 倍長まで成長した後、自発的に停止する。それに対して、既存の弱面が予め用意されている場合には、破壊は弱面に沿って成長しつづけ、基準モデルよりも大幅に長い停止亀裂長 $l_{stop} = 87.84$ にまで達した。これは、先に述べたように亀裂面から最大剪断応力がずれ、それが周囲の破壊強度の高い領域を破壊するためには破壊が十分成長し、高速化する必要があるからである。とはいえ断層帯構造においても破壊が自発的に停止することが確かめられた。Freund (1990) の解析解によると破壊速度が飽和速度に近づく極限では、亀裂面からずれた方向の最大剪断応力値は亀裂前方の値と比して無限に大きくなる。従って、理論的には周辺岩の破壊強度が弱面の強度より十分高くても自発的に破壊停止できることになる¹。

¹本数値計算のグリッドサイズを用いて現実的な計算時間に収まるの範囲内の規模で計算を行うと、亀裂面からずれる方向での最大剪断応力値は亀裂前方応力値のおよそ 3 倍までは表現できていることを確認した。

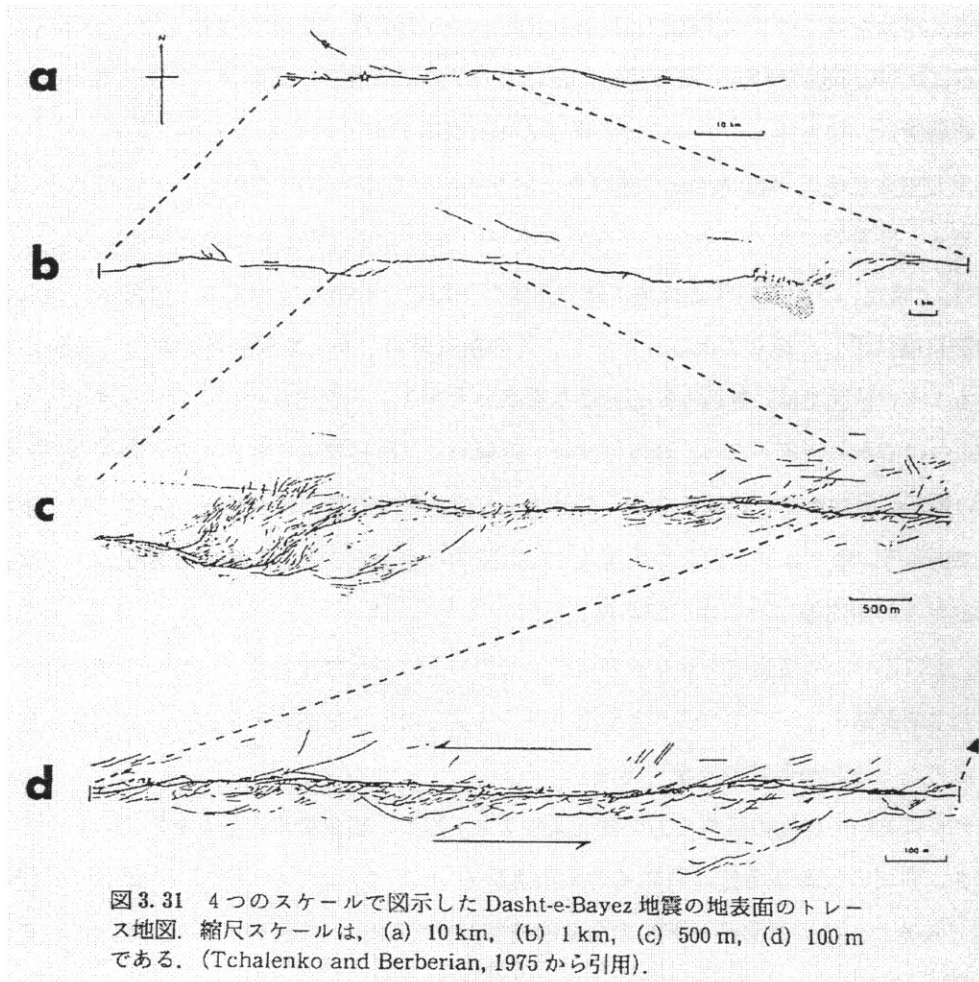


図 4.10: 断層帯の地表地図の例。さまざまな規模の破壊要素が存在する (Tchalenko and Berberian 1975)。

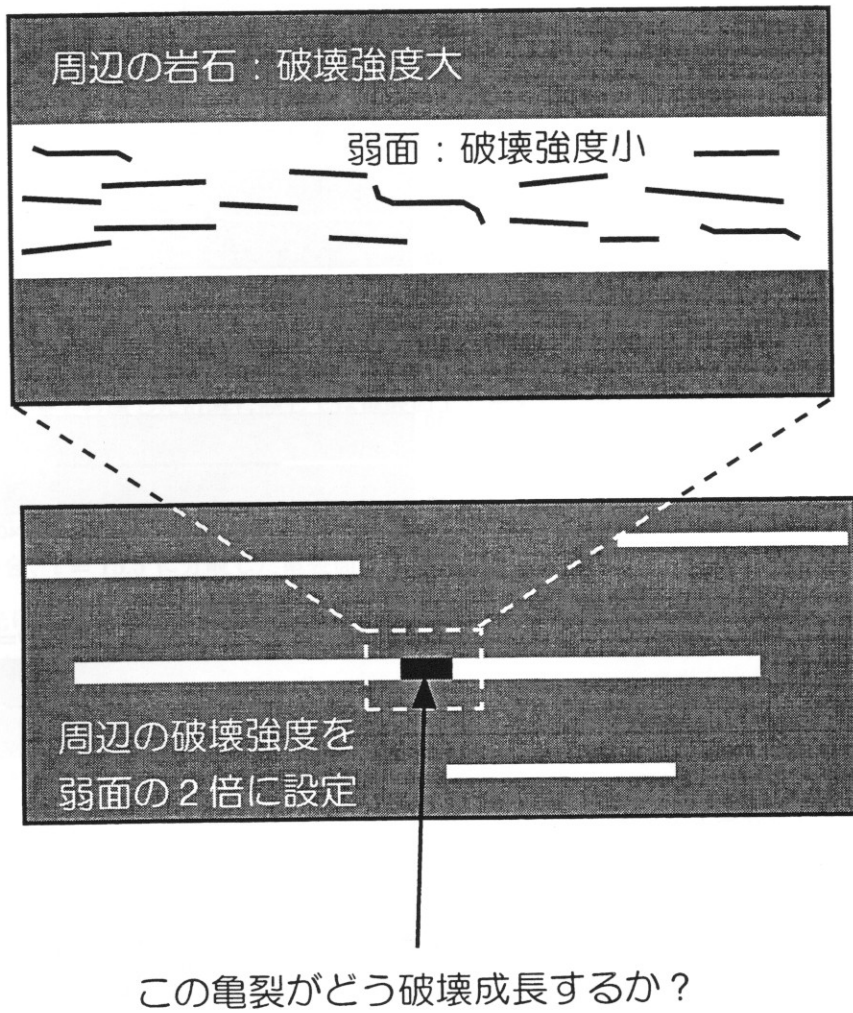


図 4.11: 断層帯の階層構造。パラメタが均質と考えられるスケール（上）より亀裂が大きく成長すると上部階層の不均質を考える必要が生じる（下）。

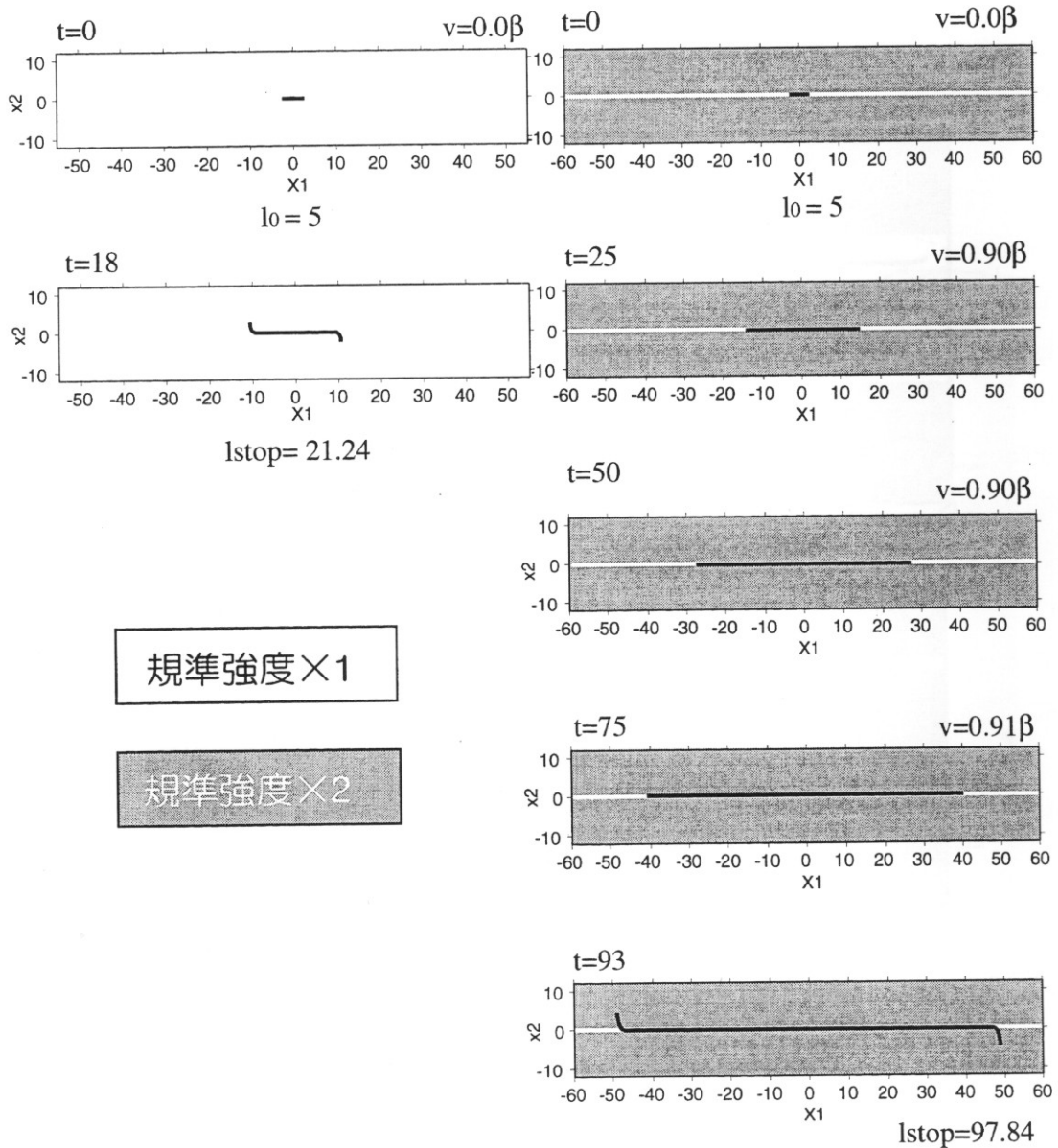


図 4.12: 既存の弱面に沿って始まる破壊過程のスナップショット (右)。均質な強度分布の場合 (左) と比べて、成長が継続的である。破壊面が曲がり始める破壊伝播速度は均質な強度分布の場合は $v = 0.87\beta$ であったのに対して、弱面に沿う場合は $v = 0.91\beta$ とより高速化する必要がある。

4.6 摩擦の存在下で起きる自発的破壊停止機構

本節では亀裂面に摩擦力を導入して自発的破壊問題を解く。亀裂面上に摩擦力が働く場合、最も大きな応力降下を起こして亀裂先端に集中する応力が最大になる角度 φ_0 を初期亀裂面 Γ^0 にとる。この初期亀裂面の角度は $\varphi_0 = -\psi_0/2$ であり負の方向へ傾く。 ψ_0 は岩石破壊実験で内部摩擦角と呼ばれる角度であり、 $\psi_0 = \arctan \mu_f$ で決まる。これは、応力降下量最大という条件から簡単に導かれる角度である。 $\mu_f = 0$ の場合には境界条件に τ^0 (差応力の半分) しか関係しなかったが、摩擦力には法線応力依存性があるので σ^0 (封圧和の半分) も関係するようになる。この場合、初期亀裂面での応力降下量は τ^0 よりも小さくなる。すなわち、破壊面で剪断応力は摩擦力までしか下がらず全ては解放しない。数値計算は、初期亀裂面上の応力降下量で規格化した量を用いる (表 4.1 参照)。この規格化で亀裂が直線形状を保つ範囲では亀裂の変化分による数値計算値は全く同じになり、摩擦の無い場合の計算と全く同じ結果をもたらす。なぜなら、亀裂の作り出す法線応力は亀裂面上ではちょうど 0 であるので、動的破壊の最中も摩擦力は変化せず、従って、境界条件の亀裂面上一定であるからである。従って、摩擦の効果は亀裂が直線形状からはずれはじめてから起きる。なお、摩擦を考慮した計算に際しては亀裂面上で左ずれの滑りを禁止し、負の滑り速度が起きる時には滑り速度 0 を与えている。

摩擦係数が $\mu_f = 0.25$ と $\mu_f = 0.5$ の場合の計算結果をそれぞれ図 4.13、4.14 に示す。摩擦係数が $\mu_f = 0.25$ の場合、 $t = 15.5$ に分岐した亀裂面は摩擦力が小さくなる方向 (亀裂の法線応力が引っ張り場になる方向) が先に進展する ($t = 16$)。この点を除けば摩擦の無い場合と破壊過程に違いはなく、最終的な破壊形状は摩擦無しの場合とほぼ同じになる。これに対して、摩擦係数が $\mu_f = 0.5$ の場合には破壊形状に変化が見られる。亀裂先端が分岐したのちしばらくは亀裂の作り出す応力場が引っ張りの方向の分岐が成長する ($t = 16.5$)。これは、この方向の破壊面に働く摩擦力が低下することにより滑りが成長しやすくなる結果であり、図 4.1 に示した「分岐モデル」において定性的な摩擦力の大小で選択した亀裂進展方向と一致する。しかし、その後逆に圧縮応力の方向の枝が成長する ($t = 23.5, 29.5$)。これは、分岐後の各亀裂面の成長角度の違いが境界条件に差をもたらすからである。亀裂が作り出す応力場が引っ張り方向では、それまで放射されてきた波動応力場がの亀裂先端を通過していく過程で更に屈曲角度が広角の方向に成長する。この広角度の亀裂面では負の応力降下の境界条件になり破壊停止に至るのであるが、角度が広角であればそれだけ負の応力降下量が大きくなり急激なブレーキ効果が働き破壊進展が停止する。他方の分岐面では、相対的に大きな摩擦力によって破壊成長が抑制されるがために波動の応力による破壊面の広角化があまり進まず負の応力降下量が小さい値に留まる。これにより破壊進展が停止するまで負の応力降下量の領域を、引っ張り方向に伸びた亀裂端に比べ長く進む必要が生じる。こうして、最終的な分岐の長さは亀裂による応力場が圧縮の方向に卓越するようになるのである。このように、摩擦係数が高い場合の分岐後の各枝の成長の違いは破壊面上の摩擦力が影響していることがわかる。

	$\mu_f = 0.0$	$\mu_f = 0.25$	$\mu_f = 0.50$
τ^0	1.0	1.37	1.90
σ^0	境界条件 と独立量	-1.64	-2.28



φ_0	0°	-7°	-13°
臨界亀裂面上の 剪断応力開放率	100%	75%	59%
基準状態で 応力降下量が 負に転じる角度	$-45^\circ, +45^\circ$	$-43^\circ, +29^\circ$	$-42^\circ, +16^\circ$
応力降下量が 負に転じるに 必要な φ_0 からの角度	$\Delta\varphi=45^\circ$	$\Delta\varphi=36^\circ$	$\Delta\varphi=29^\circ$

表 4.1: 摩擦を考慮した計算で用いた 2 組のモデルのパラメタ。参考のために $\mu_f = 0$ のパラメタを示す。摩擦係数を与えた後、 $\Delta T_i^T = -1.0$ になるように τ^0 、 σ^0 を調節する。 $T_i^c = 1.21$ 、 $l_0 = 5$ はモデル間で共通になる。

以上、摩擦係数の異なる二つモデルの計算結果を見てきたが、ともに破壊が自発的に停止することによって変わりはなく停止機構の諸性質は摩擦力無しの計算結果から得た知識で十分である。

さて、我々が見ることのできるのは地震発生後の破壊面だけである。第1章で取り上げた鳥取地震の推定断層面は亀裂の作り出す応力が圧縮方向に進んでいた（図 1.2 参照）。また、活断層の調査では圧縮の方向に断層が屈曲していることが普通であることが報告されている（松田 1967）。摩擦のない計算の「屈曲モデル」で引っ張り方向に破壊が進むと仮定したのは、摩擦力を考えた場合の自然な力学的選択であったのであるが、これでは現実断層と破壊の曲がる方向が逆になるという逆説が生じる（図 4.1 参照）。自然断層において摩擦力の増す方向に破壊が進むのかという逆説はこれまで力学的に説明がないままであった。本計算は、この一見すると力学的に矛盾している様に見える現実の断層の屈曲方向が、実は摩擦法則に従う動的な破壊成長過程の自然な結末であることを示している。

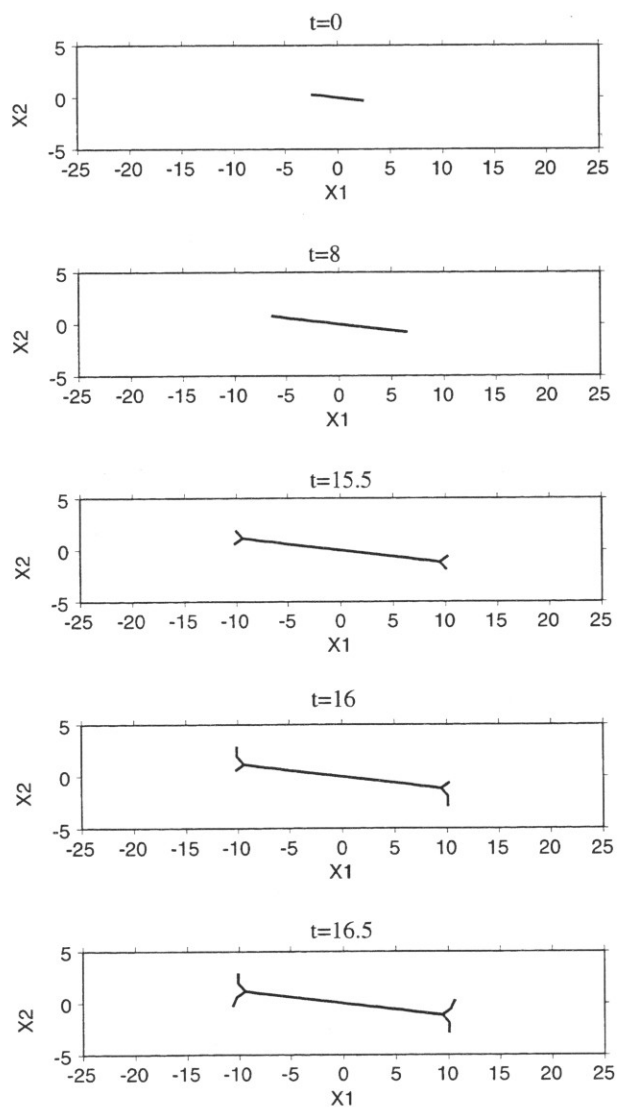


図 4.13: 摩擦係数が小さい場合の破壊過程 ($\mu_f = 0.25$) のスナップショット。 $t = 15.51$ に分岐した後の亀裂面のうち、亀裂の法線応力が引っ張り場になる方向が先に進展する ($t = 16$) 点が摩擦が無いときと異なる。最終的な破壊形状はほぼ同じになる。

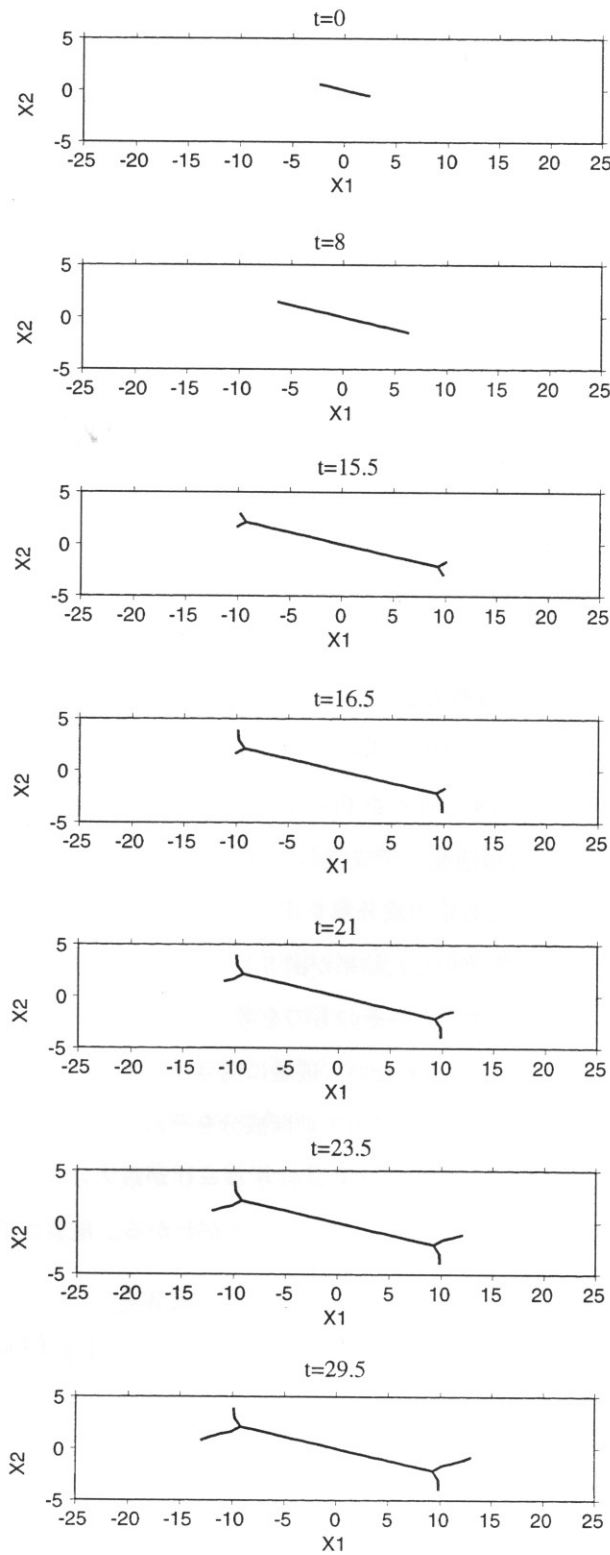


図 4.14: 摩擦係数が大きい場合の破壊過程 ($\mu_f = 0.50$) のスナップショット。破壊面は分岐した後、最終的には亀裂の作り出す法線応力場が圧縮の方向の成長が卓越する。引っ張り応力側の亀裂先端は突然進展を停止するのに対し ($t = 16.5$)、圧縮応力側の亀裂先端は進展が停止するまでに時間がかかる ($t = 29.5$)。

Chapter 5

議論

5.1 破壊の3つのモード

これまで本論文で取り扱ってきたのはモード II の剪断破壊である。破壊のモードにはその他にモード I の引っ張り破壊、モード III の剪断破壊がある。3つの破壊モードは亀裂面の破壊成長方向とそのとき生じる滑り方向の関係で分類される (図 5.1参照)。本節では他の破壊モードでモード II と同じように高速破壊伝播中に自発的な破壊停止が起きるのかどうかを Freund (1990) の解析解を利用して簡単に検討する。

Freund は弾性体中をある瞬間に破壊速度 v で成長している亀裂の先端付近の応力場解析を行い、各応力成分の特異項の方位分布解を得た。この応力成分解を用いて、亀裂が x_1 軸上を破壊成長している最中のフープ応力の特異項を構成したのち数値化した結果が図 5.1 である。なお、これは $\varphi = 0$ での値を規準に取った相対的な方位分布であり、応力の大きさそのものを考えるためにはこの他に亀裂先端からの距離 r 、応力拡大係数 K が必要であることに注意されたい。破壊に関与する応力として、モード I ではフープ応力の法線成分、モード II、モード III ではフープ応力の剪断成分をそれぞれ考えた。全ての破壊モードにおいて亀裂が静止しているとき、すなわち $v = 0$ では亀裂前方 $\varphi = 0$ が最大になる。しかし、破壊が高速化してくるとすべてのモードで最大応力が亀裂面からずれることがわかる。亀裂が高速化していき、最大応力が亀裂面からずれ始める破壊の臨界速度 v^c はそれぞれ

- $v_I^c = 0.62\beta$: モード I
- $v_{II}^c = 0.77\beta$: モード II
- $v_{III}^c = 0.44\beta$: モード III

になる。各モードの臨界速度の違いは応力波動の放射パターンの違いに対応していると推測される。

この Freund の解により、全ての破壊モードで高速化し臨界速度に達した亀裂は自発的に非直線形状を取ることが予想される。では、破壊形状複雑化のあと破壊が停止できるか、その可能性を見てみよう。それぞ

れの破壊モードをもたらす媒質にかかる遠方で作用する応力の方向は図 5.1 に示す通りである。それぞれの場合の初期亀裂面（最大応力解放になる面）と、その亀裂面から φ 傾いた面上で応力解放量がどうなるかを示した。モード II の場合は、亀裂面が曲がった後に負の応力降下領域に入ったため破壊しても歪みエネルギーが解放されなくなり破壊が停止したことを既に述べた。モード I の場合は亀裂面がどの方向を向いても応力の解放が負になる面はなく、破壊強度が均質で遠方応力一様のもとで始まった亀裂の破壊成長は永遠に停止しないと考えられる。モード III の場合には亀裂先端が 90 度以上曲がり U ターンすると歪みエネルギー解放が負に転じ止まることが可能である。実際そこまで曲がるか否かは、本論文の手法で自発的破壊計算を行ってみる必要がある。以上の考察をまとめると、モード I の破壊は歪みと破壊強度が均質である限り自発的成長停止の可能性は無く、モード III は今のところどちらかわからない、ということになる（図 5.2 参照）。

以上は弾性論に基づく亀裂の線形理論解のみに基づく考察であったが、破壊実験や地震観測の方面からは何がわかっているのだろうか。引っ張りによる材料破壊の分野では本来は不安定な破壊速度を制御しながらの実験が可能である。破壊速度を制御した引っ張り破壊の実験によると、破壊速度が $0.6V_R$ (V_R はレーリー波速度) より低速度では破壊面がなめらかであるのに対し、これより高速になると破壊面が粗くなることが報告されている (Fineberg et.al. 1992, Sharon et. al. 1995, Marder 1996, Sharon and Fineberg 1996)。Fineberg et.al. (1992) はこの現象を高速破壊伝播中に最大応力軸がずれることによりマイクロな分岐や屈曲が起きるからであると解釈した。破壊面が非直線化するが停止には至らないのは、本節の考察と調和的である。剪断型の破壊は破壊速度の制御が困難であり、また、剪断破壊は材料破壊実験研究者の興味の対象外であることから高速破壊時の挙動を調べた例がない。地震の観測波形の解析の立場からは、これまで地震の断層破壊速度の上限は 0.8β 程度であることが知られている (例えば阿部 1991)。この破壊速度の上限値は Freund の結果 (0.77β) と調和的であり、これ以上の高速域では破壊はなめらかにまっすぐ伝播できずに加速できなくなることの間接的な証拠と考えることができる。

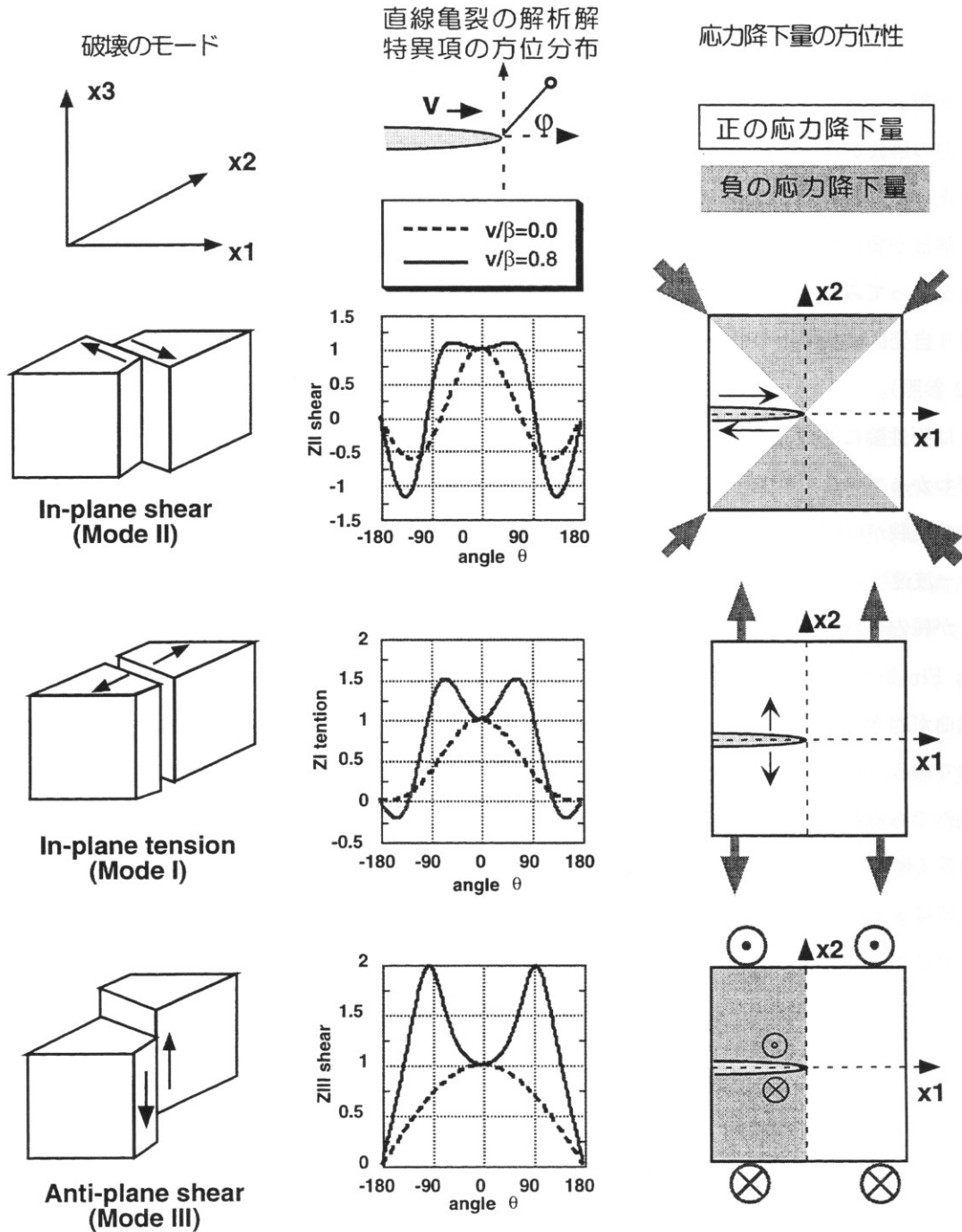


図 5.1: 左：破壊の3つのモード。中：それぞれのモードにおける破壊伝播中の亀裂先端のフープ応力特異項の方位分布。右：応力低下量の方位分布。剪断型のモード II、モード III は摩擦無しの場合の角度を示してある。

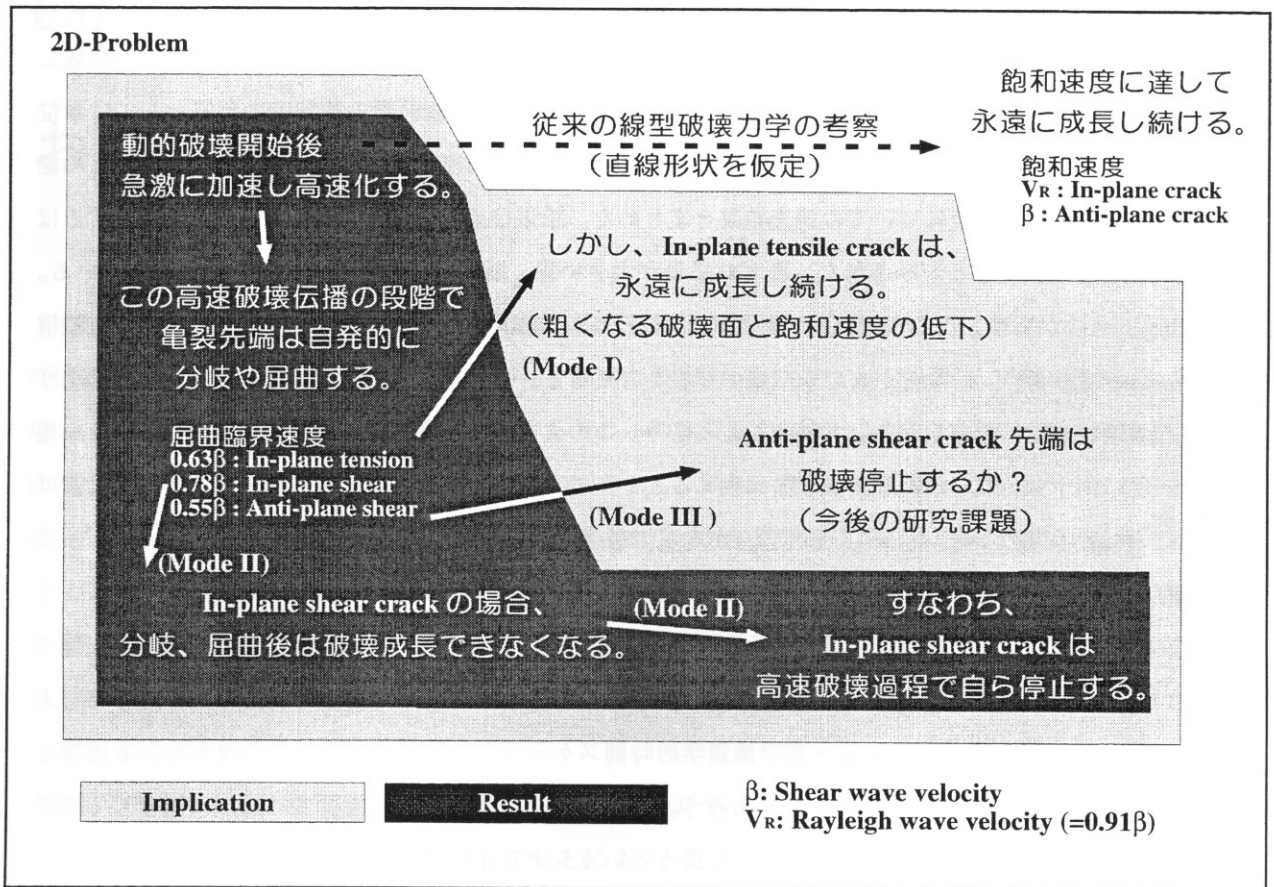


図 5.2: 2次元亀裂の自発的破壊停止機構の考察のまとめ。

5.2 断層形状の成熟過程と地震活動度

Stirling et.al. (1996) は断層の累積滑り量と断層形状の関係性を調べ、断層が成熟するほど断層の複雑度は減ることを指摘している。彼らは断層帯の形態的特徴のうち、横ずれ断層のステップに注目した。横ずれ断層では、ステップがあると当然横ずれがその地点で阻害される。しかし、断層で繰り返しずれが起きると、そのうちステップは徐々に磨耗してならされるに違いないと考えた。磨耗の程度は、断層が生成してからこれまでずれた、横ずれの総量に比例することが期待される。断層帯の複雑度の目安としては単位長さあたりのステップの数を数え、横ずれ総量の異なる断層帯の複雑度と断層の成熟度（総滑り量）との相関を世界各地の横ずれ断層についての調査結果をまとめた。結果はほぼ期待される通り、断層が成熟するほど断層の複雑度は減ることが示された。横ずれ総量が大きい程、断層はなめらか（直線的）になっている。

Stirling et.al. が指摘したこの自然地震断層の形状成熟過程を本論文で明らかにした自発的破壊停止機構の観点からみてみよう。断層帯がまだ未発達地殻を考えると、そこでは比較的均質な破壊強度分布であり剪断型の破壊は自発的屈曲を起こして停止してしまう。このように断層帯という弱面が形成されていない地域では一度に何十 km にもわたる破壊伝播は生じることができないためマグニチュード 7 等という大地震は起きることはあり得ないといえる。地殻岩石が均質で破壊成長がすぐに停止する状況が続くにつれ、小規模の既存弱面が増えていく。こうなると破壊成長の最中に他の破壊セグメントと結合することができるようになり、中規模な準直線的な破砕帯構造が次に構築されていく。それぞれの破壊過程において破壊停止端では分岐、屈曲の枝構造を生成するが、これが若い断層帯に存在するステップ構造の成因の一つとして考えられる。そして、不均質が増加する一方で地質学的時間スケールでの固着による強度回復が起きる破壊と回復のバランスのとれた状態が出現するであろう。こうなった断層帯では破壊要素は適度に結合して成長でき、地震規模がグーテンベルグリヒター則に従うというシナリオが考えられる。この段階の後に繰り返し地震が起きると Stirling et.al. が考えたように断層帯の構造は次第に平滑化されなめらか（直線的）な弱面構造が形成される。そして、断層帯が成熟し直線的な破壊強度コントラストが高い特徴的構造ができあがってしまうと、分布する個々の破壊要素の結合が地震規模を決める要因にならなくなる場合が起きるようになる。これがその断層の固有地震に対応し、本論文で示したように断層帯構造全体を反映する直線的にかなり大きな成長にいたりようやく破壊が停止する。換言すると、地震が繰り返し起き断層帯が成熟し、大きな弱面構造が形成されてはじめて破壊が大地震にまで成長できるようになるといえる。

Chapter 6

おわりに

本論文では、亀裂の自発的破壊伝播の問題を破壊形状の束縛をなくして解析した。まず、任意形状の亀裂の破壊進展を取り扱うことのできる計算手法を開発した(第2章)。モデルに2次元 P-SV 型剪断亀裂を採用し、自発的破壊伝播において形状を支配するところの亀裂面の傾きにより変化する境界条件と破壊の方向と進展を決定する破壊基準を記した(第3章)。そして、新しい計算手法を用いて破壊パラメータ分布が一様であるモデル破壊計算を行った(第4章)。形状を自由にして剪断破壊の経路を解く試みは世界で初めてのものである。数値計算による解析の結果、亀裂は高速破壊伝播中に自発的に曲がり始める。P-SV 剪断破壊をもたらす応力場の特有の指向性により、屈曲後の破壊方向は破壊成長が阻止され破壊成長停止することが示された。未解明であった地震の破壊停止の力学的モデルを手にしたことにより、第1章にあげた目標「テクトニックな応力場と断層帯物質の性質のみに基づき、地震の始まりから終わりまでの全ての破壊現象を破壊の力学から予測すること」への途が開けたと言えよう。

形状自由な破壊伝播の計算が可能になったことにより、従来の断層力学モデルで考えてきた従来の破壊進展の2大要素である破壊強度と破壊相互作用についての理解にも新しい局面が出てくる。破壊方向が限定された中では破壊強度は単にその方向のに沿って進むか進まないかのスカラー的な役割しか担ってこなかったが、本計算手法により曲がったり分岐したりしながら迂回して壊れる本来のベクトル的な役割を果たすことが可能になる。また、破壊要素間の相互作用により同一面内に無い破壊要素間においても曲がって結合することができる(図6.1参照)。これらの破壊形状は断層帯に普遍的にみられるが、断層モデルの直線近似化の際に切り捨てられてきた要素である。しかし、自発的破壊において形こそが破壊進展を支配している重要な要因であることが明らかにされた今、あらためて取り組む必要がある。そして、本論文の新手法はこれら実際に断層帯で起きている全ての破壊形状の幾何を表現することができるのである。相互作用を取り扱う点に関しては、定式化で用いた BIEM は複数の亀裂間の相互作用を新たに数学的困難さが持ち上がることなく用意に拡張して計算できる。既に、平行亀裂形状の場合には多数の相互作用を考慮した自発的破壊成長計算が行われている(Kame and Yamashita 1997)。破壊強度不均質や亀裂間相互作用による複

雑な破壊面形状の動的生成過程は、自発的破壊停止機構の発動に影響を与え破壊成長規模の決定に寄与することが期待され、また、強震動予測の観点からも高周波地震動の生成源と考えられているので数値計算による定量評価が期待される。

本論文の計算手法は亀裂面上の構成則の導入も容易に可能であるが、構成則としては一番単純なグリフィス亀裂のみを考えてきた。これは面上の性質に破壊が左右されることなく純粋に破壊形状そのものの破壊進展に及ぼす効果を調べるためである。また、構成則のみでは高速破壊を止める為には極端な空間不均質を用意する必要があり破壊伝播停止を考える際にはとりあえず考慮する必要性がなかったからである。しかしながら、亀裂面上の滑りの停止には大きく関与し、また発生する地震波の高周波成分を議論するときには必要になるパラメタであるので導入する意義は失われていない。破壊面上の性質として断層面の磨耗過程を巨視的に記述した滑り弱化構成則があるが、地震規模予測のように破壊の伝播を問題にする際には考えるスケールにより構成則適用の見極めが必要である。すなわち、この構成則は破壊面上の凸凹が巨視的に平面的に扱える場合の表現であり、幾何形状が平面から逸脱して見える破壊にたいしては構成則としての意味を失う。破壊過程の計算における実際上の問題にあたっては、ある程度のスケールまではマイクロにおきる非直線的な破壊過程を全て表現することは不可能であり巨視的構成則として面上の性質に担わせることが現実的であろう。構成則で表現できない部分、すなわち、ある程度巨視的な破壊要素の非直線形状に対して本計算手法を適用するのが現在の計算機能力を考えれば妥当である。rate- and state dependent friction law の場合は、この構成則が支配的になるのはクリープ的な非常に遅い滑り速度の範囲であり、滑り速度が高速度の範囲ではほとんど動摩擦一定の形になる。従って、弾性波のスケールで起きる高速な破壊伝播に伴う滑り速度に対しては本論文の取り扱いで十分であろう。

本計算手法により、破壊強度、破壊相互作用、複雑な破壊形状、亀裂面上の構成関係という破壊の支配要素が全て表現できる。従って、断層帯の性質と応力状態が完全にわかっている理想的な状況下でありさえすれば、いったん始まった破壊がどのように成長し、どこまで進展して止まるか計算することにより全て分かるはずである。モデルの3次元化に伴い実際の計算機能力で扱えるかどうかの問題がでてこようが、計算法の3次元化には超特異積分評価にあたり新たな数学的困難は無い。現実断層に対して発生する地震の全破壊過程を計算し、将来の地震の破壊規模予測が原理的に可能になる。また、その破壊過程から放射される理論波形を計算すれば強震動の予測も可能になる。そのためには残り二つの研究、その一つは断層帯の亀裂の分布状態と破壊面の性質の空間分布を把握すること、もう一つは断層帯に働く地殻応力場の解明が待たれる。

本論文は均質な破壊パラメタ分布の下では、従来の線形破壊力学の考察とは異なり、破壊はすぐに止まることがむしろ本性であることを示した。この自発的な破壊停止機構の発動に対して破壊パラメタ分布の不均質性は破壊成長を継続させるためにこそ必要な要素であり、これは従来の考え（破壊の停止には強い破壊パラメタ分布の不均質が必要）とは全く正反対になる。従って、これからはどのような不均質性により破壊が

継続的に成長して大地震になれるのかを調べるのが研究対象になろう。本論文では既に、破壊継続をもたらすものとして破壊速度を高速化しないパラメタ分布の不均質と他の既存破壊要素との結合をあげた。断層帯の諸物理量が正確に把握できない現在の状況下においては、応力条件はひとまず一様にしておき、適当な亀裂分布と破壊強度不均質の分布の下で破壊過程のモデル計算をすることを提案する。どの程度の亀裂密度や破壊強度不均質が破壊の継続的な成長に必要なか明らかにすることができ、かつ、それが観測の分解能で把握できるのであれば、地震規模と強震動の予測が現実味を帯びてくる。

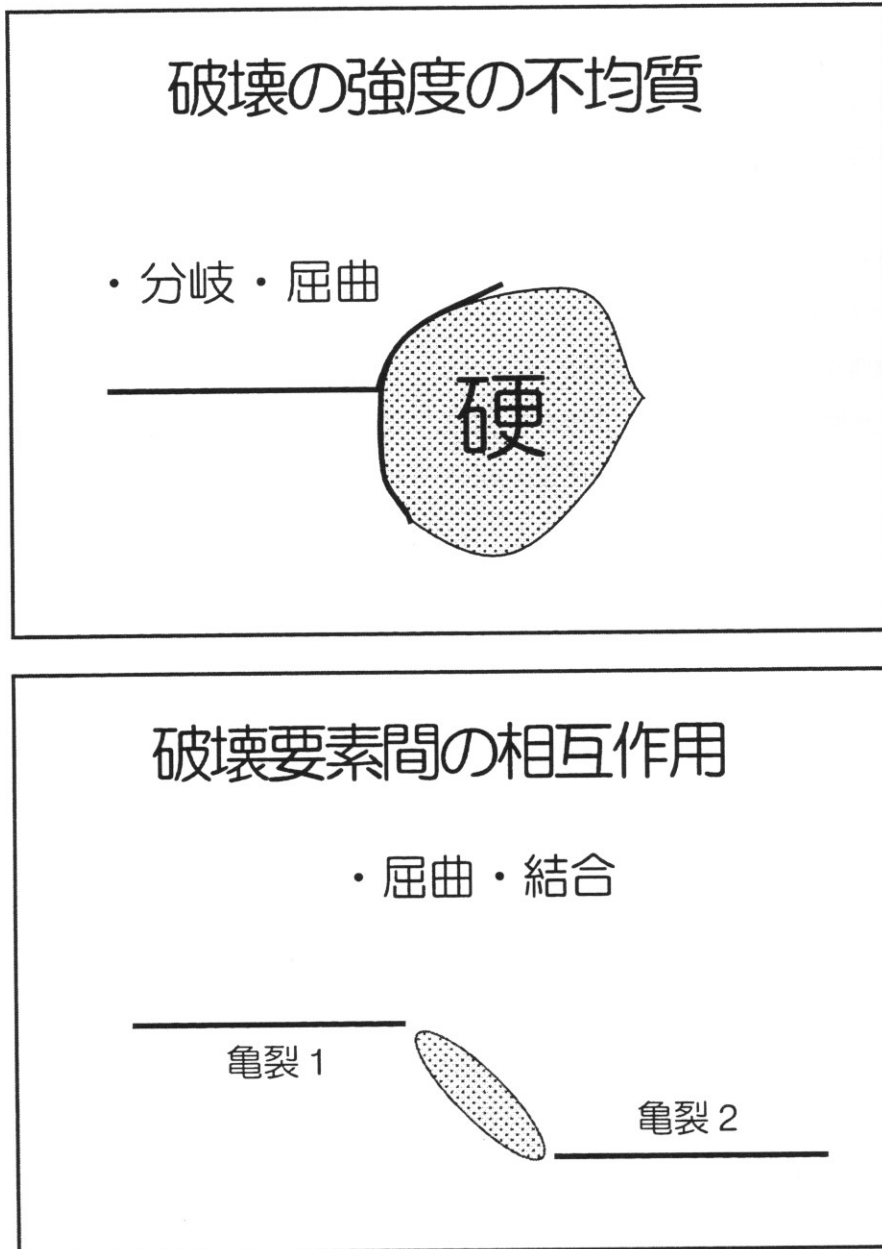


図 6.1: 破壊現象理解へ向けての新たな局面。これら断層帯における実際の破壊形状複雑化の動力学過程が、今やモデル計算が可能になった。

参考文献

- 阿部勝征, 地震の物理, 120 pp., 岩波書店, 東京, 1991.
- Aki, K., and P.G. Richards, Quantitative seismology, theory and methods, 31 pp., Freeman, San Francisco, 1980.
- Burridge, R., and L. Knopoff, Model and theoretical seismicity, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 57, 341-371, 1967.
- Carlson, J.M., and J.S. Langer, Properties of earthquakes generated by fault dynamics, *Physical Review Letters*, 62, 2632-2635, 1989.
- Cochard, A., and R. Madariaga, Dynamic faulting under rate-dependent friction, *Pure and Applied Geophysics*, 142, 419-445, 1994.
- Cooke, M.L., Fracture localization along faults with spatially varying friction, *Journal of Geophysical Research*, 102, 22425-22434, 1997.
- Das, S., and K. Aki, A numerical study of two-dimensional spontaneous rupture propagation, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 50, 643-668, 1977a.
- Das, S., and K. Aki, Fault plane with barriers: a versatile earthquake model, *Journal of Geophysical Research*, 82, 5658-5670, 1977b.
- Day, S.M., Three dimensional simulation of spontaneous rupture: the effect of nonuniform prestress, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72, 1881-1902, 1982.
- Fineberg, J., S.P. Gross, M. Marder, and H.L. Swinney, Instability in the propagation of fast cracks, *Physical Review B*, 45, 5146-5154, 1992.
- Freund, L.B., *Dynamic fracture mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

- Fukuyama, E., and R. Madariaga, Integral equation method for plane crack with arbitrary shape in 3D elastic medium, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 85, 614-628, 1995.
- Griffith, A.A., The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 221, 163, 1920.
- Gutenberg, B., and C.F. Richter, Frequency of earthquakes in California, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 34, 185-188, 1944.
- Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, 117-212 pp., Dover Publications, New York, 1952.
- Harris, R.A., and S.M. Day, Dynamics of fault interaction: parallel strike-slip faults, *Journal of Geophysical Research*, 98, 4461-4472, 1993.
- Hirose, S., and J.D. Achenbach, BEM method to analyze the interaction of an acoustic pulse with a rigid circular disk, *Wave Motion*, 10, 267-275, 1988.
- Hirose, S., and J.D. Achenbach, Time-domain boundary element analysis of elastic wave interaction with a crack, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 629-644, 1989.
- Hirose, S., and J.D. Achenbach, higher harmonics in the far field due to dynamic crack-face contacting, *Journal of Acoustical Society of America*, 93, 142-147, 1993.
- Hirose, S., 2-D scattering by a crack with contact-boundary conditions, *Wave Motion*, 19, 37-49, 1994.
- Horikawa, H., Inversion for dynamic source parameters: Application to the 1990 Izu-Oshima, Japan earthquake, Doctor of science thesis, Kyoto University, Kyoto, 1996.
- Husseini, M.I., M.J. Jovanovich, M.J. Randall, and L.B. Freund, The Fracture energy of earthquakes, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 43, 367-385, 1975.
- Ide, S., and M. Takeo, The dynamic rupture process of the 1993 Kushiro-oki earthquake, *Journal of Geophysical Research*, 101, 5561-5675, 1996.
- Ide, S., and M. Takeo, Determination of constitutive relations of fault slip based on seismic wave analysis, *Journal of Geophysical Research*, 1997.
- 今井 功, 応用超関数論 I, 83 pp., サイエンス社, 東京, 1981.

- Inoue, T., and T. Miyatake, Computer simulation of dynamic source process on an arbitrary shaped fault (Japanese abstract), Abstr. Jpn. Earth Planet. Sci. Joint Meeting, 361, 1995.
- Kame, N., and T. Yamashita, A new boundary integro-differential equation method (BIDEM) for 2-D dynamic crack problems (Japanese abstract), Abstr. Seism. Soc. Japan Fall Meeting, A11, 1996.
- Kame, N., and T. Yamashita, Dynamic nucleation process of shallow earthquake faulting in a fault zone, *Geophysical Journal International*, 128, 204-216, 1997.
- Kanamori, H., Determination of effective tectonic stress associated with earthquake faulting, The Tottori Earthquake of 1943, *Phys. Earth Planet. Interior*, 5, 426-434, 1972.
- Koller, M.G., M. Bonnet, and R. Madariaga, Modeling of dynamical crack propagation using time-domain boundary integral equations, *Wave motion*, 16, 339-366, 1992.
- Kostrov, B.V., Selfsimilar problems of propagation of shear cracks, *PMM J. Appl. Math. Mech.*, 30, 1241-1248, 1964.
- Kostrov, B.V., Unsteady propagation of longitudinal shear cracks, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 30, 1241-1248, 1966.
- Lay, T., and H. Kanamori, Earthquake doublets in Solomon Islands, *Phys. Earth Planet. Interiors*, 21, 283-304, 1980.
- Marder, M., Energetic developments in fracture, *Nature*, 381, 275-276, 1996.
- Martin, P.A., and F.J. Rizzo, On boundary integral equations for crack problems, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 421, 341-355, 1989.
- 松田時彦, 日本の地震学の概観, 地震第 20 巻記念特集号, 230-235, 1967.
- Matsu'ura, M., H. Kataoka, and B. Shibazaki, Slip-dependent friction law and nucleation process in earthquake rupture, *Tectonophysics*, 211, 135-148, 1992.
- Miyatake, T., Numerical simulations of earthquake source process by a three-dimensional crack model. Part I. Rupture process, *Journal of Physics of the Earth*, 28, 565-598, 1980a.
- Miyatake, T., Numerical simulations of earthquake source process by a three-dimensional crack model. Part II. Seismic waves and spectrum, *Journal of Physics of the Earth*, 28, 599-616, 1980b.

- Miyatake, T., Numerical simulation of three-dimensional faulting process with heterogeneous rate- and state-dependent friction, *Tectonophysics*, 221, 223-232, 1992a.
- Miyatake, T., Reconstruction of dynamic rupture process of an earthquake with constraints of kinematic parameters, *Geophysical Research Letters*, 19, 349-352, 1992b.
- Perrin, G., J.R. Rice, and G. Zheng, Self-healing slip pulse on a frictional surface, *J. Mech. Phys. Solids*, 43, 1461-1495, 1995.
- Quin, H., Dynamic stress drop and rupture dynamics of the October 15, 1979 Imperial Valley, California, earthquake, *Tectonophysics*, 175, 93-117, 1990.
- Ruff, L., and H. Kanamori, The rupture process and asperity distribution of three great earthquakes from long-period diffracted P-waves, *Phys. Earth Planet. Interiors*, 31, 202-230, 1983.
- Sharon, E., S.P. Gross, and J. Fineberg, Local crack branching as a mechanism for instability in dynamic fracture, *Physical Review Letters*, 74, 5096-5099, 1995.
- Sharon, E., and J. Fineberg, The micro-branching instability and the dynamic fracture of brittle materials, *Physical Review B*, 54, 7128-7139, 1996.
- Shibazaki, B., and M. Matsu'ura, Spontaneous processes for nucleation, dynamic propagation, and stop of earthquake rupture, *Geophysical Research Letters*, 19, 1189-1192, 1992.
- Shibazaki, B., and M. Matsu'ura, Foreshocks and pre-events associated with the nucleation of large earthquakes, *Geophysical Research Letters*, 22, 1305-1308, 1995.
- Stirling, M.W., S.G. Wesnousky, and K. Shimazaki, Fault trace complexity, cumulative slip, and the shape of the magnitude-frequency distribution for strike-slip faults: a global survey, *Geophysical Journal International*, 124, 833-868, 1996.
- Tada, T., Boundary integral equations for the time-domain and time-independent analyses of 2D non-planar cracks, Doctor of Science thesis, University of Tokyo, Tokyo, 1995.
- Tada, T., and T. Yamashita, The paradox of smooth and abrupt bends in two-dimensional in-plane shear-crack mechanics, *Geophysical Journal International*, 127, 795-800, 1996.
- Tada, T., and T. Yamashita, Non-hypersingular boundary integral equations for two-dimensional non-planar crack analysis, *Geophysical Journal International*, 130, 269-282, 1997.

- Tchalenko, J.S., and M. Berberian, Dasht-e Bayez fault, Iran: Earthquake and earlier related structures in bed rock, *Geol. Soc. Am. Bull.*, 86, 703-709, 1975.
- Virieux, J., and R. Madariaga, Dynamic faulting studied by a finite difference method, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72, 345-369, 1982.
- 若野・磯, 境界要素法による波動方程式の数値解析, *日本応用数理学会論文誌*, 4, 55-65, 1994.
- Xu, X.P., and A. Needleman, Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 42, 1397-1434, 1994.
- Yamashita, T., and L. Knopoff, Model for intermediate-term precursory clustering of earthquakes, *Journal of Geophysical Research*, 97, 19873-19879, 1992.
- Yamashita, T., and Y. Umeda, Earthquake rupture complexity due to dynamic nucleation of subsidiary faults, *Pure and Applied Geophysics*, 143, 89-116, 1994.
- Yamashita, T., and E. Fukuyama, Apparent critical slip displacement caused by the existence of a fault zone, *Geophysical Journal International*, 125, 459-472, 1996.
- Yoffe, E.H., The moving griffith crack, *Philosophical Magazine*, 42, 739-50, 1951.

Appendix A

超特異積分とその評価法について

いま、区間 (a, b) 内の一点 x において特異性を持つ関数に関する定積分

$$\int_a^b f(t)(t-x)^\alpha dt \quad (\text{A.1})$$

を考えよう。特異性が $(t-x)^{-1}$ より弱い場合、同積分が収束することは明らかである。特異性の強さがちょうど $(t-x)^{-1}$ に等しい場合には、同積分は通常の積分の意味においては収束しないが、Cauchy の主値を定義することにより評価可能である。しかし、これより強い特異性を持つ場合は、もはやいかなる方法によっても収束しない。このような「強い」特異性は一般に超特異性 (hypersingularity) (e.g., Martin and Rizzo 1989) と呼ばれる。

境界積分方程式法 (BIEM) は偏微分方程式の初期値境界値問題を基本解をもちいて積分方程式に帰着させ、この積分方程式を解いて解を得る方法である。亀裂問題の場合、その基本解 (グリーンテンソル) の特異性により境界積分方程式を導く過程で発散積分が現れるという困難がある。例えば、最も単純な x_1 軸上にある 2 次元 SH 型亀裂の場合で例にあげると、応力の表現式は

$$\sigma_{23}(x_1, x_2, t) = -\frac{\partial}{\partial x_2} \int_{\Gamma} \int_0^t \Delta \dot{u}(\xi, \tau) \mu^2 \frac{\partial}{\partial x_2} Gh_{23}(x_1 - \xi, x_2, t - \tau) d\xi d\tau \quad (\text{A.2})$$

$$= -\int_{\Gamma} \int_0^t \Delta \dot{u}(\xi, \tau) \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} Gh_{23}(x_1 - \xi, x_2, t - \tau) d\xi d\tau, \quad (\text{A.3})$$

となる。ここでグリーンテンソル G_{23} は

$$G_{23}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{H(t-r/\beta)}{\sqrt{t^2 - r^2/\beta^2}} \quad (\text{A.4})$$

であり波面の到着時 $t = r/\beta$ に $(-1/2)$ の特異性を持つ。式 A.2 の積分微分方程式における積分核関数 $\partial Gh_{23}(x_1 - \xi, x_2, t - \tau)/\partial x_2$ はグリーンテンソルの時間一階積分空間一階微分関数で特異性は $(-1/2)$ であるから右辺は勿論積分可能である。しかし式 A.3 の積分方程式に現れる積分核の特異性は $(-3/2)$ であるので、もはや積分は発散してしまう。従って、このような超特異性を回避する最も単純な方法は、積分微

分を本来の順序で実行することであり、著者もこの方法を過去に試みた (Kame and Yamashita 1996) が、この方法は亀裂が座標軸から傾いている場合は有用ではない。

発散積分の有限部分

BIEM に現れるこの発散積分を評価する方法は大きく分けて二つに分類される。一つは本論文で用いる発散積分の有限部分 (the finite part of divergent integrals) の概念を用いる方法である (Hadamard 1952, 若野と磯 1994)。発散積分の有限部分の概念は、一般に良く知られていないと思われるので、先ず簡単な例で解説する。一般には定積分

$$\int_0^1 \frac{1}{t} \varphi(t) dt, \quad (\varphi(0) \neq 0) \quad (\text{A.5})$$

は意味を持たないが、

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{t} \varphi(t) dt = \int_\epsilon^1 (\log t)' \varphi(t) dt \quad (\text{A.6})$$

$$= - \int_\epsilon^1 \varphi(t)' \log t dt - \varphi(\epsilon) \log \epsilon \quad (\text{A.7})$$

によって、 $\epsilon \rightarrow +0$ の極限の下で収束する項と発散する項を特定することができる。この収束項の極限を発散積分の有限部分と呼び、

$$p.f. \int_0^1 \frac{1}{t} \varphi(t) dt \equiv - \int_\epsilon^1 \varphi(t)' \log t dt \quad (\text{A.8})$$

と定義する。次に、本論文で必要になる型の発散積分の有限部分について述べる。本論文で評価すべき発散積分

$$\int_a^{b-\epsilon} \frac{f(t)}{(b^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}} dt \quad (a > b) \quad (\text{A.9})$$

を考えよう。この積分値は次のように $\epsilon \rightarrow +0$ の極限で収束する項 (有限値) と発散する項を特定できる。

$$\int_a^{b-\epsilon} \frac{f(t)}{(b^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \int_a^{b-\epsilon} \frac{f(t) - f(b)}{(b^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}} dt + f(b) \int_a^{b-\epsilon} \frac{dt}{(b^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.10})$$

$$= \int_a^{b-\epsilon} \frac{f(t) - f(b)}{(b^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}} dt - \frac{a}{b^2} \frac{f(b)}{\sqrt{(b^2 - a^2)}} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{(b - \epsilon)}{b^2} \frac{f(b)}{\sqrt{(2b - \epsilon)}}. \quad (\text{A.11})$$

これより、

$$p.f. \int_a^b \frac{f(t)}{(b^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \int_a^b \frac{f(t) - f(b)}{(b^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}} dt - \frac{a}{b^2} \frac{f(b)}{\sqrt{(b^2 - a^2)}} \quad (\text{A.12})$$

となる。この Hadamard の有限部分の表現は発散積分の積分核の不定積分が求められない場合 ($f(t)$ が複雑な関数形) の場合にも適用可能な形で一般性に富むのであるが、有限部分の右辺に現れる積分核は $t \rightarrow b$ 付近で $0/0$ の形になるので、実際上数値積分することが困難である。そこで、本論文では以下に挙げる超関数理論の定義を利用する (e.g., 今井 1981)。超関数理論において発散積分の有限部分は

$$p.f. \int_0^a x^\alpha \varphi(x) dx = \int_{-\epsilon}^a \varphi(x) |x|^\alpha H(x) dx \quad (\text{A.13})$$

で定義される。この定義の特徴は、積分を行った後下限 $x = -\epsilon$ での値が 0 になることである ($H(-\epsilon) = 0, \epsilon > 0$ だから)。積分核が超特異性を持つ場合、積分 \int_0^a は下限 $x = 0$ で無限大になるのに対し、 $p.f. \int_0^a = \int_{-\epsilon}^a$ ではその無限大が自動的に消滅するのである。こうして除去される発散部分は Hadamard と一致する。上に示したのは片側発散積分にたいする有限部分の定義であるが、これは Cauchy の主値の意味での両側発散積分の有限部分も勿論内包している。数学的な証明は今井 (1981) を参照されたい。

離散積分核の作り方

本論文で現れる離散積分核は全て

$$\sigma(\vec{x}) = \sum_i \sum_k V^{i,k} I^{i,n-k}(\vec{x}) \quad (\text{A.14})$$

$$I^{i,n-k}(\vec{x}) = p.f. \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} Gh \, d\xi \, d\tau \quad (\text{A.15})$$

の形をしている。 $I^{i,n-k}(\vec{x})$ は離散要素 (i, k) 上における積分核関数の面積分で、滑り速度 $V^{i,k}$ が観測点 (\vec{x}, t_{obs}^n) に作り出す応力作用素を意味するが、グリーンテンソルに因果律を表す関数 $H(t - r/\alpha)$ or $H(t - r/\beta)$ が含まれるので、積分は弾性波速度で決まる波動円錐と離散滑り速度要素 $\Delta s \Delta t$ の和集合の領域になる (図 2.3 参照)。幸いなことに、2次元グリーンテンソルの場合は積分核 (グリーンテンソルの時間一階積分二階空間微分) の不定積分が存在し、超関数の有限部分の定義が利用できる。これにより数値計算で離散核をつくる際に積分区間で数値積分する必要がなく、不定積分関数を用意しておき積分区間の上下限の値を引数にするのみで表現可能になり非常に簡便である。

正規化法

これまで、地震学の分野において亀裂進展問題においては何らかの方法で発散積分における積分核の特異性を下げる正規化法 (regularization technique) が一般的であった。これは、積分核の特異性を特異性のない滑り速度関数に一部負担さす方法である。正規化法には部分積分を利用するものが多いが (Cochard and Madariaga 1994, Fukuyama and Madariaga 1995, Tada 1995, Tada and Yamashita 1997)、BIEM の亀裂問題は式 A.3 の様に一般には部分積分できる形になっていない。例えば式 A.3 に於いて x_1 軸に沿って部分積分を行うためには、

$$\int \Delta \dot{u}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} Gh_{23}(x_1 - \xi) \, d\xi = \int \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \dot{u}(\xi) Gh_{23}(x_1 - \xi) \, d\xi \quad (\text{A.16})$$

のように関数の引数と微分演算子が x_1 軸に沿う変数 ξ に統一されている必要がある。そのため、なんらかの等価な微分演算子を見つけてやり部分積分できる形に式変形する必要がある¹。亀裂面が座標軸に沿わ

¹例えば Cochard and Madariaga (1994) は SH 問題の運動方程式に成り立つ演算子の関係式 $\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 = \rho/\mu \partial^2/\partial t^2$ を利用して部分積分可能な形へ変換した

ない場合は部分積分は非常に困難になるが、Tada (1995)、Tada and Yamashita (1997) は任意形状の 2 次元亀裂に対して、亀裂面に沿う方向のグリーンテンソルを再構築することにより亀裂面に沿う空間部分積分を行い、正則化した積分方程式の表現を得た。この式は非常に長大なものになり離散化するのに労が多い。ただ注意しなくてはならないのは、滑り速度の離散関数形が同じである限り（本論文では区間内一定値）、正規化法や有限部分法といった評価法の違いは発散積分の評価値に違いをもたらさないということである。これはあるセグメントの滑り速度に対して作り出される応力は一価に決まるという当たり前のことを示している。SH 亀裂問題の瞬間項 $K^{0,0}$ をそれぞれの計算方法で求めてみると正規化法も有限部分法も結果は $K^{0,0} = \mu/2\beta$ である。従って、発散積分の評価法の違いによる数値計算上の有利不利は全くない。本論文で有限部分法を採用したのは、発見的でなく直接的な式変形が可能なこと、滑り速度関数とは独立に発散積分を評価するので亀裂面の向きを任意とする問題で便利なこと、式が長くならないので離散の手間が少ないこと、などの理由からである。

最後に手法開発の経験において著者が気づいたこと書き残しておきたい。これまでの動的な亀裂問題研究においては、部分積分を空間変数で行うものばかりであるが、この背景には静的な問題の正規化手法の考え方がある。滑り関数の亀裂面方向の空間微分は結晶転移学における Burger's vector に対応する物理量であり、静的な問題では亀裂面に沿う空間変数以外に滑り関数の微分に物理的意味がある量はない。従って部分積分は空間変数に関して行うしかなかったのである。しかし、動的な問題で空間変数に関する正規化作業は必ずしも必要ではなく、以下のように時間変数を用いた方が利点大きい。

$$\int \Delta \dot{u}(\tau) \frac{\partial}{\partial x_p} Gh_{23}(t-\tau) d\tau = \int \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta \dot{u}(\tau) \frac{\partial}{\partial x_p} Gr_{23}(t-\tau) d\tau \quad (\text{A.17})$$

ここで、 $Gr(\tau) = \int_0^\tau Gh(t)dt$ であり、物理的には Ramp Time Response を意味する。時間変数で部分積分を行えば、グリーンテンソルの空間微分演算子の変数成分 $\partial/\partial x_p$ に依存しないので等価な演算子の発見が必要にならない。加えて、時間関数による正規化には亀裂面の空間方向に関係しないので亀裂面を自由にとれようになる。実は、滑り速度区間内一定で有限部分により離散核をつくる方法は上の時間変数による正規化法と数学的には全く同じ操作をしていることが示される。

Appendix B

静的平衡問題の解法

動的破壊は媒質中に存在する臨界状態にある既存亀裂の先端から始まる (Griffith 1920)。このような臨界既存亀裂から始まる動的破壊の問題を解くためには、亀裂面上で応力降下を起こし静的平衡状態にある亀裂面上の既存滑りと亀裂先端の応力集中を予め計算しておく必要がある。本章ではこの既存亀裂に関する諸物理量を計算する方法について述べる。

静的な2次元P-SV剪断型亀裂問題における応力場の表現と、亀裂面上の滑りと応力の間になり立つ関係式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{11}(\vec{x}) - \sigma_{22}(\vec{x})) &= - \int_{\Gamma} d\xi \Delta u_t(\xi) \mu^2 \times \\ &\times \left\{ 2n_1(\xi)n_2(\xi) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} G_{11} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} G_{22} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} G_{12} \right) + \right. \\ &\left. + (n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (G_{11} - G_{22}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) G_{12} \right] \right\} \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{11}(\vec{x}) + \sigma_{22}(\vec{x})) &= - \int_{\Gamma} d\xi \Delta u_t(\xi) \mu(\lambda + \mu) \times \\ &\times \left\{ 2n_1(\xi)n_2(\xi) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} G_{11} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} G_{22} \right) + \right. \\ &\left. + (n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (G_{11} + G_{22}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) G_{12} \right] \right\} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(\vec{x}) &= - \int_{\Gamma} d\xi \Delta u_t(\xi, \tau) \mu^2 \times \\ &\times \left\{ 2n_1(\xi)n_2(\xi) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (G_{11} - G_{22}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) G_{12} \right] + \right. \\ &\left. + (n_2^2(\xi) - n_1^2(\xi)) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} G_{11} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} G_{22} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} G_{12} \right) \right\}, \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

$$T_t(s) = 2n_1(s)n_2(s) \frac{1}{2}(\sigma_{11}(\vec{y}(s)) - \sigma_{22}(\vec{y}(s))) + (n_2^2(s) - n_1^2(s)) \sigma_{12}(\vec{y}(s)) \quad (\text{B.4})$$

$$T_n(s) = \frac{1}{2}(\sigma_{11}(\vec{y}(s)) + \sigma_{22}(\vec{y}(s))) -$$

$$-(n_2^2(s) - n_1^2(s)) \frac{1}{2} (\sigma_{11}(\bar{y}(s)) - \sigma_{22}(\bar{y}(s))) + 2n_1(s)n_2(s)\sigma_{12}(\bar{y}(s)). \quad (\text{B.5})$$

2次元面内変形の静的グリーンテンソルは以下のように与えられる (Tada and Yamashita 1997)。

$$G_{11}(\bar{x}; \bar{y}) - G_{22}(\bar{x}; \bar{y}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[- \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \right] \quad (\text{B.6})$$

$$G_{11}(\bar{x}; \bar{y}) + G_{22}(\bar{x}; \bar{y}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) - 2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \log r \right] \quad (\text{B.7})$$

$$G_{12}(\bar{x}; \bar{y}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \gamma_1 \gamma_2. \quad (\text{B.8})$$

静的な問題では原点が超特異性を持つ。動的な問題と同じ空間間隔 Δs で要素内滑り量一定値を仮定し亀裂面を離散化する。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\bar{x}) &= \int_{\Gamma} \Delta u_t(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} G d\xi \\ &= \sum_i D^i p.f. \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} G d\xi \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$= \sum_i D^i I_{static}^i(\bar{x}) \quad (\text{B.10})$$

ここで、 D^i は離散化された静的滑り量、 $I_{static}^i(\bar{x})$ は i 要素が \bar{x} に作り出す静的応力、 $p.f.$ は有限部分を取ることを意味する。式 B.10 は亀裂面 Γ 上の離散要素における静的すべり量 D^i が作り出す静的応力の総和が観測点応力 $\sigma_{ij}(\bar{x})$ を作り出すことを意味する。

応力評価点を離散要素の中心にとり、ここで境界条件を課すことにする。離散式で全て書き下した l 要素上の全応力成分から l 要素の亀裂面の剪断応力 T_t^l を構成した後、離散滑り要素の観点からまとめると

$$T_t^l = \sum_i^L D^i K_{static}^{l-i} \quad (\text{B.11})$$

の代数方程式を得る。これが亀裂面上の剪断応力と滑りの間に成り立つ離散化された積分方程式である。亀裂面 Γ 上で剪断応力値が境界条件として $T_t^l = \Delta\sigma^l$ であたえられ亀裂面上ですべり量 D^i が生じて静的に釣り合っているとき、このすべり量を求めることを考えよう。初期亀裂面 Γ を L 個の離散要素で表現し、 l_1, l_2, \dots, l_L と番号をふる。亀裂面上の L 点に対して式 B.11 を立てると、

$$\Delta\sigma^{l_p} = \sum_{i=1}^L D^i K_{static}^{l_p-i}, \quad (p = 1, 2, \dots, L) \quad (\text{B.12})$$

となり L 個の未知すべり量に関する連立一次方程式が得られ、これを解くことにより静的平衡状態にある L 個の亀裂面上のすべり量を得る。いったん亀裂面上のすべり量が求めれば、破壊基準値の設定に用いる亀裂先端の剪断応力値は B.10 を用いて求めることができる。

謝辞

東京大学地震研究所の山下輝夫教授には、著者の東京大学大学院在学中の指導教官として様々な面で御指導とご鞭撻を賜りましたので、ここに深く感謝します。大学院進学から始まり学位取得までの長きにわたり、たゆまぬ励ましで著者を支援をしていただきました。

防災科学技術研究所の藤原広行博士には、BIEMの超特異積分評価について貴重な助言をいただきました。博士の助け無しで本論文の計算手法開発の完成はありませんでした。心から感謝の意を表します。

東京大学地震研究所の宮武隆助教授には、本論文の内容の改善にとって有益なコメントをいただきました。京都大学工学系研究科の西村直志助教授、防災科学技術研究所の福山英一博士、及び École Normale Supérieure の多田卓博士には BIEM に関する基本事項についてご教授いただきました。

東京大学地震研究所発震機構部門山下研究室（現、地球計測部門）の先輩、河原純博士と村井芳夫博士にも、色々な意味でお世話になりましたのでここに謝意を表します。両先輩の真摯な研究姿勢は著者にとって大いに刺激となりました。また、地震発生論セミナーの構成員である松浦充宏教授、中谷正生博士、井出哲博士、青地秀雄氏には著者の研究の進展に資する様々な助言をいただきました。これらの方々にもこの場を借りて感謝します。

本論文中の数値計算には防災科学技術研究所の CRAY T932、京都大学化学研究所の CRAY T94、及び東京大学地震研究所地震予知情報センターの CRAY CS6400 を利用しました。