

1. 地球磁場の分布と変動 (1)

講義内容

1.1 地磁気の数学的な表現

- 1.1.1 地磁気のグローバル分布とポテンシャル磁場
- 1.1.2 球面における関数の表現：球面調和関数展開
- 1.1.3 地磁気ポテンシャルとガウス係数
- 1.1.4 ガウス係数の求め方

1.2 地球磁場の分布

- 1.2.1 地表における地磁気の分布
- 1.2.2 核-マントル境界 (CMB) における地磁気の分布

G.B. Arfken and H.J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, (5th ed.), Academic Press
[アルフケン、ウェーバー、基礎物理数学第4版 特殊関数、講談社 (4冊シリーズの3冊目)]
K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence, Mathematical Methods for Physics and Engineering, Cambridge Univ. Press.

1.1.1 地磁気のグローバル分布とポテンシャル磁場

- ・ さまざまな地点で地磁気観測を行えば、それらの地点での地磁気ベクトルを知ることが可能
- ・ 観測結果を用いて、グローバルな地磁気分布の定量的な議論や、地磁気観測がされていない場所の磁場を物理的・数学的に矛盾が無いように推定したい
(核-マントル境界における磁場など、地表面ではない位置の磁場を含む)
- ・ 地球内部起源の磁場と外部起源の磁場を分離したい

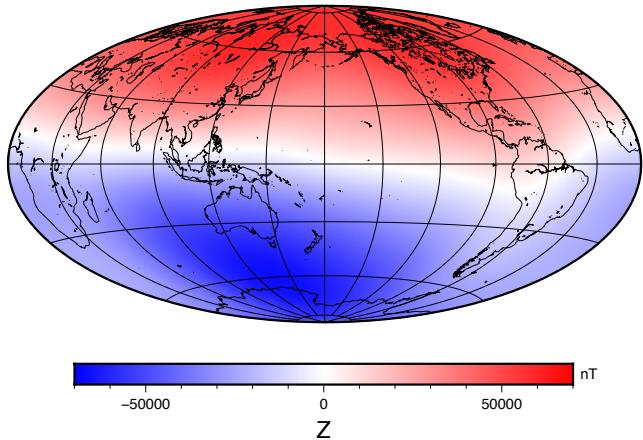
→ グローバル地磁気モデル（地磁気の数学的な表現）を用いる

- ・ グローバル地磁気モデルでは、球座標系における磁気ポテンシャル（地磁気ポテンシャル）を用いる
- ・ グローバル地磁気モデルを用いて、地磁気の時間変化についても議論する

2015.0 年における磁場分布

地表

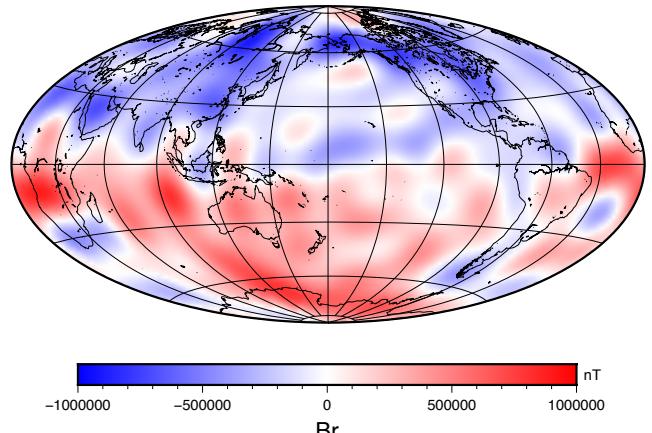
Z: 鉛直下向き成分



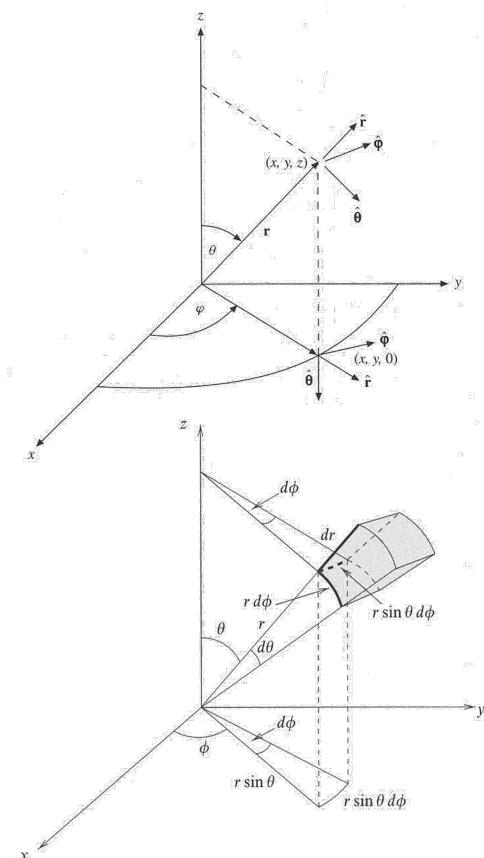
核-マントル境界

(Core-mantle Boundary, CMB)

Br : 動径成分



球座標系と微分作用素 (復習)



デカルト座標 (Cartesian) - 球座標の変換

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

球座標における座標に関する単位ベクトル

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$$

球座標系における微分作用素

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}$$

$$\mathbf{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} + a_\phi \hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi}$$

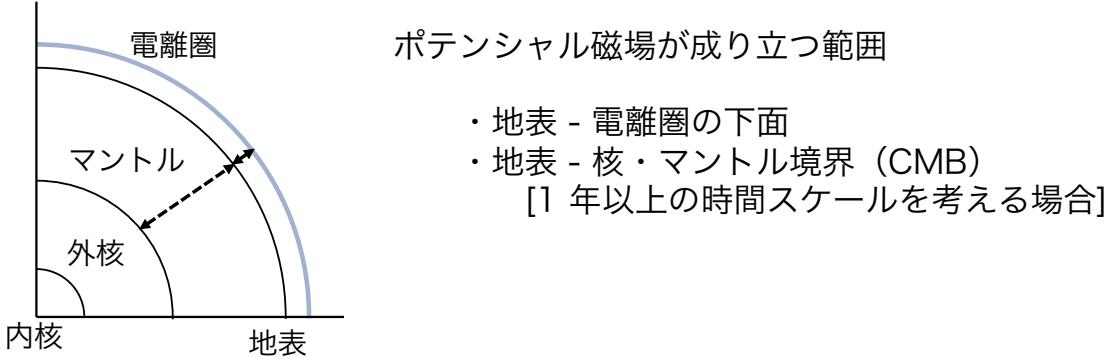
$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ a_r & r a_\theta & r \sin \theta a_\phi \end{vmatrix}$$

ポテンシャル磁場

- 空気中を考える → 電流を無視
- 比較的ゆっくりした変動を考える → 電束電流を無視（電磁波としての振る舞いを無視）
- 透磁率は一定とし、真空の透磁率 (μ_0) を採用

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = -\nabla V \quad V: \text{磁気ポテンシャル}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \nabla^2 V = 0$$



1.1.2 球面における関数の表現：球面調和関数展開

球座標系におけるラプラス方程式の解

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\frac{1}{r^{n+1}} (A_{n,m} \cos m\phi + B_{n,m} \sin m\phi) + r^n (C_{n,m} \cos m\phi + D_{n,m} \sin m\phi) \right] P_{n,m}(\cos \theta)$$

$P_{n,m}(\cos \theta)$: ルジヤンドル(Legendre)陪関数 n : 次数 (degree) m : 階数 (order)

球面調和関数 (Spherical harmonics)

$$\cos m\phi P_{n,m}(\cos \theta), \sin m\phi P_{n,m}(\cos \theta) \quad (m \leq n)$$

$$e^{im\phi} P_{n,m}(\cos \theta) = Y_{n,m}(\theta, \phi) \quad (|m| \leq n)$$

Note : 第2種ルジヤンドル関数は $\theta=0, \pi$ で発散するため係数を 0 とし、上記には含めていない。

Table 12.1 Legendre Polynomials

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1 \\
 P_1(x) &= x \\
 P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
 P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
 P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
 P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\
 P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \\
 P_7(x) &= \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x) \\
 P_8(x) &= \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)
 \end{aligned}$$

ここでは

$$x = \cos \theta$$

$$P_n(1) = 1$$

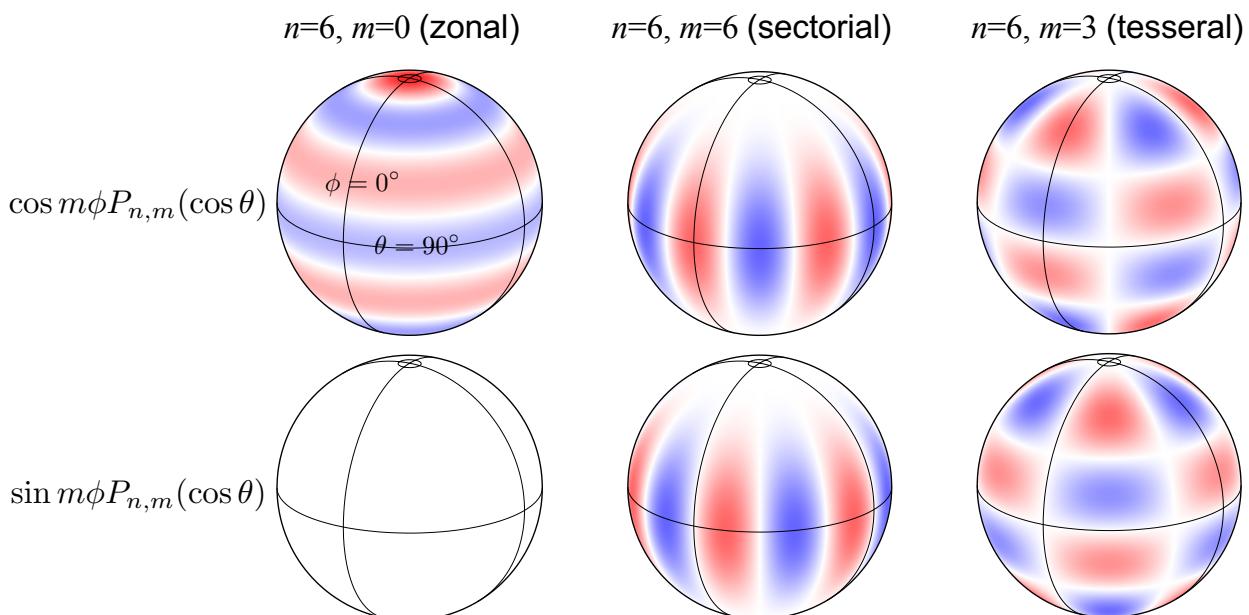
Table 12.2 Associated Legendre Functions

$$\begin{aligned}
 P_1^1(x) &= (1 - x^2)^{1/2} = \sin \theta \\
 P_2^1(x) &= 3x(1 - x^2)^{1/2} = 3 \cos \theta \sin \theta \\
 P_2^2(x) &= 3(1 - x^2) = 3 \sin^2 \theta \\
 P_3^1(x) &= \frac{3}{2}(5x^2 - 1)(1 - x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \\
 P_3^2(x) &= 15x(1 - x^2) = 15 \cos \theta \sin^2 \theta \\
 P_3^3(x) &= 15(1 - x^2)^{3/2} = 15 \sin^3 \theta \\
 P_4^1(x) &= \frac{5}{2}(7x^3 - 3x)(1 - x^2)^{1/2} = \frac{5}{2}(7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \sin \theta \\
 P_4^2(x) &= \frac{15}{2}(7x^2 - 1)(1 - x^2) = \frac{15}{2}(7 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta \\
 P_4^3(x) &= 105x(1 - x^2)^{3/2} = 105 \cos \theta \sin^3 \theta \\
 P_4^4(x) &= 105(1 - x^2)^2 = 105 \sin^4 \theta
 \end{aligned}$$

注：上記は本講義の P_{nm} に対応

G.B. Arfken and H.J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, (5th ed.), Academic Press
 (アルフケン、ウェーバー、基礎物理数学第4版Vol. 3 特殊関数、講談社 (4冊シリーズの3冊目))
 K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence, Mathematical Methods for Physics and Engineering, Cambridge Univ. Press.

球面調和関数：球面上の分布



- $n-m$ 本の緯度線および $2m$ 本の経度線上で 0 となる
 (球面上の極を通る大円として考えると、経度線に沿った m 本の大円上で 0 となる)
- $n-m$ が偶数の時、赤道面に対して対称
- $n-m$ が奇数の時、赤道面に対して反対称

係数の決定：球面調和関数直交性と規格化

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{n,m} \cos m\phi + B_{n,m} \sin m\phi) P_{n,m}(\cos \theta)$$

球面調和関数の直交性

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos m\phi P_{n,m}(\cos \theta) \cdot \cos m'\phi P_{n',m'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq n' \text{ or } m \neq m' \\ \frac{1}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{if } n = n' \text{ and } m = m' \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin m\phi P_{n,m}(\cos \theta) \cdot \sin m'\phi P_{n',m'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq n' \text{ or } m \neq m' \\ \frac{1}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{if } n = n' \text{ and } m = m' \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos m\phi P_{n,m}(\cos \theta) \cdot \sin m'\phi P_{n',m'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi = 0$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \cos m\phi P_{n,m}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} A_{n,m}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \sin m\phi P_{n,m}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} B_{n,m}$$

係数の決定：球面調和関数直交性と規格化

ルジャンドル陪関数を $L_{n,m}(\cos \theta)$ とし、 $C_{n,m}$ を以下のように定義する

$$C_{n,m} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 m\phi [L_{n,m}(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 m\phi [L_{n,m}(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

規格化されていないルジャンドル陪関数

$$L_{n,m}(\cos \theta) = P_{n,m}(\cos \theta) \Rightarrow C_{n,m} = \frac{1}{2(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

規格化 [1] Gauss-Laplace 規格化

$$C_{n,m} = \frac{2^n (n+m)!(n-m)!}{(2-\delta_{m0})(2n+1)} \left[\frac{n!}{(2n)!} \right]^2 \quad P^{n,m}(\cos \theta) = \frac{2^n n!(n-m)!}{(2n)!} P_{n,m}(\cos \theta)$$

規格化 [2] Schmidt 半規格化 (quasi-normalized form) [地磁気で用いられる]

$$C_{n,m} = \frac{1}{2n+1} \quad P_n^m(\cos \theta) = \begin{cases} P_{n,0} & \text{if } m = 0 \\ \left[\frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_{n,m}(\cos \theta) & \text{if } m > 0 \end{cases}$$

規格化 [3] 完全規格化 [測地で用いられる]

$$C_{n,m} = 1 \quad R_n^m(\cos \theta) = \begin{cases} (2n+1)^{1/2} P_{n,0} & \text{if } m = 0 \\ \left[2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_{n,m}(\cos \theta) & \text{if } m > 0 \end{cases}$$

1.1.3 地磁気ポテンシャルとガウス係数

ラプラス方程式の一般解

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\frac{1}{r^{n+1}} (A_{n,m} \cos m\phi + B_{n,m} \sin m\phi) + r^n (C_{n,m} \cos m\phi + D_{n,m} \sin m\phi) \right] P_{n,m}(\cos \theta)$$

地磁気ポテンシャルの表現



$$V = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) + \left(\frac{r}{a} \right)^n (q_n^m \cos m\phi + s_n^m \sin m\phi) \right] P_n^m(\cos \theta)$$

a : 地球の半径 (基準半径)

$g_n^m, h_n^m, q_n^m, s_n^m$: ガウス係数 (磁束密度の単位 : nT) 、時間に依存する

g_n^m, h_n^m : 内部起源磁場を表す係数 (関連項は $r \rightarrow \infty$ で 0)

q_n^m, s_n^m : 外部起源磁場を表す係数 (関連項は $r \rightarrow 0$ で 0)

または

$$V = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} i_n^m + \left(\frac{r}{a} \right)^n e_n^m \right] Y_n^m(\cos \theta) \quad Y_n^m(\theta, \phi) = e^{im\phi} P_n^m(\cos \theta)$$

i_n^m, e_n^m : 複素数の係数

地磁気の成分の表現 : 球座標での磁場成分

$$V = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) + \left(\frac{r}{a} \right)^n (q_n^m \cos m\phi + s_n^m \sin m\phi) \right] P_n^m(\cos \theta)$$

$$\mathbf{B} = -\nabla V$$

$$B_r(r, \theta, \phi) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{n+2} \frac{(n+1)}{n} (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) - \left(\frac{r}{a} \right)^{n-1} n (q_n^m \cos m\phi + s_n^m \sin m\phi) \right] P_n^m(\cos \theta)$$

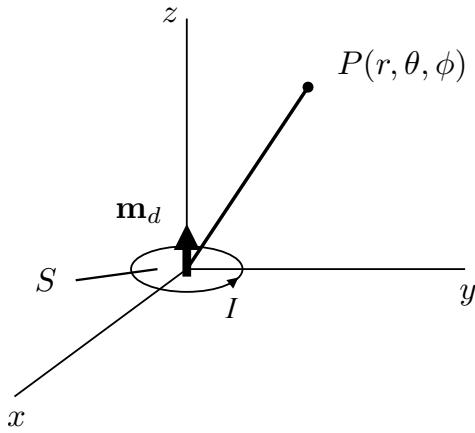
$$B_\theta(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{n+2} (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) + \left(\frac{r}{a} \right)^{n-1} (q_n^m \cos m\phi + s_n^m \sin m\phi) \right] \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}$$

$$B_\phi(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{n+2} m (g_n^m \sin m\phi - h_n^m \cos m\phi) + \left(\frac{r}{a} \right)^{n-1} m (q_n^m \sin m\phi - s_n^m \cos m\phi) \right] P_n^m(\cos \theta)$$

内部起源の双極子磁場：軸双極子と赤道双極子

双極子磁場成分（地心双極子）：球関数展開の $n=1$ の成分

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mu_0 \mathbf{m}_d \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \\ &= \frac{\mu_0 m_{d,z} \cos \theta}{4\pi r^2} \\ &= \frac{\mu_0 m_{d,z} z}{4\pi r^3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= a \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 \{ g_1^0 P_1^0(\cos \theta) + (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \sin \phi) P_1^1(\cos \theta) \} \right] \\ &= a \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 \{ g_1^0 \cos \theta + (g_1^1 \cos \phi + h_1^1 \sin \phi) \sin \theta \} \right] \\ &= \left(\frac{a}{r} \right)^3 \{ g_1^0 z + g_1^1 x + h_1^1 y \} \end{aligned}$$

g_1^0 : 軸双極子
 g_1^1, h_1^1 : 赤道双極子

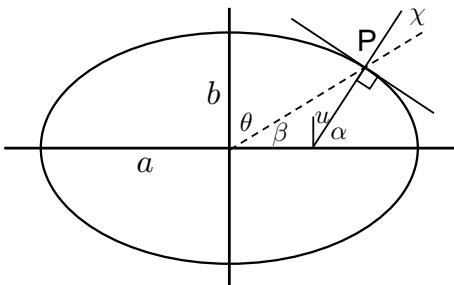
$$\begin{aligned} m_{d,z} &= \frac{4\pi a^3}{\mu_0} g_1^0 \\ m_{d,x} &= \frac{4\pi a^3}{\mu_0} g_1^1 \\ m_{d,y} &= \frac{4\pi a^3}{\mu_0} h_1^1 y \end{aligned}$$

地磁気成分間の対応 (球座標 - XYZ)

地表面が球面であると仮定した場合

$$\begin{array}{lll} X = -B_\theta & F = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2 + B_\phi^2} & D = \tan^{-1} \left[\frac{B_\phi}{-B_\theta} \right] \\ Y = B_\phi & H = \sqrt{B_\theta^2 + B_\phi^2} & I = \tan^{-1} \left[\frac{-B_r}{\sqrt{B_\theta^2 + B_\phi^2}} \right] \\ Z = -B_r & & \end{array}$$

地表面が回転楕円体である影響を考慮した場合



地理的緯度と地心緯度の差 $\chi = \theta - u = \alpha - \beta$

回転楕円体上で $\cot \theta = \tan \beta = \left(\frac{b^2}{a^2} \right) \tan \alpha$

座標変換すると

$$X = -B_\theta \cos \chi - B_r \sin \chi$$

$$Y = B_\phi$$

$$Z = B_\theta \sin \chi - B_r \cos \chi$$

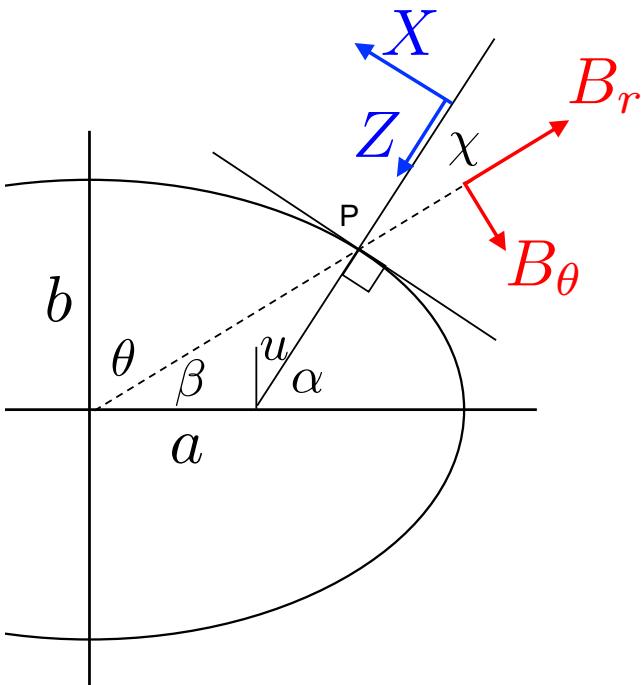
離心率 e : $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$

扁平率 f : $f = (a - b)/a (\approx 1/298.257)$

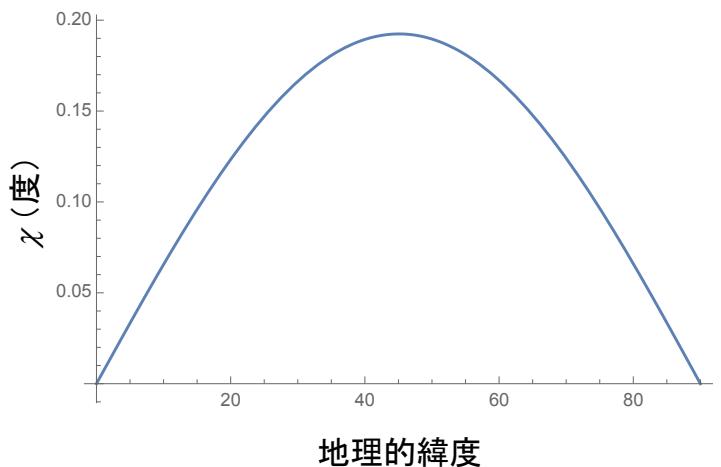
地理的 (測地的) 緯度 α : $\alpha = 90^\circ - u$

地心緯度 β : $\beta = 90^\circ - \theta$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & -\cos \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_\theta \\ B_\phi \\ B_r \end{bmatrix}$$



$$\chi = \theta - u = \alpha - \beta$$



1.1.4 ガウス係数の求め方

ガウス係数 $\{g_n^m, h_n^m, q_n^m, s_n^m\}$ \longrightarrow ある地点における磁場 : 順問題
 (X, Y, Z) (B_r, B_θ, B_ϕ) H, D, I, F

多くの地点における磁場 \longrightarrow ガウス係数 : 逆問題

内部起源磁場のガウス係数のみを決める場合

$$B_r(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta)$$

$$B_\theta(r, \theta, \phi) = - \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}$$

$$B_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} m(g_n^m \sin m\phi - h_n^m \cos m\phi) P_n^m(\cos \theta)$$

打ち切り次数 : $n=N$
 求める係数の個数 : $N(N+2)$

$$\left(\sum_{n=1}^N (2n+1) = N(N+2) \right)$$

最小二乗法

$$J^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^M [B_{i,j}^{\text{observed}} - B_{i,j}^{\text{calculated}}]^2 \longrightarrow \text{最小}$$

$$\frac{\partial J^2}{\partial g_n^m} = 0, \frac{\partial J^2}{\partial h_n^m} = 0$$

i : 磁場の成分
 j : 観測点
 M : 観測数

1.1.4 ガウス係数の求め方

内外分離 (Gauss, 1839; 地磁気の主な部分が内部起源であることが証明された)

$r = a$ のとき

$$B_r(a, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n ((n+1)g_n^m - nq_n^m) \cos m\phi + ((n+1)h_n^m - ns_n^m) \sin m\phi P_n^m(\cos \theta)$$

$$B_\theta(a, \theta, \phi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n ([g_n^m + q_n^m] \cos m\phi + [h_n^m + s_n^m] \sin m\phi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}$$

$$B_\phi(a, \theta, \phi) = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n m([g_n^m + q_n^m] \sin m\phi - [h_n^m + s_n^m] \cos m\phi) P_n^m(\cos \theta)$$

$$\gamma_n^m = (n+1)g_n^m - nq_n^m \quad \lambda_n^m = (n+1)h_n^m - ns_n^m$$

$$\Gamma_n^m = g_n^m + q_n^m \quad \Lambda_n^m = h_n^m + s_n^m$$

$$g_n^m = \frac{\gamma_n^m + n\Gamma_n^m}{2n+1} \quad h_n^m = \frac{\lambda_n^m + n\Lambda_n^m}{2n+1}$$

$$q_n^m = \frac{-\gamma_n^m + (n+1)\Gamma_n^m}{2n+1} \quad s_n^m = \frac{-\lambda_n^m + (n+1)\Lambda_n^m}{2n+1}$$

(実際には、外部磁場は低次のみに存在するとして求める。)

国際標準地球磁場モデル (IGRF: International Geomagnetic Reference Field)

地球内部起源の磁場のモデル

5 年に一度改定 (IAEA division V)

1945 ~ 1995: n, m ≤ 10, 2000 ~ : n, m ≤ 13 (nT) (nT/yr)

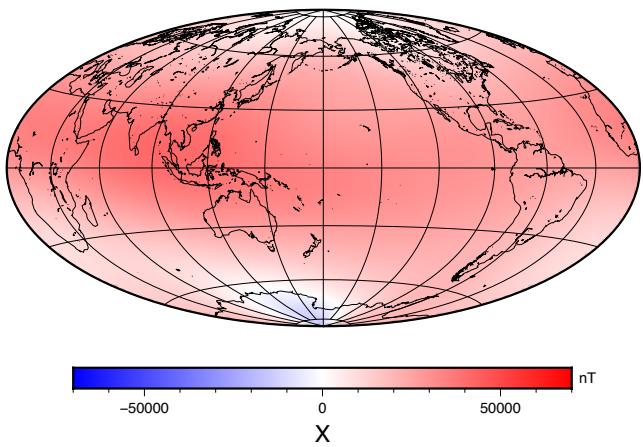
c/s	deg	ord	IGRF	IGRF	DGRF	IGRF	SV
g/h	n	m	1900.0	1905.0	2010.0	2015.0	2015-20
g	1	0	-31543	-31464	-29496.57	-29442.0	10.3
g	1	1	-2298	-2298	-1586.42	-1501.0	18.1
h	1	1	5922	5909	4944.26	4797.1	-26.6
g	2	0	-677	-728	-2396.06	-2445.1	-8.7
g	2	1	2905	2928	3026.34	3012.9	-3.3
h	2	1	-1061	-1086	-2708.54	-2845.6
g	2	2	924	1041	1668.17	1676.7	2.1
h	2	2	1121	1065	-575.73	-641.9	-14.1
g	3	0	1022	1037	1339.85	1350.7	3.4
g	3	1	-1469	-1494	-2326.54	-2352.3	-5.5
h	3	1	-330	-357	-160.40	-115.3	8.2
g	3	2	1256	1239	1232.10	1225.6	-0.7
h	3	2	3	34	251.75	244.9	-0.4
g	3	3	572	635	633.73	582.0	-10.1
h	3	3	523	480	-537.03	-538.4	1.8

1.2 地球磁場の分布

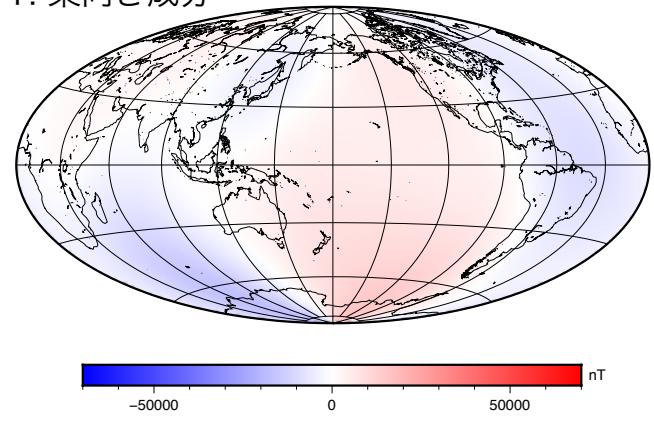
1.2.1 地表における地磁気の分布

IGRF による 2015.0 年における
地表の磁場分布 (X, Y, Z)

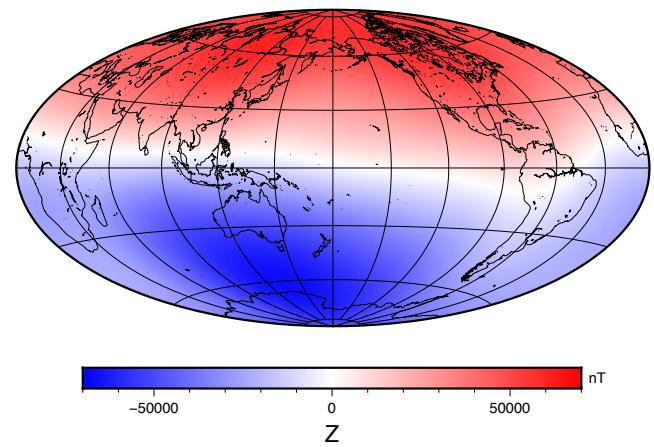
X: 北向き成分



Y: 東向き成分



Z: 鉛直下向き成分

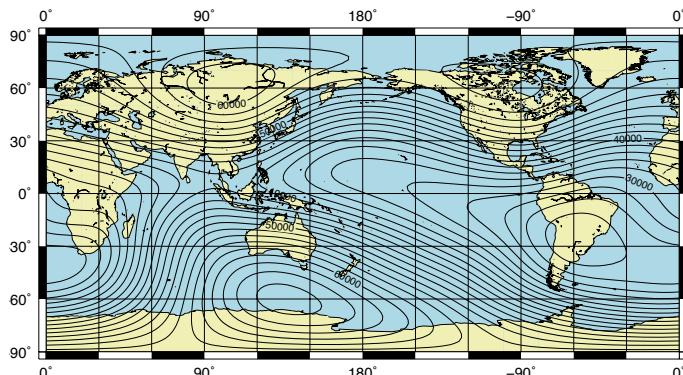


1.2 地球磁場の分布

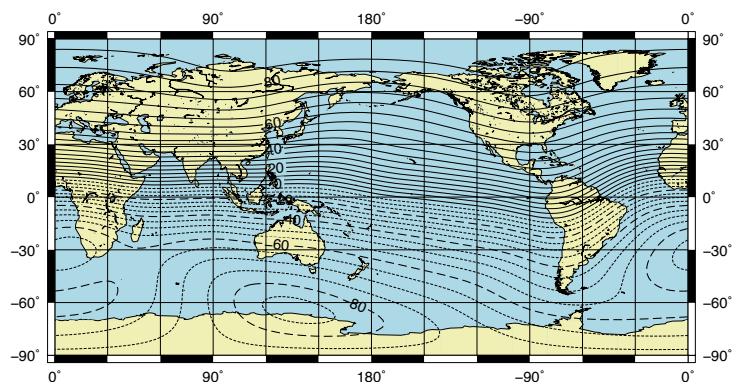
1.2.1 地表における地磁気の分布

IGRF による 2015.0 年における
地表の磁場分布 (F, D, I)

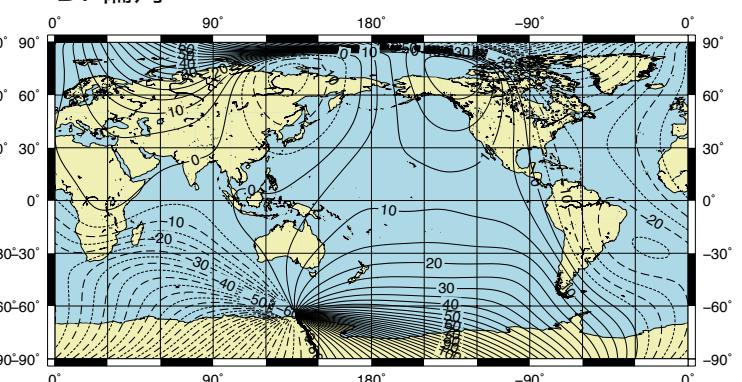
F: 全磁力



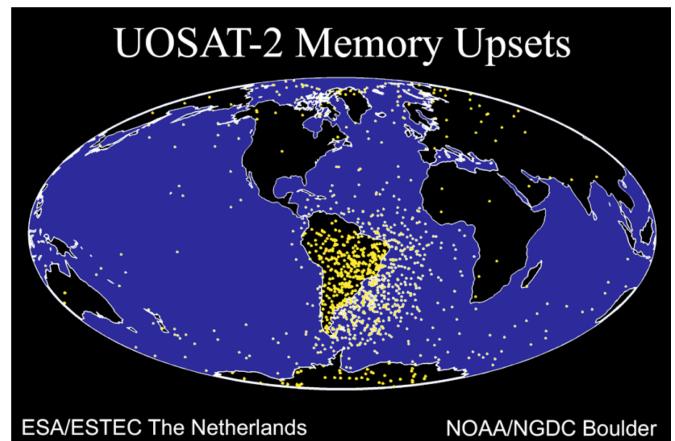
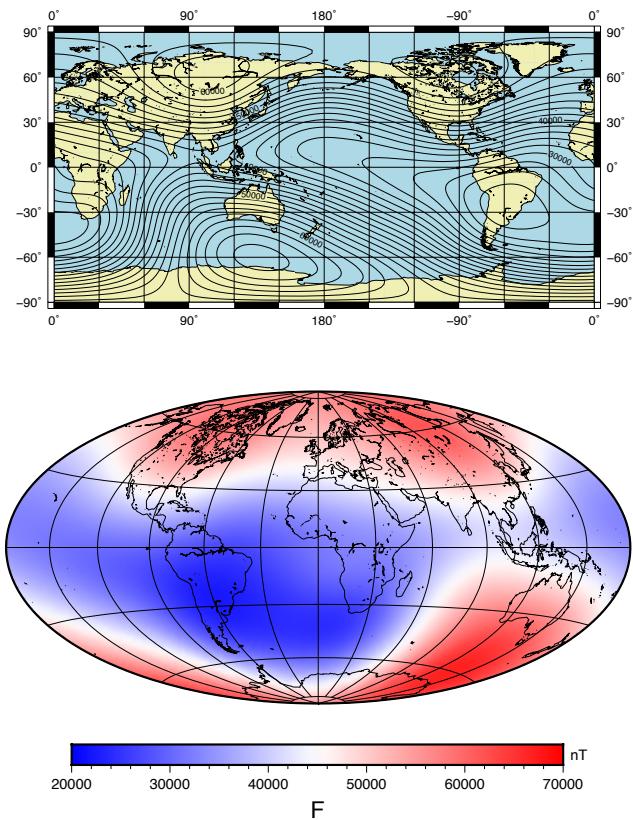
I: 伏角



D: 偏角



South Atlantic Anomaly [F が非常に小さい領域]



<https://www.ngdc.noaa.gov/stp/satellite/anomaly/satelliteanomaly.html>

地心双極子の双極子モーメントと地表における極の位置

2015.0 における標準磁場モデル (IGRF) の双極子成分 :

$$g_1^0 = -29442.0 \text{ nT}, \quad g_1^1 = -1501.0 \text{ nT}, \quad h_1^1 = 4797.1 \text{ nT}$$

地磁気双極子モーメント :

$$m_d = \sqrt{m_{d,x}^2 + m_{d,y}^2 + m_{d,z}^2} = \frac{4\pi a^3}{\mu_0} \sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2} = 7.72 \times 10^{22} \text{ Am}^2$$

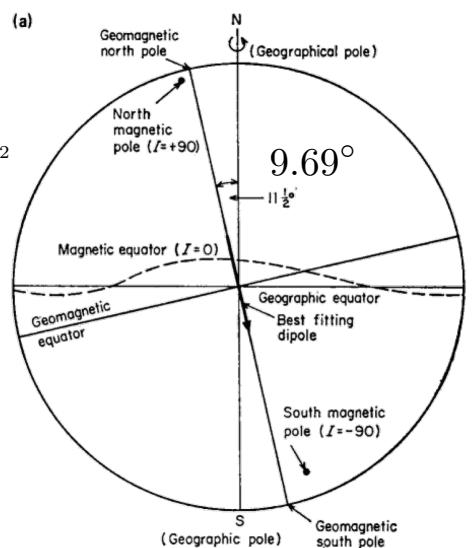
地磁気極の位置 (地磁気極 : 地心双極子の極)

$$\theta_D = \cos^{-1} \left(\frac{m_{d,z}}{m_d} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{g_1^0}{\sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2}} \right) = 170.31^\circ \rightarrow 80.31^\circ \text{S}$$

$$\phi_D = \cos^{-1} \left(\frac{m_{d,x}}{\sqrt{(m_{d,x})^2 + (m_{d,y})^2}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{g_1^1}{\sqrt{(g_1^1)^2 + (h_1^1)^2}} \right) = 107.4^\circ \text{E}$$

80.31° S, 107.4° E

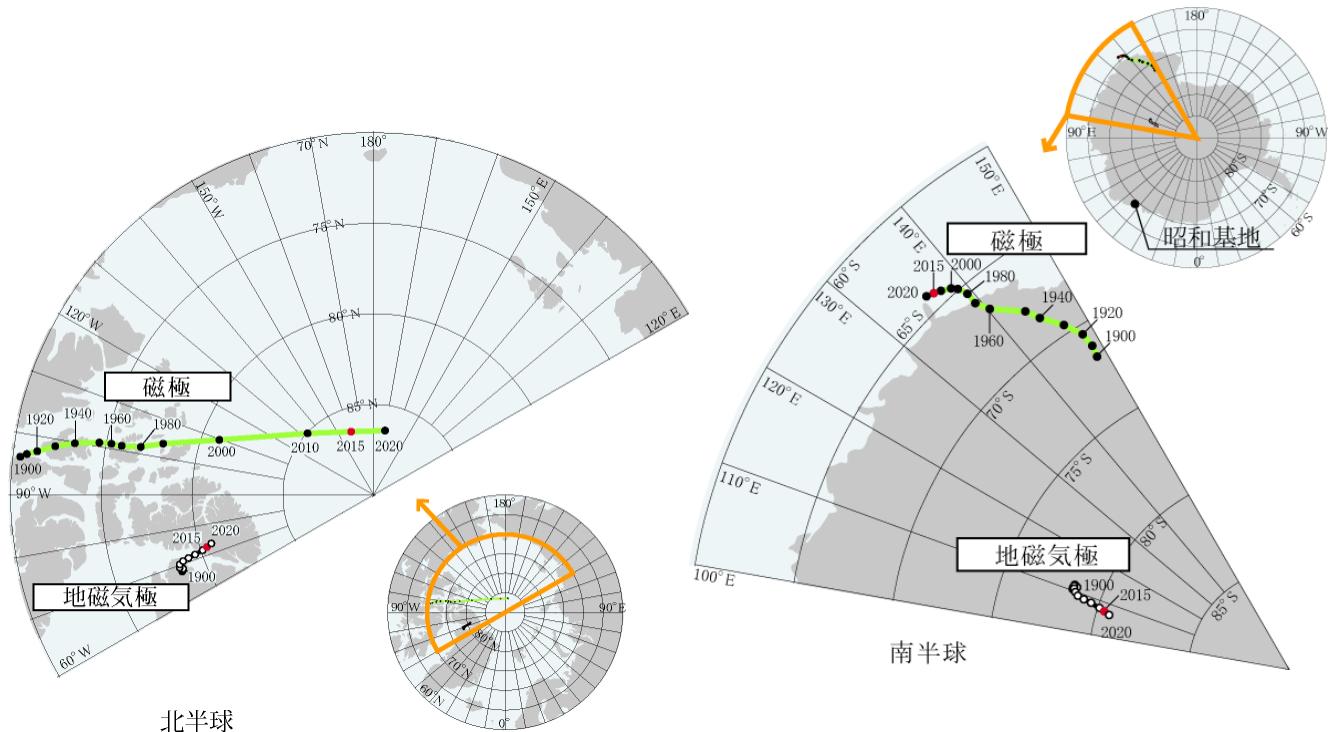
80.31° N, 72.6° W



注 :

- ・ 地球磁場は双極子磁場が卓越するが、非双極子磁場も存在し、複雑である。
- ・ 「地磁気極」 の他に「磁気極」（伏角が 90° もしくは -90° になる位置）が存在する。

地磁気極、磁極の移動



<http://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp/poles/polesexp-j.html>

地磁気の空間スペクトル (Lowes spectrum)

磁気ポテンシャルを次数を意識して書くと

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$$

$$V_n = a \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta)$$

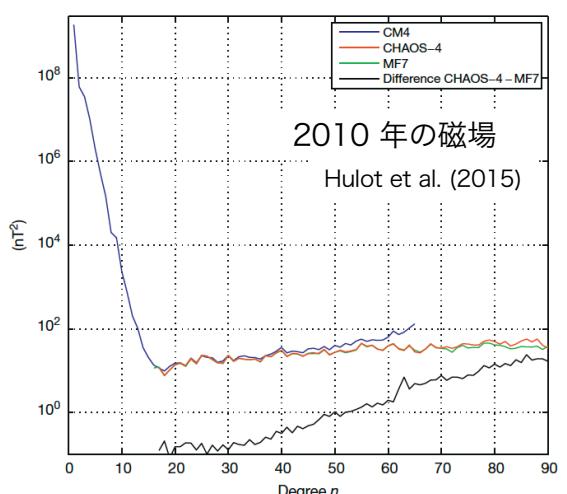
$$\mathbf{B}_n = -\nabla V_n$$

磁気エネルギーの場合と同様の計算を行うと、 B_n^2 の $r = a$ の球面上の平均は

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int_{S,r=a} \mathbf{B}_n^2 dS = (n+1) \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2]$$

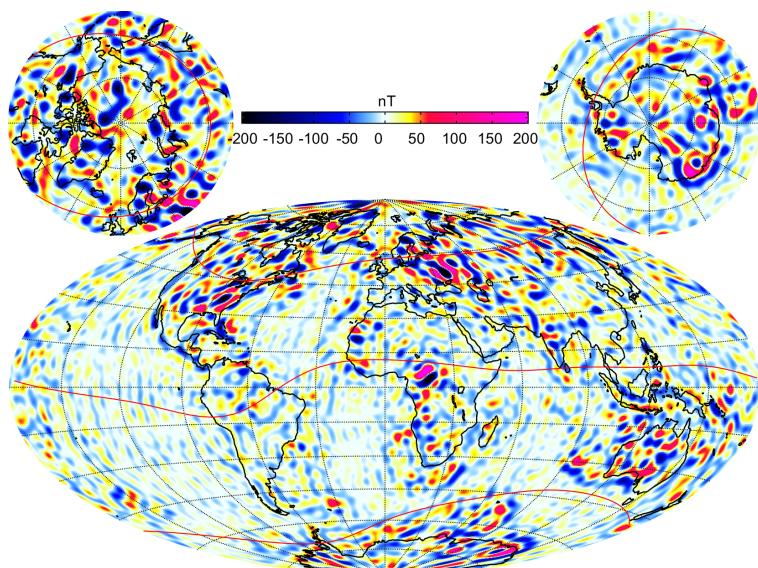
上記を地磁気の空間スペクトルとして用いる

$$R_n = (n+1) \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2] \quad \text{Lowes spectrum}$$



地殻起源の磁場

地表における地殻起源の磁場の r 成分： 球面調和展開した磁場の $n=16-85$ より算出



$$n = 16 \rightarrow \text{wave length} \sim 40000/16 = 2500 \text{ km}$$

$$n = 85 \rightarrow \text{wave length} \sim 40000/85 \approx 470 \text{ km}$$

地殻起源の磁場の r 成分 $\sim O(100) \text{ nT}$

Olsen et al. (2014)

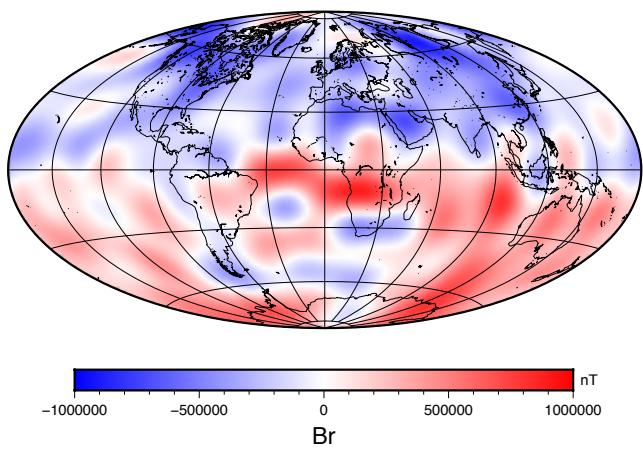
1.2.2 核-マントル境界 (CMB) における地磁気の分布

下方接続と核-マントル境界 (CMB) における磁場分布

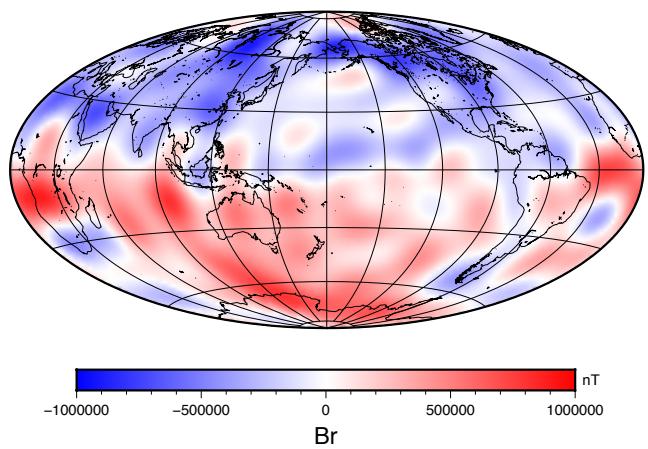
$$B_r(c, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\frac{a}{c}\right)^{n+2} (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta)$$

$r = c$: 外核の半径

2015.0年のCMBでの B_r の分布

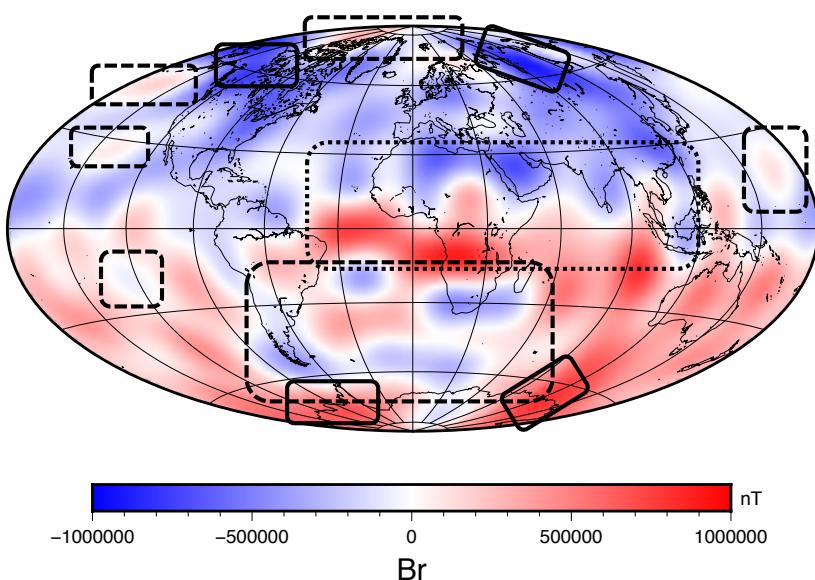


(経度 0°が中央)



(経度 180°が中央)

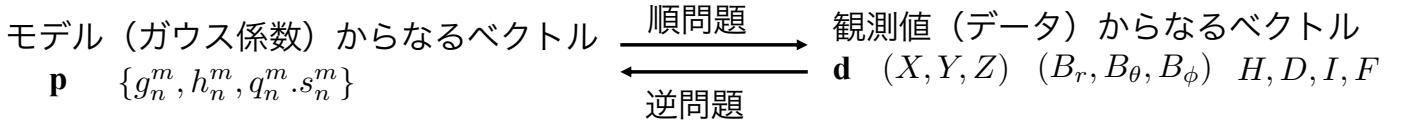
核-マントル境界 (CMB) における磁場の特徴



- **高緯度磁束** (high-latitude flux bundles)
高緯度の磁場が強い領域。南北半球に2つずつ。これにより、核外部の磁場が軸双極子的になる。
(位置は時間であまり変化しない。)
- **逆向き磁束域** (reversed flux patches)
双極子磁場で想定される磁場とは逆の極性の領域。大西洋南部に大きい領域がある。(近年大きくなりつつある)
- **低緯度の波列** (low latitude wave-trains)
(大西洋南部でより激しい時間変化)

参考資料

[参考資料] 1.1.4 ガウス係数の求め方 (1/4)



簡単のためここでは内部磁場のみの例で考える

$$B_r(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta)$$

打ち切り次数 : $n=N$
求める係数の個数 : $N(N+2)$

$$B_\theta(r, \theta, \phi) = - \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}$$

$$B_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} m (g_n^m \sin m\phi - h_n^m \cos m\phi) P_n^m(\cos \theta)$$

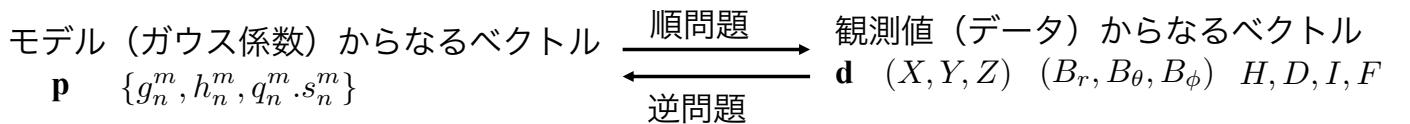
$$\left(\sum_{n=1}^N (2n+1) = N(N+2) \right)$$

行列・ベクトルを用いた表現

$$\tilde{\mathbf{B}}(r_j, \theta_j, \phi_j) = \mathbf{a}_j \mathbf{p} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} g_1^0 \\ g_1^1 \\ h_1^1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}}(r_j, \theta_j, \phi_j) = \begin{bmatrix} B_{r,j} \\ B_{\theta,j} \\ B_{\phi,j} \end{bmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{r,j} \\ \mathbf{a}_{\theta,j} \\ \mathbf{a}_{\phi,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a/r_j)^3 P_1^0(\cos \theta_j) & 2(a/r_j)^3 \cos \phi_j P_1^1(\cos \theta_j) & 2(a/r_j)^3 \sin \phi_j P_1^1(\cos \theta_j) & \cdot & \cdot \\ -(a/r_j)^3 dP_1^0/d\theta|_{\theta_j} & -(a/r_j)^3 \cos \phi_j dP_1^1/d\theta|_{\theta_j} & -(a/r_j)^3 \sin \phi_j dP_1^1/d\theta|_{\theta_j} & \cdot & \cdot \\ 0 & -(a/r_j)^3 \sin \phi_j P_1^1(\cos \theta_j)/\sin \theta_j & (a/r_j)^3 \cos \phi_j P_1^1(\cos \theta_j)/\sin \theta_j & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

(2/4)



多くの観測点（ここでは M 地点）についてデータと計算値を比較

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1^0 \\ g_1^1 \\ h_1^1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_j \\ \mathbf{B}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{d}$$

$\mathbf{A} : [3M \times N(N+2)]$
 $\mathbf{p} : [N(N+2)]$
 $\mathbf{d} : [3M]$

$3M > N(N+2)$ (データ数 > 係数の個数) のとき、最小自乗法でモデルベクトル \mathbf{p} を求める

$$J^2 = \sum_i [d_i - A_{ik} p_k]^2$$

$$\mathbf{A}^T (\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial J^2}{\partial p_l} = - \sum_i 2 [d_i - A_{ik} p_k] A_{il} = 0$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{A}^T \mathbf{d}$$

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{d}$$

D, I, F を用いる場合 (モデルが線形ではない時) :

$$J^2 = \sum_i w_i \left[d_i - \tilde{f}_i(\mathbf{p}, \mathbf{r}_j) \right]^2$$

モデルの初期推定値 \mathbf{p}_0 から、繰り返し計算する

$$\tilde{f}_i^0 = \tilde{f}_i(\mathbf{p}_0)$$

$$J^2 = \sum_i w_i \left[d_i - \tilde{f}_i^0 - \sum_k^N \left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial p_k} \right)_0 \delta p_k - \dots \right]^2$$

$$\frac{\partial J^2}{\partial p_l} = \sum_i 2w_i \left[d_i - \tilde{f}_i^0 - \sum_k^N \left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial p_k} \right)_0 \delta p_k - \dots \right] \left[- \left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial p_l} \right)_0 - \dots \right] = 0$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_K \end{bmatrix} \quad \delta \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 - \tilde{f}_1^0 \\ d_2 - \tilde{f}_2^0 \\ \vdots \\ d_K - \tilde{f}_K^0 \end{bmatrix} \quad A_{ij} = \left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial p_j} \right)_0$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} \delta \mathbf{d} - \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \delta \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}) \delta \mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}) \delta \mathbf{d}$$

$$\delta \mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{W}) \delta \mathbf{d}$$

$$\mathbf{p}_{I+1} = \mathbf{p}_I + \delta \mathbf{p}$$

ガウス係数を磁場成分から求めるためには、以下の微分係数が必要

$$A_{ij} = \left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial p_j} \right)$$

$(B_r, B_\theta, B_\phi), (X, Y, Z)$ の場合は、磁気ポテンシャルを用いた磁場成分の表現から求められる

$$\frac{\partial B_r}{\partial g_n^m} = \left(\frac{a}{r} \right)^{n+2} (n+1) \cos m\phi P_n^m(\cos \theta)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial h_n^m} = \left(\frac{a}{r} \right)^{n+2} (n+1) \sin m\phi P_n^m(\cos \theta)$$

$$\begin{bmatrix} \partial X / \partial g_n^m \\ \partial Y / \partial g_n^m \\ \partial Z / \partial g_n^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & -\cos \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial B_\theta / \partial g_n^m \\ \partial B_\phi / \partial g_n^m \\ \partial B_r / \partial g_n^m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \partial X / \partial h_n^m \\ \partial Y / \partial h_n^m \\ \partial Z / \partial h_n^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & -\cos \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial B_\theta / \partial h_n^m \\ \partial B_\phi / \partial h_n^m \\ \partial B_r / \partial h_n^m \end{bmatrix}$$

F, D, I, H を用いる場合は、以下のようにして(dX/dg 等を介して) 微分係数を求める

$$H dD = \frac{X}{H} dY - \frac{Y}{H} dX$$

$$H \frac{\partial D}{\partial g_n^m} = \frac{X}{H} \frac{\partial Y}{\partial g_n^m} - \frac{Y}{H} \frac{\partial X}{\partial g_n^m}$$

$$H \frac{\partial D}{\partial h_n^m} = \frac{X}{H} \frac{\partial Y}{\partial h_n^m} - \frac{Y}{H} \frac{\partial X}{\partial h_n^m}$$

$$dH = \frac{X}{H} dX + \frac{Y}{H} dY$$

$$F dI = -\frac{Z}{F} dH + \frac{H}{F} dZ = -\frac{XZ}{HF} dX - \frac{YZ}{HF} dY + \frac{H}{F} dZ$$

$$dF = \frac{X}{F} dX + \frac{Y}{F} dY + \frac{Z}{F} dZ$$