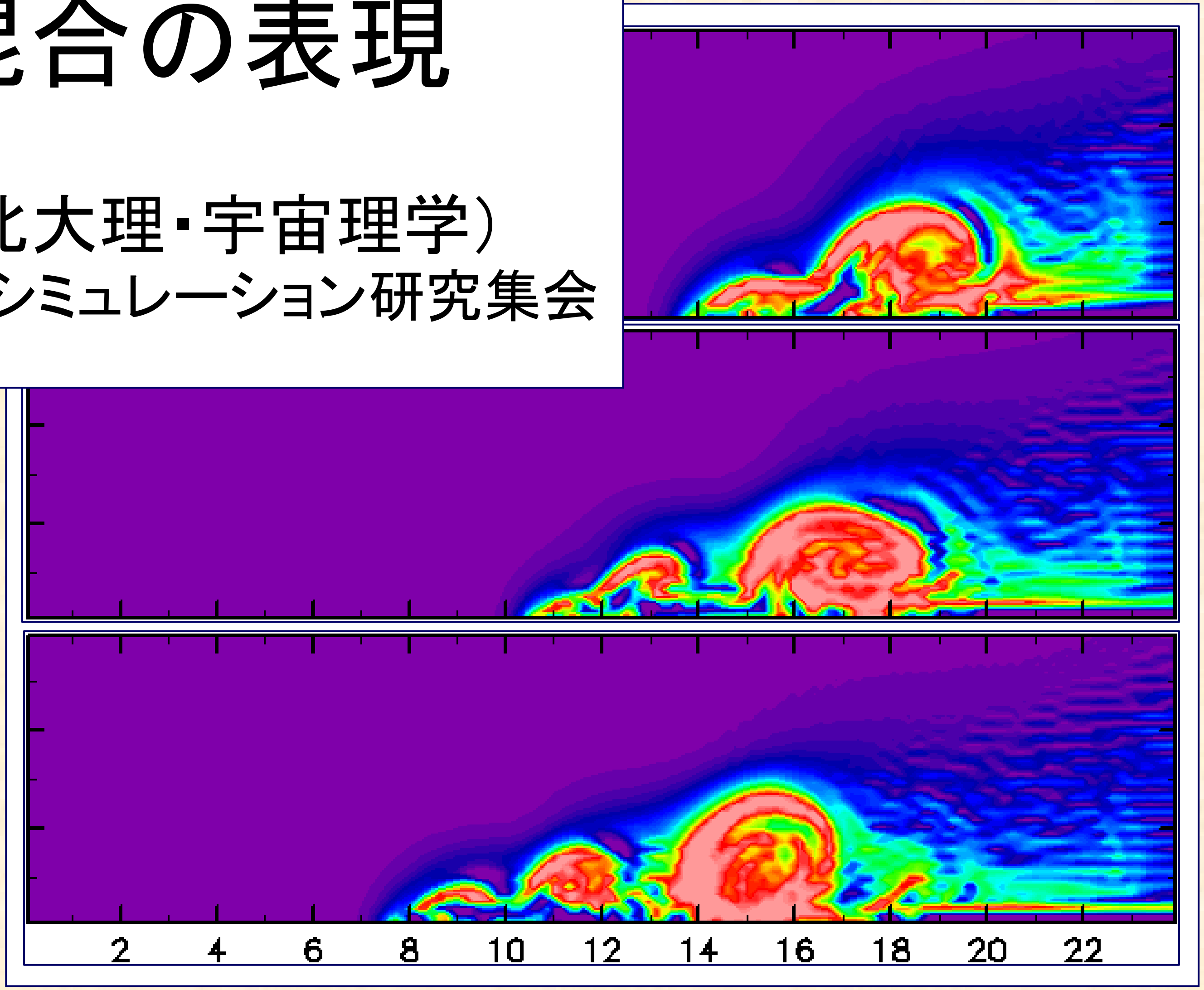
大気モデルにおける乱流混合の表現

小高正嗣（北大理・宇宙理学）

2007/11/29 火山シミュレーション研究集会



はじめに

- 共通する性質
  - 大気中で生じる浮力による流れ
  - 活発な混合による運動量の散逸，熱と物質の拡散

2007 地球流体セミナー in ニセコ

モデル化の違い

- 大気の対流
  - <u>乱流混合を考慮した</u>ブシネスク/圧縮性流体
    - 分子粘性は無視（レイノルズ数大）
    - 計算の都合上数値粘性も必要だが, その影響はできるだけ小さくする
- 火山噴煙
  - <u>非粘性</u>ブシネスク/圧縮性流体
    - 分子粘性は無視（レイノルズ数大）
    - 移流項の差分スキームに由来する数値粘性が存在

本講演では

<u>大気モデルにおける乱流混合の表現を解説</u>

- 大気の流れとクロージャ問題
- 大気モデルにおける乱流混合の取り扱い
  - 渦粘性モデル
  - 応力方程式モデル
- 実際の計算例
- 議論
  - 火山噴煙シミュレーションへの応用

大気の流れ

- 基本的に乱流
  - O(ν) = 10^{-5}
  - O(U) = 1 m/s, O(L) = 1 km とすると

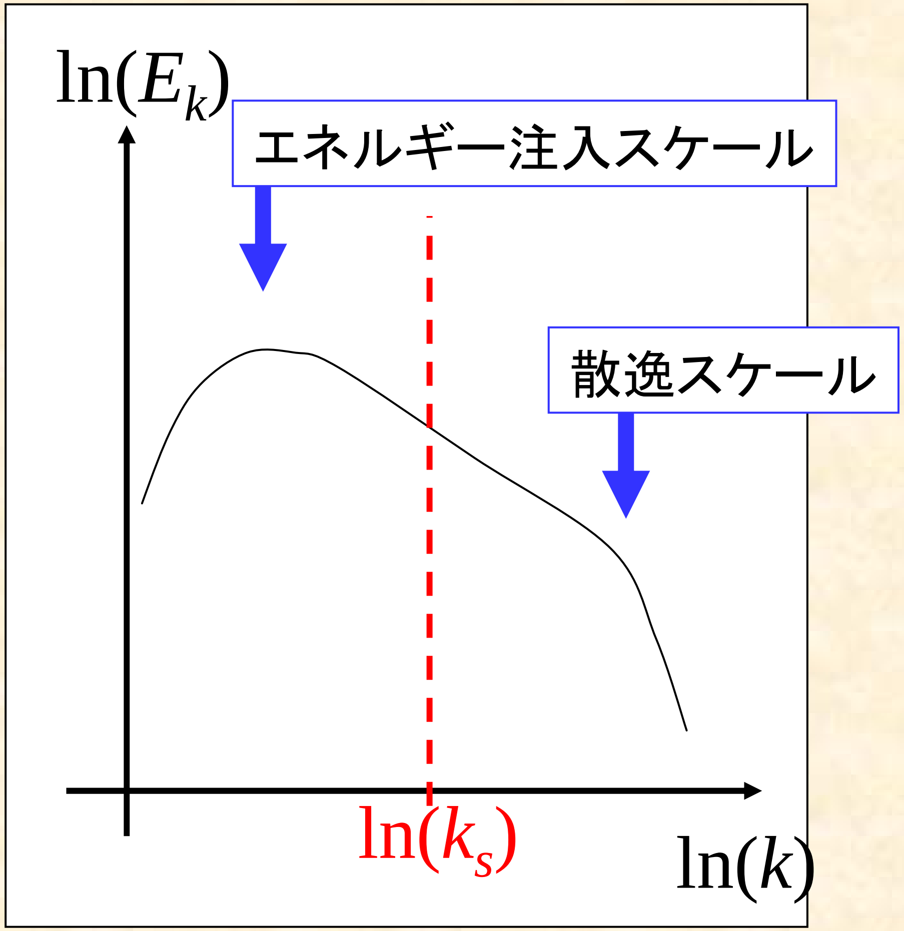
$$O(\mathrm{Re}) = 10^{8}$$

レイノルズ数は非常に大きい

- 散逸の生じるスケール（散逸スケール）
  << 現象の特徴的なスケール

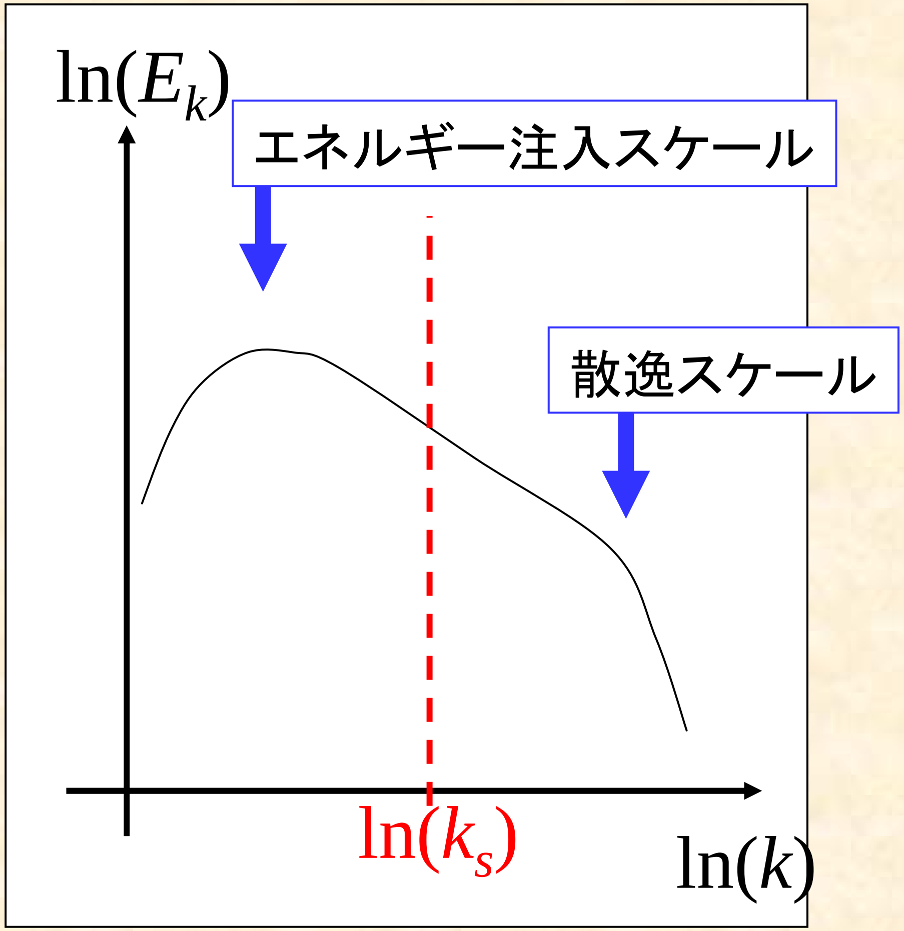
数値モデル化における問題

- 分解能は有限
  - 着目する現象を表現可能なスケールで切る
  - 散逸スケールの現象も表現するのは困難
    - 現実的には無理



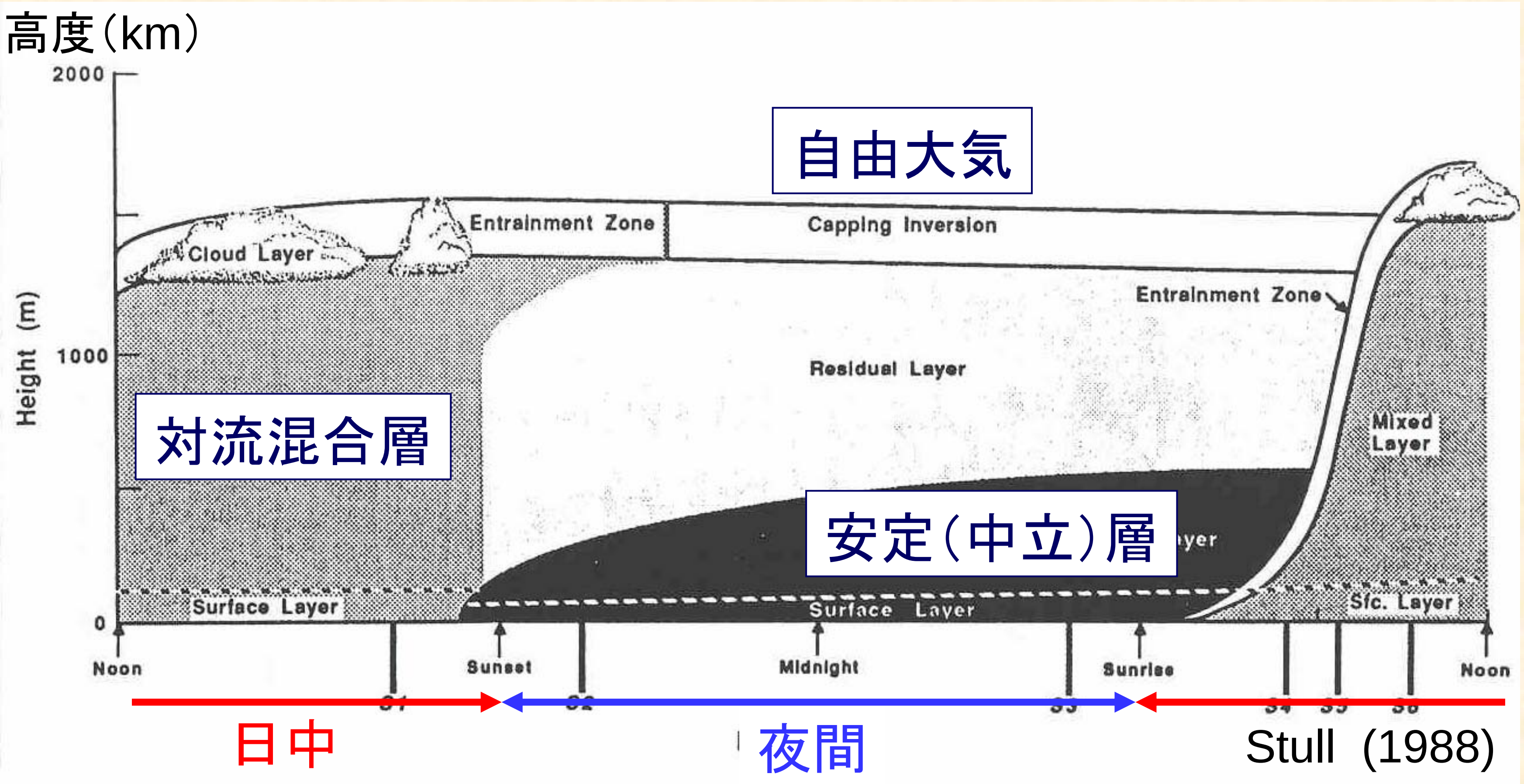
数値モデル化における問題

- 格子以下のスケール(Sub Grid Scale)の現象は無視できない
  - エネルギーカスケードを介し, 格子スケールの現象に影響
  - 具体例：大気境界層



大気境界層

- 地表から高度 1 km の領域



数式を用いて考察すると…

- ブシネスク近似の方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\alpha g_3\theta+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_j{}^2}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+\frac{\partial u_j\theta}{\partial x_j}=\kappa\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j{}^2}$$

u_i: 速度　p: 圧力　θ: 温位　α: 熱膨張率　ν: 動粘性率　κ: 熱拡散率

レイノルズ平均(1)

- 予報変数を格子スケールの成分(平均成分)と格子以下のスケールの成分(SGS成分)に分割

$$u_i = U_i + u_i'$$

- 平均成分と SGS 成分は以下の性質を満たすと仮定

$$\overline{u_i} = 0, \quad \overline{U_i U_j} = \overline{U_i}\,\overline{U_j} + \overline{u_i' u_j'}, \quad \overline{u_i' \overline{U_i}} = 0$$

レイノルズ平均(2)

- 実際は時間, 空間, アンサンブル平均を用いる
  - ここでは格子スケールの空間平均

$$\overline{U}_i = \overline{U}_i^{(t)}(x) = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} U(x,t)\,dt$$

$$\overline{U}_i = \overline{U}_i^{(x)}(t) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} U(x,t)\,dx$$

$$\overline{U}_i = \overline{U}_i^{(E)}(x,t) = \frac{1}{N}\sum_k U_k(x,t)$$

平均成分の方程式

- 基礎方程式をレイノルズ平均して得られる

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\alpha g_3\Theta+\nu\frac{\partial^2 U}{\partial x_j{}^2}-\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=0$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t}+\frac{\partial U_j \Theta}{\partial x_j}=\kappa\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j{}^2}-\frac{\partial \overline{u_j \theta}}{\partial x_j}$$

レイノルズ応力：SGS の乱流による混合

SGS 成分の式

- レイノルズ応力の式
  - 簡単のため温位を含む項を無視

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[U_k \overline{u_i u_j} + \overline{u_k u_i u_j} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{p u_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p u_j} =$$

$$-\overline{u_k u_i}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_k u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}$$

- 3次相関の項が現れる
  - 3次相関の式には4次相関項が現れる
  - 方程式が閉じない

クロージャ問題

- 高次相関を低次相関で近似し，閉じた式を作ること

- 閉じた相関項の次数を用いて表す
  - ２次相関で閉じた場合は2次のクロージャ
  - ３次相関で閉じた場合は3次のクロージャ

目次

- 大気の流れとクロージャ問題
- 大気モデルにおける乱流混合の取り扱い
  - 渦粘性モデル
  - 応力方程式モデル
- 実際の計算例
- 議論
  - 火山噴煙シミュレーションへの応用

大気モデルにおける乱流混合の取り扱い

- 渦粘性モデル
  - 分子粘性による運動量輸送のアナロジー
  - Smagorinsky (1963)
  - Klemp and Wilhelmson (1978)

- 応力方程式モデル
  - レイノルズ応力の予報方程式を解く
  - Mellor and Yamada (1974)

目次

- 大気の流れとクロージャ問題
- 大気モデルにおける乱流混合の取り扱い
  - 渦粘性モデル
  - 応力方程式モデル
- 実際の計算例
- 議論
  - 火山噴煙シミュレーションへの応用

渦粘性モデル

- レイノルズ応力を分子粘性による運動量輸送のアナロジーによって表現
- 渦粘性係数は乱流運動エネルギーに比例

$$\overline{u_i u_j} = -K_m \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} q \delta_{ij},$$

$$K_m = u_t l \propto \sqrt{q} l, \quad q = \frac{1}{2} \overline{u_{ii}^{\ 2}}$$

K_m: 渦粘性係数　u_t: 乱流速度　l: 特徴的長さ　q: 乱流運動エネルギー

乱流運動エネルギーの式

- レイノルズ応力の式で $i=j$ とした式から得る

$$\frac{\partial q}{\partial t}+U_k\frac{\partial q}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u_k u_j u_j}-\nu\frac{\partial q}{\partial x_k}\right]=$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p u_j}-\overline{u_k u_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}-\nu\overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)^2}$$

- 近似方法によってさまざまなモデルがある

Smagorinsky (1969)

- 1 次のクロージャモデル
  - （シアーによる生成）＝（散逸）を仮定
  - 散逸率は次元解析から定式化
- 海洋モデルや工学分野でよく用いられる
  - Smagorinsky (1969) は大気大循環モデルに用いた
- 取り扱いは簡単, その分問題点もある
  - 大気安定度によってパラメータを使い分け
  - さまざまな改良版モデルが存在

$$\cancel{\frac{\partial q}{\partial t} + U_k \frac{\partial q}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u_k u_j u_j} - \nu \frac{\partial q}{\partial x_k}\right]} =$$

$$- \cancel{\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p u_j}} - \overline{u_k u_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)^2}$$

⇩

$$\overline{u_k u_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \propto - \frac{q^{3/2}}{l}$$

$$q \propto l^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right)^2\right], \quad K_m = (C_s l)^2 \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right)^2}$$

$Cs = 0.1 \sim 0.2,\ l = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$

Klemp and Wilhelmson (1978)

- 1.5 次のクロージャモデル
  - 乱流運動エネルギーの式を計算
  - ３次相関と圧力速度相関は無視

- 大気対流モデルによく用いられる
  - 積雲対流のシミュレーションなどに利用

$$\frac{\partial q}{\partial t}+U_k\frac{\partial q}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\cancel{\overline{u_k u_j u_j}}-\nu\frac{\partial q}{\partial x_k}\right]=$$

$$-\cancel{\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{pu_j}}-\overline{u_k u_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}-\nu\underline{\overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+U_k\frac{\partial q}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[K_m\frac{\partial q}{\partial x_k}\right]=-\overline{u_k u_j}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}-\underline{\frac{C_\varepsilon}{l}q^{3/2}}$$

熱の輸送

- SGS 成分の運動量フラックスと同様に近似

- 乱流プランドル数を一定

$$\overline{u_j \theta} = -K_h \frac{\partial \Theta}{\partial x_j}, \quad K_h = C K_m$$

  - $C = 3$ (Klemp and Wilhelmson, 1978)
  - $C = 2.5$ (Lilly, 1969)

目次

- 大気の流れとクロージャ問題
- 大気モデルにおける乱流混合の取り扱い
  - 渦粘性モデル
  - 応力方程式モデル
- 実際の計算例
- 議論
  - 火山噴煙シミュレーションへの応用

応力方程式モデル

- レイノルズ応力方程式を計算する

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[U_k \overline{u_i u_j} + \overline{u_k u_i u_j} - \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p u_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p u_j} =$$

$$- \overline{u_k u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_k u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}$$

- 高次の相関項は適当に近似
  - そのままだと計算が大変
  - どの程度近似するかは対象とする問題による

Mellor and Yamada (1974)

- レイノルズ応力方程式を系統的に近似, 近似の程度毎に複数のモデルを提案
  - レベル4からレベル1まで4つのモデル
  - 温位などのスカラーに関する相関もまじめに計算
- 大気境界層乱流に適用, 観測結果をよく再現
  - ワンガラ実験(Clark, et al., 1971)
- 大気大循環モデルによく用いられる

Mellor and Yamada (1974)

- 近似その１
  - 圧力速度相関項は無視
  - ３次相関は2次相関の拡散で表現
  - 散逸率は次元解析的に（渦粘性モデルと同じ）
  - 圧力によるエネルギー分配は Rotta (1951) の考察に基づいて近似

- この近似で得られるモデルを「レベル４モデル」と呼ぶ

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[U_k \overline{u_i u_j} + \underline{\overline{u_k u_i u_j}} - \cancel{\nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}\right] + \cancel{\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{p u_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p u_j}} =$$

$$-\overline{u_k u_i}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_k u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \underline{\overline{p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}} - \underline{2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[U_k \overline{u_i u_j} \underline{- (2q)^{1/2} l \left(\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_k u_i}}{\partial x_j}\right)}\right] =$$

$$-\overline{u_k u_i}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_k u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

$$\underline{-\frac{(2q)^{1/2}}{3l}\left(\overline{u_i u_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} q\right) + C_1 q\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)} \underline{- \frac{2}{3}\frac{(2q)^{3/2}}{l}}$$

Mellor and Yamada (1974)

- 近似その2
  - 乱流の非等方性は小さいと仮定
  - 非等方成分の大きさをスケーリングパラメータ

$$\overline{u_i u_j} = \left(\frac{\delta_{ij}}{3} + a_{ij} \right) 2q$$

  - 近似の程度によって3つのモデルを提案
    - レベル3, レベル2, レベル1

レベル3モデル

- O(a²)の項を無視
- 乱流運動エネルギーだけ予報

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[U_k q-\left(\frac{5}{6}(2q)^{1/2}l\frac{\partial q}{\partial x_k}\right)\right]=-\overline{u_k u_i}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{(2q)^{3/2}}{l}$$

$$\overline{u_i u_j}=\frac{2}{3}\delta_{ij}q$$

$$-\frac{3l}{(2q)^{1/2}}\left[\left(\overline{u_k u_i}-2C_1 q\delta_{ki}\right)\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+\left(\overline{u_k u_j}-2C_1 q\delta_{kj}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{u_k u_l}\frac{\partial U_l}{\partial x_k}\right]$$

$$-\frac{3l}{(2q)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{(2q)^{1/2}l}{3}\left(\delta_{ik}\frac{\partial(2q)}{\partial x_j}+\delta_{jk}\frac{\partial(2q)}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial(2q)}{\partial x_k}\right)\right]$$

レベル2モデル

- 移流項も O(a²) と仮定して無視
- すべての量が診断的に求まる

$$\cancel{\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[U_k q-\left(\frac{5}{6}(2q)^{1/2} l \frac{\partial q}{\partial x_k}\right)\right]} = -\overline{u_k u_i}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{(2q)^{3/2}}{l}$$

$$\begin{aligned}
\overline{u_i u_j} &= \frac{2}{3}\delta_{ij} q \\
&\quad -\frac{3l}{(2q)^{1/2}}\left[\left(\overline{u_k u_i}-2C_1 q\delta_{ki}\right)\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+\left(\overline{u_k u_j}-2C_1 q\delta_{kj}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{u_k u_l}\frac{\partial U_l}{\partial x_k}\right] \\
&\quad \cancel{-\frac{3l}{(2q)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{(2q)^{1/2} l}{3}\left(\delta_{ik}\frac{\partial(2q)}{\partial x_j}+\delta_{jk}\frac{\partial(2q)}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial(2q)}{\partial x_k}\right)\right]}
\end{aligned}$$

レベル2モデル

- 移流項も O(a²) と仮定して無視
- すべての量が診断的に求まる

$$\frac{(2q)^{3/2}}{l} = -\overline{u_k u_i}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3}\delta_{ij} q$$

$$-\frac{3l}{(2q)^{1/2}}\left[\left(\overline{u_k u_i} - 2C_1 q \delta_{ki}\right)\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \left(\overline{u_k u_j} - 2C_1 q \delta_{kj}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{u_k u_l}\frac{\partial U_l}{\partial x_k}\right]$$

レベル１モデル

- O(a) の項も無視
- Smagorinsky (1969) と同等のモデル

$$\frac{(2q)^{3/2}}{l} = -\overline{u_k u_i}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3}\delta_{ij} q$$

$$-\frac{3l}{(2q)^{1/2}}\left[\left(\cancel{\overline{u_k u_i}} - 2C_1 q\delta_{ki}\right)\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \left(\cancel{\overline{u_k u_j}} - 2C_1 q\delta_{kj}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \cancel{\frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{u_k u_l}\frac{\partial U_l}{\partial x_k}}\right]$$

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3}\delta_{ij} q - (2q)^{1/2} l\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)$$

各レベルモデル間の比較計算

- 理想的な条件を与え, 大気境界層の日変化を計算
  - 平均成分の式
    - 静水圧近似, 水平圧力勾配は一定, 水平温位勾配なし, 水平乱流混合なし
  - SGS 成分
    - 鉛直1次元, 鉛直フラックスのみ計算
  - 実験設定
    - 地表面温度の日変化, 初期温位分布は観測を基に与える
    - 鉛直計算領域 5km, 格子点数 80（不等間隔）
    - 計算モデル時間は 10 日

計算結果（温位場）

- レベル4モデルとレベル3モデルの結果はほとんど変わらない
  - 乱流運動エネルギーを予報すれば十分

- 地表付近の温位分布の特徴はレベル2モデルでも表現されている

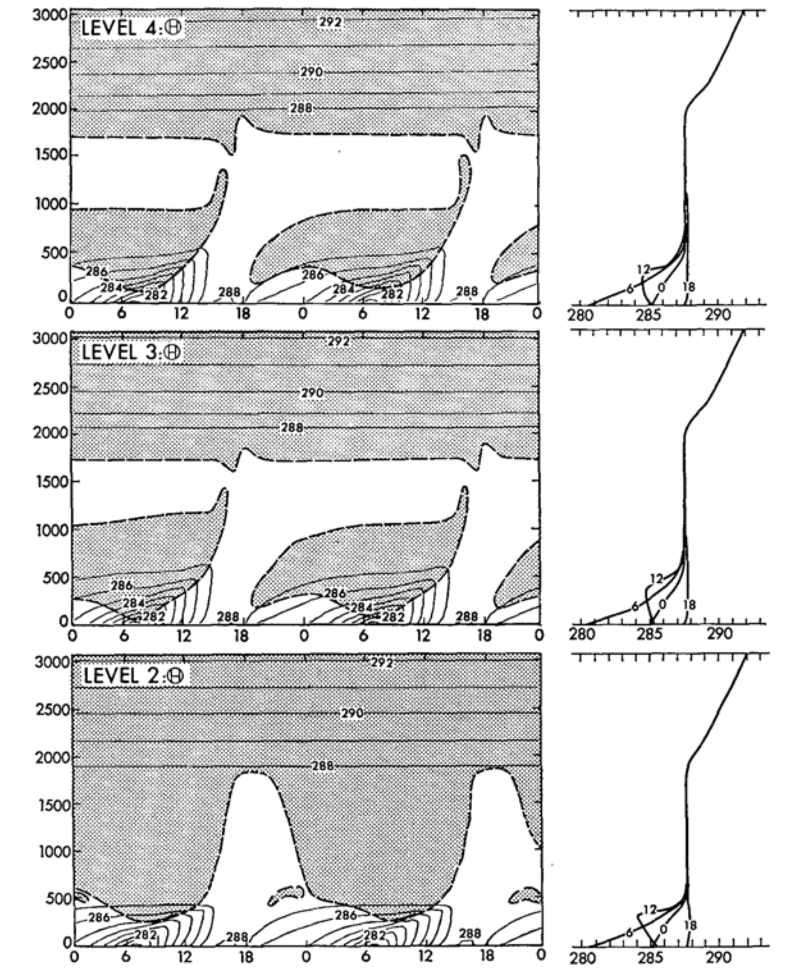


FIG. 5. Potential temperature: the shaded region corresponds to Ri ≥ 0.21. For Level 2, this is identically a region of zero turbulence intensity.

Mellor and Yamada (1974)

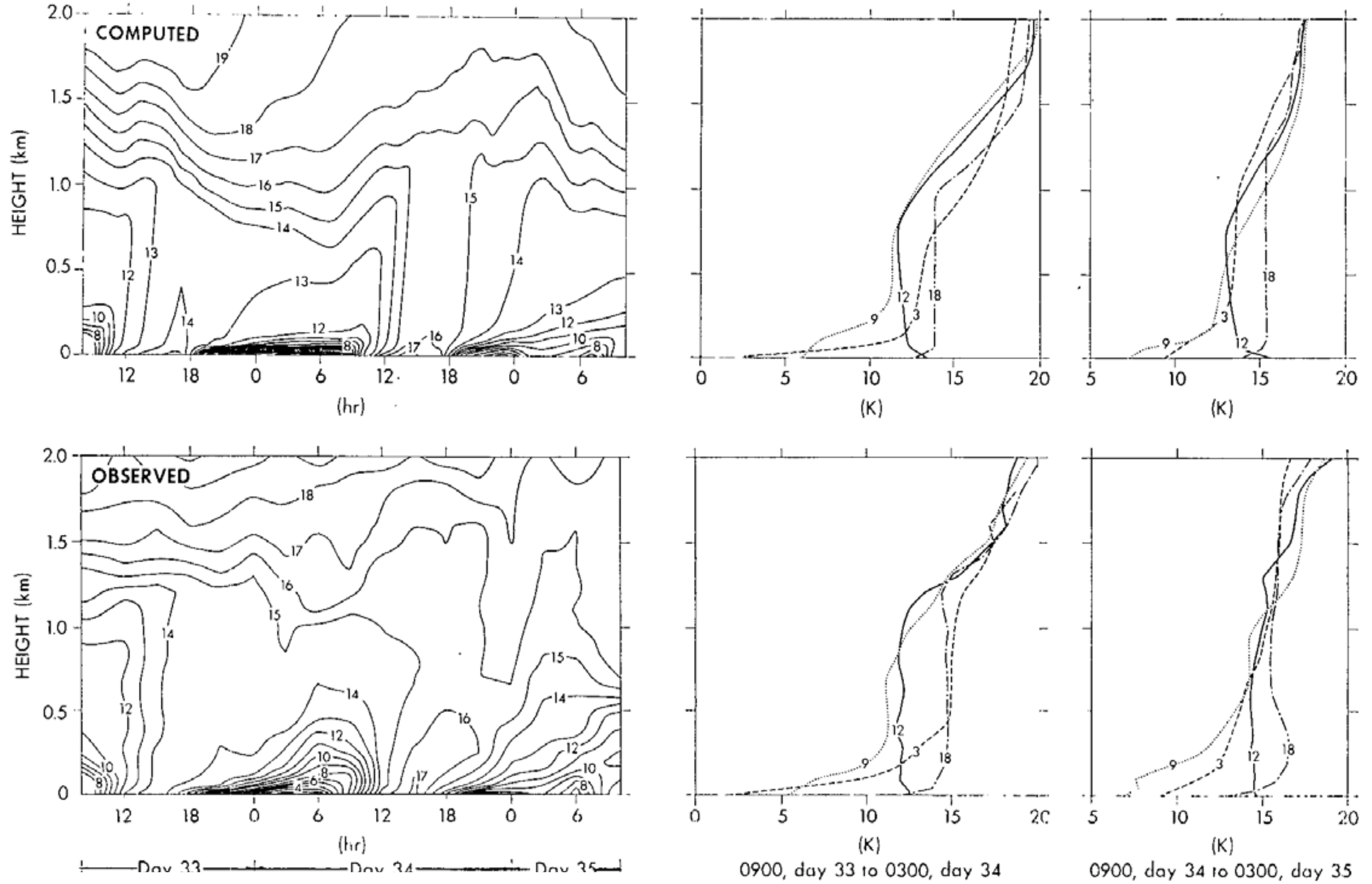
観測との比較計算

- 乾燥地での観測（ワンガラ実験, Clark et al., 1971）の再現実験
  - 平均成分の式
    - 静水圧近似, 運動方程式は線形化, 水平乱流混合なし
  - SGS 成分
    - レベル3モデル, 鉛直1次元, 鉛直フラックスのみ計算
  - 実験設定
    - 地表面温度, 水平圧力勾配, 水平温位勾配の日変化は観測を基に与える
    - 鉛直計算領域 2 km, 格子点数 80（不等間隔）
    - 計算モデル時間は 3 日

計算結果（温位場）

モデル

観測



ean virtual potential temperature. Vertical profiles at various times
ır lines ($\Theta_v - 273$) are in units of degrees K.

観測結果をおおむね再現

Mellor and Yamada (1975)

渦粘性モデルとの対応

- レベルを下げると渦粘性モデルに対応する
  - 比例定数の値は異なる
- 1.5 次クロージャの渦粘性モデル
  - Klemp and Wilhelmson (1978)
  - レベル3モデルとレベル1モデルの中間
- 1次クロージャの渦粘性モデル
  - Smagorinsky (1969)
  - レベル1モデルと対応

目次

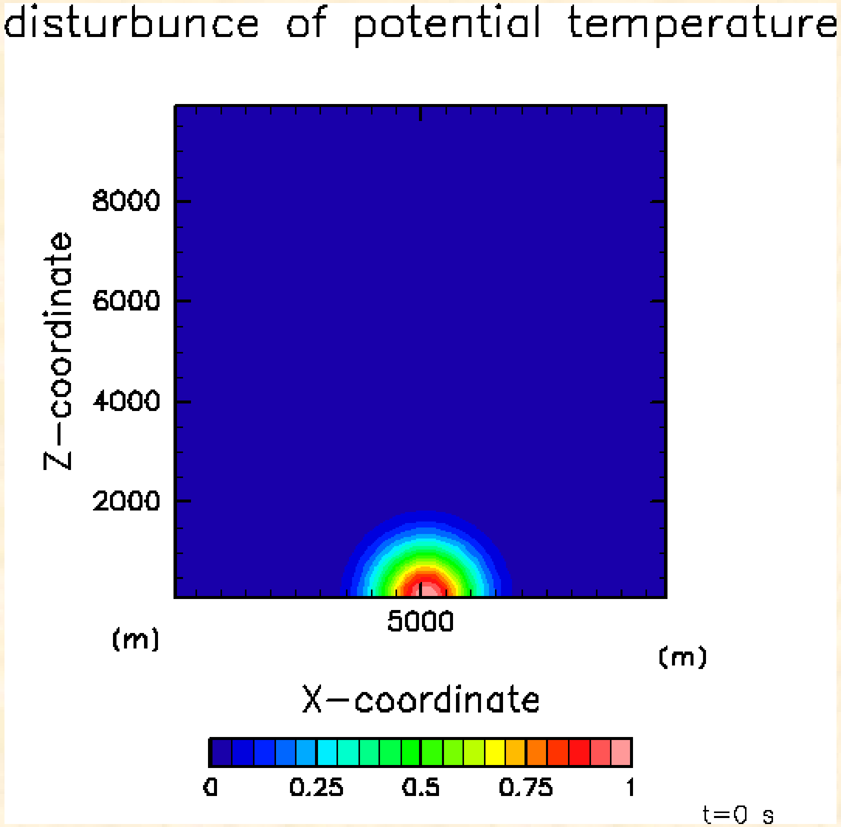
- 大気の流れとクロージャ問題
- 大気モデルにおける乱流混合の取り扱い
  - 渦粘性モデル
  - 応力方程式モデル
- 実際の計算例
- 議論
  - 火山噴煙シミュレーションへの応用

実際の計算例: モデルの概要

- 基礎方程式: 2次元準圧縮系方程式
  - 連続の式を線形化した圧縮系
- 乱流混合
  - なし(数値粘性のみ, K_n=1.0e-4×Δ^2/Δt)
  - 1 次クロージャの渦粘性モデル
    - Klemp and Wilhelmson (1978) のモデルを簡略化
  - 1.5 次クロージャの渦粘性モデル
    - Klemp and Wilhelmson (1978)
- 離散化
  - 空間: 中心差分(移流項は 4 次, その他は 2 次)
  - 時間: リープフロッグ法(音波については陰解法)

実際の計算例：2次元サーマル

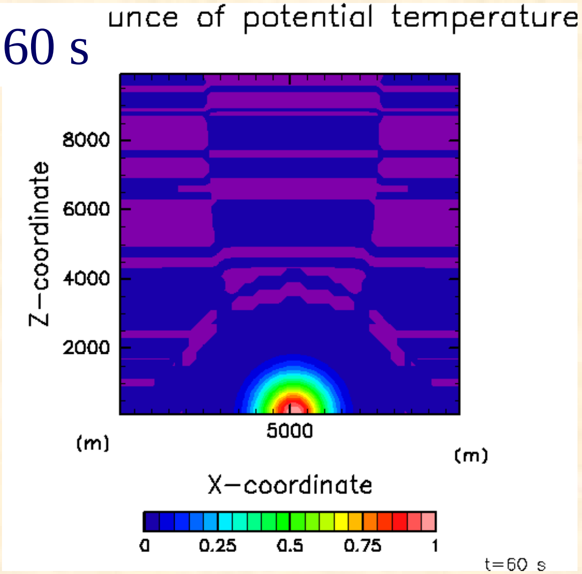
- 計算領域と分解能
  - 水平 10 km, 鉛直 10 km
  - $\Delta x = \Delta z = 200$ m,
- 境界条件
  - 水平に周期境界条件
  - 上下境界で w=0
- 初期条件と計算時間
  - 水平一様温位 (300 K) の静止大気にガウス型の温位擾乱を与える
  - 50 分計算, $\Delta t = 2.0$ sec ($K_n = 2$ m^2/sec)

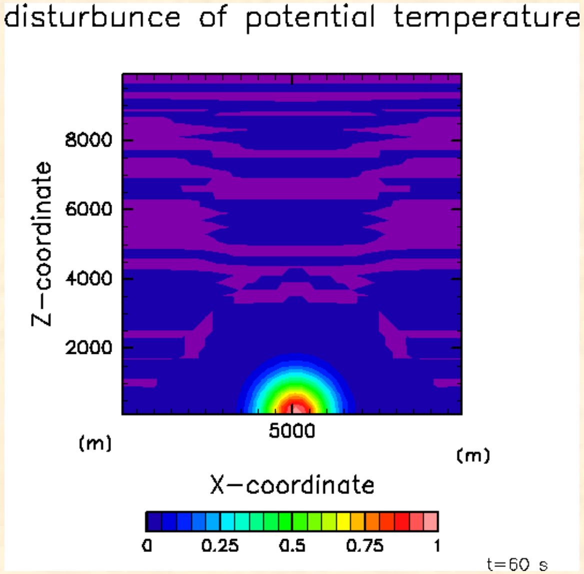


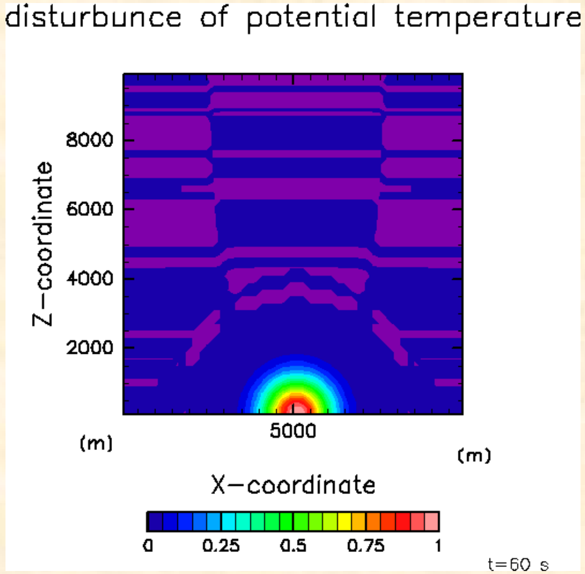
計算結果(温位場)

なし(数値粘性のみ)	1 次クロージャ	1.5 次クロージャ

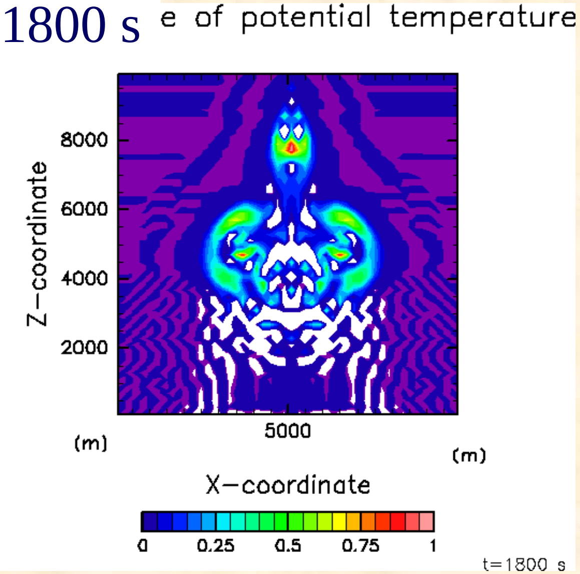
t = 60 s

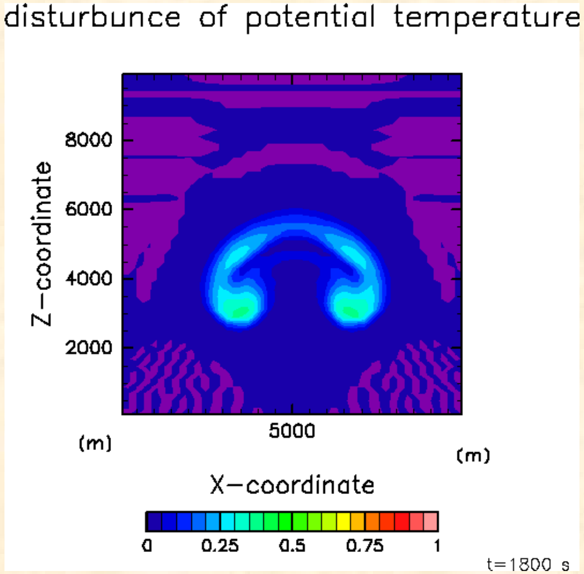


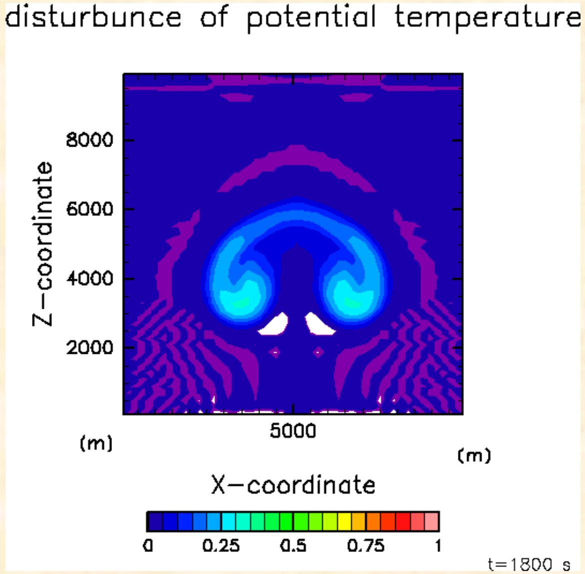




t = 1800 s







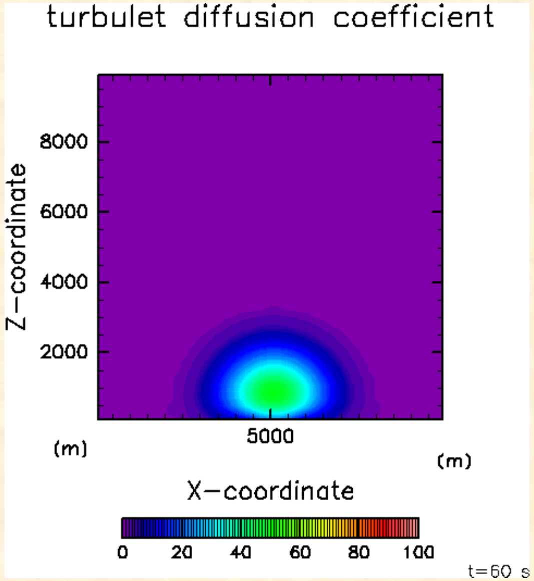
計算結果（渦粘性係数）

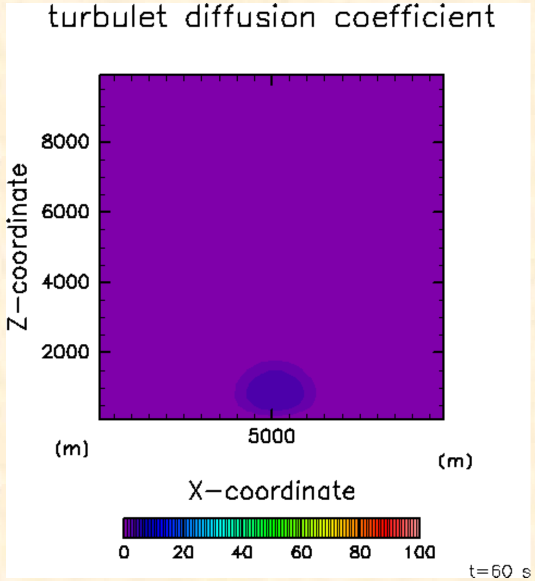
なし（数値粘性のみ）

1 次クロージャ

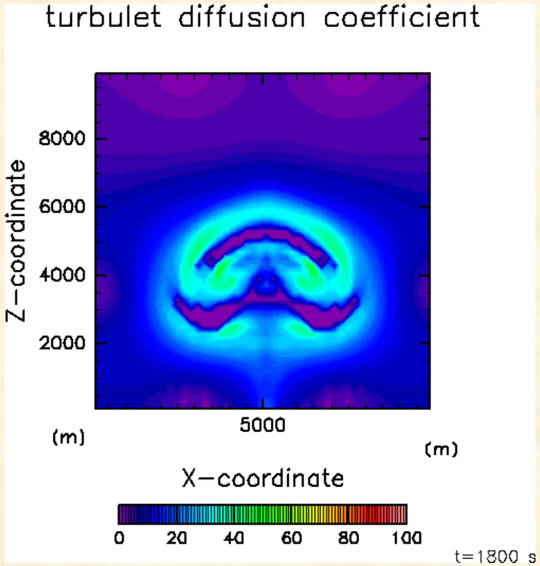
1.5 次クロージャ

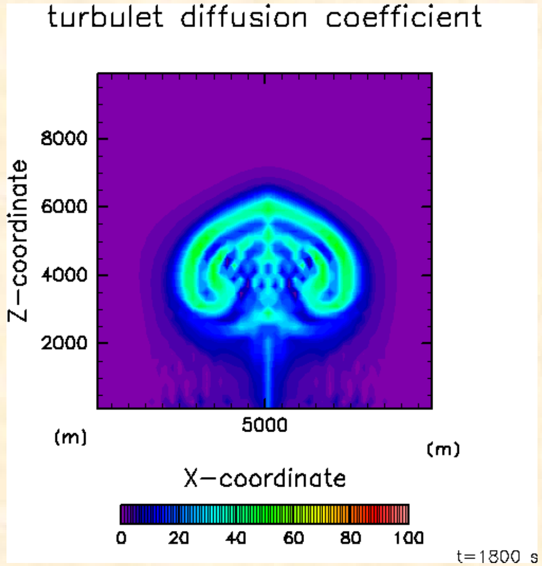
t = 60 s





t = 1800 s





目次

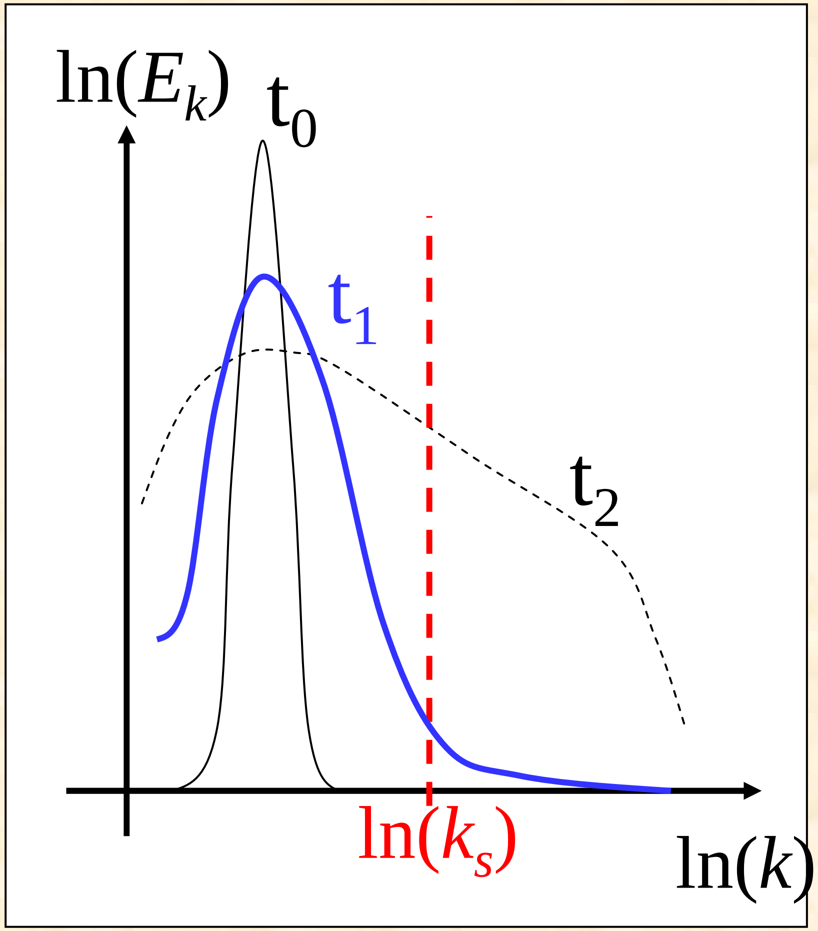
- 背景
- 大気の流れとクロージャ問題
- 大気モデルにおける乱流混合の取り扱い
  - 渦粘性モデル
  - 応力方程式モデル
- 実際の計算例
- 議論
  - 火山噴煙シミュレーションへの応用

火山噴煙シミュレーションへの応用

- 差分スキーム依存の数値粘性よりは良い
  - 物理的考察に基づいている
  - 移流と拡散の寄与が分離される
    - 移流項の差分スキームとして上流差分を用いると, 拡散が implicit に含まれてしまう
- そのまま使えるかはよくわからない
  - チューニングは大気境界層乱流で行われている
  - 計算結果を観測と比較しながら検討する必要があるだろう

火山噴煙シミュレーションへの応用

- 本当に必要か？
  - SGS にエネルギーがカスケードされる前に計算を終えてよいのであれば必要ないかも
  - エネルギースペクトルの時間変化を調べて検討するとよい？



参考文献

- Clark, et al., 1971: Tech. Paper 19, Div. Meteor. Phys., CSIRO, Australia.
- Klemp and Wilhelmoson, 1978: J. Atmos. Sci., 35, 1070.
- Mellor and Yamada, 1974: J. Atmos. Sci., 31, 1791.
- Mellor and Yamada, 1975: J. Atmos. Sci., 32, 2309.
- Smagorinsky, J., 1969: Mon. Wea. Rev., 91, 99.
- Stull, R. B., 1988: *An introduction to boundary layer meteorology*, Kluwer, 680pp.
- 山田哲二, 1992: 3次元大気乱流拡散モデル, 大気環境シミュレーション, 白亜書房.
- 山田哲二, 1999: 乱流クロージャモデル, 気象研究ノート196号, 日本気象学会.
- 数値流体力学編集委員会編, 1995: 乱流解析, 東京大学出版会.
- 中西幹朗, 2007: 大気境界層:モデル研究を中心に，天気, 54, 116.