

2 地球の変動をどのように記述するか – 弾性論入門 (2001 EZ-version)

日本列島に張り巡らされた GPS ネットワークのデータから、日本列島の変形の様子が目の当たりにわかるようになってきた。プレートテクトニクスでは、地震や火山を作るような大きな変動はプレートの境界でおき、個々のプレートは剛体的に振る舞い変形をしないとす。もちろんこれは第1次的な近似である。実際は、日本列島のようなプレート境界の近くでは、プレート境界（日本列島の太平洋側）で「巨大地震」が発生すると共に、プレート内（日本列島内）で大きな変形が生じる。この様子が GPS により明らかになりつつある。

GPS からわかるのは地表の各点の変位（相対的）のベクトルである。このような変形（変位ベクトルの場合）が起こるといことはどういうことなのか？その時日本列島の内ではどのような力が働いているのか？これを知るためには、「歪」と「応力」といった概念を理解する必要がある。本講義では数式はあまり使わない方針であるが、今回は我慢していただきたい。1年生諸君は、今学期習う「線型代数」の現実的な例として歪・応力を考えると受け入れやすいだろう（これに関しては、行列バージョンのノート参照。ここではより直感的に応力・歪みを導入する）。

応力・歪みの部分はとりあず最低限の完成。
(June 11, 2001)

2.1 応力と歪 (stress and strain)

弾性体力学 物体が変形・移動するときに、「隣の点は常に隣にある」という条件を満たすとき「連続体」と呼ばれる。その運動を記述する学問体系を連続体力学と呼ぶ。具体的には流体力学・弾性体力学がそれにあたる。地球は長い時間（地質スケール、～100 万年）をかけてみたときは流体として振る舞い（例えばマントル対流）、我々の生活に関係あるような時間スケールでみたときは弾性体（固体）として振る舞う。ここでは弾性体としての地球の力学を考える上で基本となる弾性体力学の基礎を学ぶ。

弾性体とは、「押したり、ひねったりすると反発力が物体の中に蓄えられる（生じる）物」のことである。例として、バネ、ゴム、こんにゃく、かんでんなどを思い浮かべるとイメージがわきやすいかも知れない。この弾性体の中に生じる反発力は「応力」と呼ばれる。また応力を引き起こす、「押ししたり、ひねったり」することによる変形を「歪み」とよぶ。弾性体力学を理解するためには、応力と歪み（とそれらの関係）を知る必要がある。

2.1.1 応力

今我々は地表で、自分より上にある大気の重さを力（圧力, pressure）として感じている。その大きさは、1 気圧 (bar) であり、MKS 単位系で $Pa (kg\ m^{-1}\ s^{-2})$ で表され ($1bar = 10^5 Pa$)、単位面積あたりに感じる力として評価される。連続体内部に働く力も圧力と同じように、面に働く力として評価され「応力¹」と

¹ 日常語における stress と応力: 英語では、日常会話で "stress" といえはいわゆる日本語の「ストレス」のことである。日本ではなぜ「応力」といって「ストレス」を意味しないようになったのだろう。これは物理学者の怠慢か？ところで「プレッシャー」も日本語で日常的に使われる言葉である。「ストレス」と「プレッシャー」の言葉の使い分けは、本来（？どっちが先かは不明）

呼ばれる。

応力は、原子間力などにより、物質内の隣同士に働く接触力 (contact force) であり、上に述べたように単位面積あたりの力で評価される。任意の面について、面に垂直な成分を法線応力 (normal stress)、平行な成分を剪断応力 (shear stress) と呼ぶ。

体積力 (body force) と表面力 (surface force) とりあえず省略

垂直面に対する法線応力 – 岩石圧 (litho-static) 平衡 地震を起こしたりプレートを動かしたりするような「テクトニック」な力は、地表面に平行な面に対する応力でなく、垂直な面に働く法線応力である場合が多い。このような応力も図 3 のように σ_{xx}, σ_{zz} として定義される。テクトニックな応力が働いているときは、三つの法線応力は等しくなく、

図 3

$$\sigma_{xx} \neq \sigma_{zz} \neq \sigma_{yy} \quad (1)$$

である。

一方、テクトニックな応力が働いていない場合 (例えば、横方向に構造の変化が全くない)、三つの法線応力は岩石圧と等しくなり、

$$p_L \equiv \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{yy} = \rho g y \quad (2)$$

である。このような状態にあるとき、地殻は岩石圧平衡 (lithostatic stress state) な状態にあるという。流体の中では、流れがないときはいつもこのような平衡状態 (静水圧平衡, hydrostatic stress state) にある。

マントルに浮かぶ大陸地殻の例：とりあえず省略

剪断応力 面に対して働く力のうちで、法線応力以外の成分 (法線応力は面に垂直なので、残りの成分は必然的に面に対して平行になる) を剪断応力 (shear stress) と呼び、図 6 のように各軸方向の成分を σ_{xy}, σ_{xz} のように書き現す。ここで添え字の一番目の x は、x 軸に垂直な面に働く応力を意味し、二番目の添え字は応力の成分を示す。

図 6

剪断応力は弾性体にずれの変形を生じさせるので、剪断応力の大小が地震などの破壊現象が起きるか否かを決定する。

応力の（きちんとした）定義 これまで応力を、(微小)面に働く力として、直感的に導入してきたが、正負の符号なども含めて、ここできちんとした定義をしておこう。応力は、物体内の全ての点で定義される物理量である。この際、微小面上で定義された法線応力・剪断応力を、面を無限に小さくしたときのものと考えればよい。

次に応力の正負についての約束を決めておこう。

1. まず、物体内のある一部を取り囲むような閉曲面を考える (図 7)。この「面の外側が内側に及ぼす力 (単位面積あたり)」を応力と定義する。
2. 次に成分の定義をする。上の閉局面のうち、面に対して外側を向く法線ベクトルが、それぞれの座標軸と平行 (で同じ向き) になる面に働く応力の成分を、 $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}, \dots$ などで定義する。この際、添え字の一番目は面に垂直な軸、二番目は力の方向を示す (図 8)。

図 7

図 8

このように定義すると、定義された面の真裏の面 (外向き法線が軸と反対方向に向く) に働く応力の各成分は、作用反作用の法則から、表のものと逆向きの応力成分となることがわかる。このことを理解するには、ある面に対してそれを囲む薄っぺらい (厚さが δ としよう) 閉局面を考えるとわかりやすい (図 9)。 $\delta \rightarrow 0$ の極限を考えると、閉局面の外向き法線は面に対して反対向きのベクトルとなる。面のそれぞれの側が反対側に及ぼす力は、作用・反作用の法則で逆向きなので、閉局面の外側が内側に及ぼす力も、面を反対側で逆向きになる (言葉ではわかりにくいかも知れないが、図 9 を見れば明らか?)。

図 9

さて応力が、これだけの定義で必要十分であるためには、任意の面に対しての法線・剪断応力が上に定義した量 ($\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}, \dots$) で表せることが示せればよい。それは後で示すとして、このようにして定義した応力の意味について考えてみよう。

上では、閉曲面の外側が内側に及ぼす力で応力を定義し、外向きの力を正にとっている。これは本節以前までの説明に使ってきた応力 σ (地球の内部の直感に近い) とは逆のセンスで、符号が全て逆になる。これ以後応力は本節で定義した物を使い、 τ で表すことにするが、基本的には符号を逆にした物であることを認識していればどちらを使っても良い (以後 σ が出てきたら、 $-\tau$ のものとする)。従って、地下での岩石圧平衡に対応する圧力は、以下のように負の値を取ることになる (図 10)。

図 10

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -p_L \quad (3)$$

また一般に正の法線応力は、引っ張り (tension) の応力に対応し、負の法線応力は圧縮 (compression) の応力に対応する。

剪断応力の対称性 以上の定義による応力をさらに理解するために、2次元の問題を考えてみよう。ここで「2次元の問題」というのは、応力などの変化がある軸方向 (図 11 では z 軸) に全くなく、さらにその軸に垂直な面に働く剪断応力がゼロの場合を指す (すなわち、 $\tau_{zz}(z) = \text{一定}, \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$)。

図 11

各辺が微小の長さ $\delta x, \delta y$ で与えられる閉局面を考え (z 方向には δz の長さを考える)、この微小閉局面で囲まれる領域全体に働く力を評価してみよう (図 12)。向かい合う面に働く力を考える。まず法線応力による成分は逆向きに作

図 12

用するので、合力はゼロである（従って領域は力を受けずに安定である）。一方剪断応力は、力の向きは反対で合力はゼロになるが、力の向きと作用する軸が直交するので、領域を回転させるような回転モーメントが働く。回転モーメントは力の大きさと軸の長さの積で表されるので、例えば x 軸に垂直な面に働く応力による回転モーメントは

$$\tau_{xy}(\text{応力}) \times \delta y \delta z (\text{面積}) \times \delta x (\text{腕の長さ}) = \tau_{xy} \delta x \delta y \delta z \quad (4)$$

である。図 12 の場合、この回転モーメントは反時計回りに作用する。同様に y 軸に垂直な面に働く応力による回転モーメントは、

$$\tau_{yx}(\text{応力}) \times \delta x \delta z (\text{面積}) \times \delta y (\text{腕の長さ}) = \tau_{yx} \delta x \delta y \delta z \quad (5)$$

であり、時計回りに作用する。領域が回転せず安定であるためには、この二つのモーメントが、打ち消しあうことが必要で、結局

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (6)$$

であることが、回転モーメントのつり合いから要請される。

任意の向きの面に対する応力 剪断応力の対称性から 2 次元問題の場合、 $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$ の三つが応力の成分として定義されていることになる。次に、この三つの成分が与えられれば、任意の面に対する応力を計算できることを示そう。これが可能なことが示せれば、応力は $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$ の三つで、完全に規定されることになる。

もとの座標軸から θ 回転した新たな座標軸 $x' - y'$ を考え（図 13）、任意の面として x' 軸に垂直な面を考えよう（図 14）。この面に作用する応力は、新しい座標系で $\tau_{x'x'}, \tau_{x'y'}$ である。この面と、元の座標系の x 軸、 y 軸で囲まれる領域の力のつり合いを考えることで、面に働く応力を評価できる。

図 13,14

まず x 方向の力の釣り合いをみてみよう。力の釣り合いを考えるためには、それぞれの面に作用する応力に面の面積をかける必要がある。 z 軸方向の厚さは共通なので省略し応力に辺の長さをかけて評価すると、

$$(\tau_{x'x'} \cos \theta - \tau_{x'y'} \sin \theta) AB = \tau_{yx} AO + \tau_{xx} BO$$

となる。ここで図から

$$\frac{BO}{AB} = \cos \theta, \quad \frac{AO}{AB} = \sin \theta$$

なので、

$$\tau_{x'x'} \cos \theta - \tau_{x'y'} \sin \theta = \tau_{yx} \sin \theta + \tau_{xx} \cos \theta \quad (7)$$

となる。

同様に y 方向の力の釣り合いから、

$$\tau_{x'x'} \sin \theta + \tau_{x'y'} \cos \theta = \tau_{yy} \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta \quad (8)$$

が得られる。両式を解くことで、

$$\tau_{x'x'} = \tau_{xx} \cos^2 \theta + \tau_{yy} \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (9)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{1}{2}(\tau_{yy} - \tau_{xx}) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (10)$$

が得られ、任意の面に働く法線応力・剪断応力が求められた。同様のことを y' 軸に垂直な面について行うことで、新しい座標系での残りの一つの成分も以下のように求まる。

$$\tau_{y'y'} = \tau_{xx} \sin^2 \theta + \tau_{yy} \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (11)$$

$\tau_{xx} + \tau_{yy}$ は座標軸の取り方によらないことがわかる

主応力 次に面を適当に選ぶことで、剪断応力がゼロになる面が必ず見つかることを示そう。

$$\tau_{x'y'} = 0$$

から

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\tau_{xx} - \tau_{yy}} \quad (12)$$

がその条件である ($\tau_{xx} = \tau_{yy}$ の場合は $\cos 2\theta = 0$)。この解を満たす θ は必ず存在するので、剪断応力がゼロとなる面が必ず存在することが示される。また、 $\tan 2\theta$ は $\pi = 180^\circ$ の周期性があるので、 $\theta = \theta_1$ が条件を満たすとき、 $\theta = \theta_1 + 90^\circ$ も条件を満たし、直行する二つの面について剪断応力がゼロとなることがわかる。

このような剪断応力がゼロとなる面に働く法線応力を、主応力 (principal stress) と呼び、主応力の働く方向を、主応力方向という。剪断応力がゼロとなる面が二つあることから、主応力方向は二つあり、それぞれ直交する。

多少の計算から、二つの主応力 τ_1, τ_2 の値は、

$$\tau_{1,2} = \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} \pm \left\{ \frac{(\tau_{xx} - \tau_{yy})^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right\}^{1/2} \quad (13)$$

で与えられることがわかる。

適当な方向を選べば剪断応力がゼロとなる主応力を必ず見つけられることは、応力の大変重要な性質である。応力の各成分 $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$ の代わりに、主応力の方向 θ_1 と主応力の値 τ_1, τ_2 を決めることで、応力が記述できることになる。

すなわち

$$\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy} \iff \tau_1, \tau_2, \theta_1$$

は等価ということである。

主応力が与えられたときの任意の面に働く応力 主応力が与えられたとき、任意の面に働く応力を計算しよう。

式 (9) - (11) で $\tau_{xx} = \tau_1, \tau_{yy} = \tau_2, \tau_{xy} = 0$ と置くことで評価でき、結果は以下ようになる (添え字の ' は不要なのではずしてある)：

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \cos 2\theta \\ \tau_{xy} &= -\frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \sin 2\theta \\ \tau_{yy} &= \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} - \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (14)$$

主応力軸からの関数として、任意の面に働く法線応力・剪断応力を図示すると、図 15 のようになる。地球の内部では、岩石圧による圧縮性の応力が強いので、ここでは主応力の値を負にとっている。図からわかるように、剪断応力が

図 15

最も大きくなる（絶対値が最大になる）のは、主応力の方向と 45° をなす面についてである。このことから、岩石を実験室である軸に沿って圧縮すると、剪断応力が最大となる圧縮方向と 45° をなす面に沿って破壊が起きることが予想される（図 16）。

図 16

行列（テンソル）としての応力 応力は

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^t = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{pmatrix} \quad (15)$$

のような対称行列として書き表すことができる。応力を行列で定義して、ここまでの議論を構築することも可能である（これについては別のノートを参照のこと）。

3次元の場合 以上の議論は3次元の場合もそのまま適用できる。直交する3つの応力主軸の方向と主応力の大きさを決めることで3次元の応力場を記述したことになる。行列表示では

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^t = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (16)$$

となる。

地球の中の応力の値 地球内部の応力の値は、地震などの大きな変動が起きる地殻とマントルの最上部をのぞけば、大体岩石圧が卓越している。その値は、典型的な地球モデルで以下の表のような値となる。

深さ (km)	領域	圧力 (GPa)
0-24	地殻	0-0.6
24-410	上部マントル	0.6-13.4
410-660	マントル遷移層	13.4-23.8
660-2891	下部マントル	23.8-135.8
2891-5150	外核	135.8-328.9
5150-6371	内核	328.9-363.9

地殻や最上部マントルでの剪断応力の大きさは必ずしもよくわかっておらず、研究の対称となっている。地震による剪断応力の降下が数から数 10 (MPa 数 10 から数 100 bar) と見積られるから、それ以上であることは確実である。おそらく 10-100MPa (100-1000 bar) 程度であろう。

2.1.2 歪

変形と歪 次に連続体内部での変形について考えてみよう。GPS などの地殻変動観測からわかるのは、観測点の時間を隔てた相対的な変位である。これは、もともと $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ にあった点が今 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ に移動したとすると、

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \quad (17)$$

であらわされる．この変位が空間分布として与えられたとき変位場 $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ が得られることになる．変位が場所によらない場合 ($\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \text{一定}$)，連続体は全体として（剛体的に）平行移動したことになる，内部での変形は起こらないことになる．従って応力を発生するような連続体内部の変形を記述するには，変位の空間変化（微分）を知る必要があり，これを「歪」（strain）と呼ぶ．応力と同様に歪みにも，法線歪みと剪断歪みが存在する．

歪の単位 簡単な例として，長さ $L = 1\text{m}$ の棒を一様に押したら 99cm になったとしよう．片方の端を固定したとすると，もうひとつの端は 1cm 変位したことになり，棒の各点の変位は 0 から 1cm までの値をとる．この変位（場）の棒の長さ方向の変化率（歪）は，全体の縮んだ長さを $\Delta L = -0.01\text{cm}$ とすると，

$$\Delta L/L = -0.01$$

で一定である．このように歪は長さの比であり，次元を持たない物理量である．

法線歪み 図 17 にあるように微小な直方体が，軸どうしの直角を保持して変形（伸び縮み）する場合を考えよう．変形後の各辺の長さを

図 17

$$\begin{aligned}\delta x' &= \delta x + \epsilon_{xx}\delta x \\ \delta y' &= \delta y + \epsilon_{yy}\delta y \\ \delta z' &= \delta z + \epsilon_{zz}\delta z\end{aligned}\tag{18}$$

とすると，それぞれの軸方向の伸縮率

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\delta x' - \delta x}{\delta x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\delta y' - \delta y}{\delta y} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\delta z' - \delta z}{\delta z}\end{aligned}\tag{19}$$

を法線歪み（normal strain）とよぶ．法線歪みは長さの変化率である．

つぎにこの直方体の体積変化を求めてみよう．変形前・変形後の体積をそれぞれ δV , $\delta V'$ とすると，体積変化は

$$\begin{aligned}\delta V' - \delta V &= \delta x'\delta y'\delta z' - \delta x\delta y\delta z \\ &= \delta x\delta y\delta z + (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})\delta x\delta y\delta z + O(\epsilon^2) - \delta x\delta y\delta z \\ &\simeq (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})\delta x\delta y\delta z \\ &= \Delta \delta V\end{aligned}$$

で表される．ここで， $O(\epsilon^2)$ は ϵ の二乗以上の項をさし，変形は微少で歪みは小さいとして ($\epsilon \ll 1$) 無視している．このような仮定が成り立つ場合を「無限小歪みの弾性論」と呼び，本書では以後その仮定をする．

体積変化率 Δ は英語で dilatation と呼ばれ，

$$\Delta \triangleq \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\delta V' - \delta V}{\delta V}\tag{20}$$

で定義される．

変位と歪み（２次元の場合） 応力の節に出てきたような２次元問題を考え、変形が図 18 のように x-y 平面内だけに起きる場合を考えよう。変位（場）が、 $u(x, y)$ で与えられる場合、それぞれの辺（PQ, PS）の伸びは、

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= x' - x \\ u_y(x, y) &= y' - y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(x + \delta x, y) &= (x' + \delta x') - (x + \delta x) \simeq u_x(x, y) + \frac{\partial u_x}{\partial x} \delta x \\ u_y(x, y + \delta y) &= (y' + \delta y') - (y + \delta y) \simeq u_y(x, y) + \frac{\partial u_y}{\partial y} \delta y, \end{aligned}$$

などより、

$$\begin{aligned} \delta x' - \delta x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \delta x \\ \delta y' - \delta y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \delta y \end{aligned}$$

で与えられる。従って、法線歪みの定義式 (19) から歪みと変位の関係が以下のようによ与えられる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \left(\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

また dilatation は

$$\Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (22)$$

と、変位の divergence となる。

剪断歪み 次に各軸間で、直角を保持しない場合の変形を考えよう（変形量は微少）。この場合図 19 のように長方形はひしゃげた形となり、いかにも“歪んだ”様子となる。ここで剪断歪みは、「直角であった軸のなす角の減った分を 2 で割った角度（ラジアン）」として直感的に定義される。

剪断歪みによってそれぞれの辺が変形前後でなす角を ϕ_1, ϕ_2 とする（図 19）と、

$$\begin{aligned} \tan \phi_1 &= \frac{u_y(x + \delta x, y)}{\delta x} \sim \phi_1 \\ \tan \phi_2 &= \frac{u_x(x, y + \delta y)}{\delta y} \sim \phi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y(x + \delta x, y) &\sim u_y(x, y) + \frac{\partial u_y}{\partial x} \delta x \\ u_x(x, y + \delta y) &\sim u_x(x, y) + \frac{\partial u_x}{\partial y} \delta y \end{aligned}$$

で、P 点は不動として $u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0$ をいれると、

$$\phi_1 \simeq \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \phi_2 \simeq \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (23)$$

図 18

変形前の四隅の点の座標を、 $P(x, y), Q(x + \delta x, y), R(x + \delta x, y + \delta y), S(x, y + \delta y)$ とする

図 19

角度が小さい場合 ($\phi \sim 0$), $\tan \phi \sim \phi$

が得られる。従って剪断歪みは以下のように変位場の微分で与えられる。

$$\epsilon_{xy} \triangleq \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (24)$$

剪断歪みの例として、横ずれ断層に伴う歪みを評価しよう（図 20）。ここでは $\phi_1 = 0$ なので、剪断歪みは

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (25)$$

となる。

歪テンソル，主歪み（軸），... 剪断歪みは、定義から対称である（ $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$ ）ので、歪みも応力と同じように対称行列としても表現できる。

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

従って、座標軸の回転などに対しても応力と同様の性質を示す。

応力と同じように歪みも、主歪みの大きさ（符号も含めて）と主歪みの方向によって規定できる。また、主歪みと主応力の方向は一致する。

歪みの値 図 21 は 1906 年にサンフランシスコを襲った大地震のときに断層面（サンアンドレアス断層）周辺で測られた変位の分布である。2m 程の変位が 10km 程の厚さの領域で起こったことがわかる。この地震によって開放された歪みは

$$\frac{1}{2} \frac{2m}{10km} = \frac{1}{2} \frac{2}{10 \times 10^3} = 10^{-4}$$

程度である。一般に 10^{-4} 程度の剪断歪みが地震の時に開放される。従って地殻の中の歪みの最大値はこの程度と考えられる（「地震限界歪み」）。GPS などの計測により、日本列島内部の剪断歪みの蓄積率は最大 $10^{-7}/\text{year}$ であることがわかっている。この蓄積率で日本列島の変形が続くとすると、1000 年程度で上に述べた地震限界歪みが蓄積されることになる。日本の内陸で起きるいわゆる「直下型地震」を引き起こす活断層は千年程度の活動周期を持つといわれるが、その根拠はこのようにして見積もられている。

次に「巨大地震」を引き起こす海溝にそって起こる「プレート間地震」について考えてみよう（図 22）。太平洋プレートは日本の太平洋岸では年間 10cm の速さで沈み込んでいる。歪みが蓄積される領域をプレートの厚さ（100km）の半分程度に取ると、

$$\frac{1}{2} \frac{10\text{cm}/\text{year}}{50\text{km}} = \frac{1}{2} \frac{10^{-1}\text{m}/\text{year}}{50 \times 10^3} = 10^{-6}/\text{year}$$

の剪断歪みが年間に蓄積されることになる。この歪みが全て蓄積され最終的に地震で解放されるとすると、地震限界歪みに達するまで 100 年程かかる。日本の太平洋岸の巨大地震の再来周期が 100 年程度というのはこういうことである。

同様の議論から二つの角度の差は

$$\omega_z \triangleq \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

で与えられ、回転成分と呼ばれる。回転成分は局所的な剛体的回転に対応し、長さの変化をもたらさないで、応力を生じない。

図 21

地殻内の歪みは 1 より十分に小さいので、無限小歪みの理論は妥当

図 22

2.1.3 応力と歪の関係（一般化されたフックの法則）

地殻に力（応力）が働いて、その結果どのような変形が起こるのか、また逆に変形が起きたときにどのような応力が生じているのか、を知るためには、応力と歪みの関係（構成関係）を知らなければならない。応力と歪みの間には、物質の性質によって決まる関係がある。これはバネの伸び（ Δx としよう）とそれによる引張り力（ $f = k\Delta x$ ）の関係、いわゆるフックの法則の一般化されたものである。

構成関係 座標軸を主応力軸にとった場合、応力と歪の間には

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (27)$$

の構成関係が成り立つことが知られている。 λ, μ の二つの定数は、弾性体の性質を決める弾性定数である（ラメの定数とも呼ばれる）。この二つのパラメータによって弾性体の性質は、完全に記述されることになる。この弾性定数の性質を調べてみよう。

剛性率 μ 応力の 2 次元問題で、主応力 τ_1, τ_2 の値が、絶対値が同じで、正負が逆の場合を考えよう。問題の対称性からいって、歪みも同様になることが予想されるので、

$$\begin{cases} \tau_1 = \sigma \\ \tau_2 = -\sigma \end{cases} \iff \begin{cases} \epsilon_1 = \varepsilon \\ \epsilon_2 = -\varepsilon \end{cases} \quad (28)$$

となる。よって構成関係 (27) より

$$\sigma = (\lambda + 2\mu)\varepsilon + \lambda \cdot (-\varepsilon) = 2\mu\varepsilon$$

ここでまず (28) で与えられるような応力がどういう性質を持っているか調べてみよう。(14) で、 $\theta = 45^\circ$ を代入すると、

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = -\sigma$$

となる。従って、主応力軸に対して 45° の角をなす面上では、主応力・主歪みがゼロで、剪断応力・剪断歪みだけが存在することになる（図 23）。このような応力を純粋剪断（pure shear）応力・歪みとよぶが、純粋剪断の場合の構成関係が剛性率 μ によって

$$\tau_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \quad (29)$$

で与えられることになる。

剛性率は物質が剪断力に対してどれだけ “頑張れる” かを測る指標で、 μ が大きければ大きいほど、与えられた剪断応力に対して歪み量は小さく、物質は “頑張れる” ことになる。

図 23

体積弾性率 κ もうひとつの弾性定数 λ にはわかり易い物理的な意味はないが、岩石圧平衡 (3) によって起こる体積収縮から、体積弾性率 $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ の関係が得られる。

収縮による歪みを $-\varepsilon_L$ とすると、構成関係 (27) から、

$$-p_L = -\varepsilon_L (3\lambda + 2\mu)$$

体積弾性率は、圧力 P を与えたときの体積変化のしやすさを示す物性定数で、

$$P = \kappa \frac{\Delta V}{V} \quad (30)$$

で定義される。それぞれ代入すると、

$$\begin{aligned} -p_L &= \kappa \Delta = \kappa \times 3(-\varepsilon_L) \\ \kappa &= \frac{p_L}{3\varepsilon_L} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \end{aligned} \quad (31)$$

まぎらわしいが、 ΔV は体積変化分、 Δ は dilatation を表している

弾性定数の単位と値 構成関係と歪みが次元を持たない量であることから、弾性定数の単位は応力と同じで、 $10^{-5} \text{bar} = \text{Pa} = \text{Nm}^{-2} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ である。地殻を構成する物質の値は、剛性率が $\mu \approx 30 \text{GPa}$ 、体積弾性率が $\kappa \approx 60 \text{GPa}$ 程度である。

2.1.4 応力と断層

地震とは、断層上の急激なすべりによって、地殻・マントルの剪断歪みが解消される現象である。神戸地震（正確には兵庫県南部地震）のように地表に断層が現れる場合もあるが、多くの地震は地表に断層を現さない。「地震は断層である」というのは必ずしも自明なことではなく、このような認識が得られるまでにそれなりの時間がかかった。地震が断層である根拠についてはいずれ触れるが、ここでは地震は断層運動であるとして、応力・歪みと断層運動（地震）との関係を考えてみよう。

断層面に働く応力 応力が与えられていて、座標軸に主応力軸が取られている場合を考えよう。

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} \quad (32)$$

で与えられるとする。図 24 のように任意の面（法線ベクトル $\hat{n}$ 、接線ベクトル $\hat{s}$ ）を取るとき、この面に働く法線応力（ τ_n ）と剪断応力（ τ_s ）は (14) より、

図 24

$$\tau_n \triangleq \tau_{xx} = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) + \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) \cos 2\theta \quad (33)$$

$$\tau_s \triangleq \tau_{xy} = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1) \sin 2\theta \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \hat{n} &= (\cos \theta, \sin \theta) \\ \hat{s} &= (-\sin \theta, \cos \theta) \end{aligned}$$

となる。x 軸となす角 θ の関数としてそれぞれの応力を示すと図 15 のようになり、 $\theta = 45^\circ$ の時剪断応力が最大になることがわかる。従ってもし大気圧の中で岩石を押していったら、 $\theta = 45^\circ$ の面での剪断応力が岩石の破壊強度を超えたときに、その面（ $\theta = -45^\circ$ と二つありうる）で破壊が起きるはずである。

断層面での摩擦の影響 地球の内部では鉛直方向が主応力軸のひとつになることが多いが、かといって地震断層の地中での鉛直軸とのなす角が 45 度にはなっていない。これは地中では岩石圧成分 (τ の対角成分の平均) が大きく、結果として断層面に働く法線応力が大きいためである。法線応力は、断層が動く際に、摩擦力を引き起こし、滑りにくくする。従って破壊強度が増し、 θ も 45 度より大きくなる。

法線応力成分のある時の破壊強度は実験室で調べられており、

$$\sigma_c = \sigma_{s0} + \mu' \sigma_n \quad (35)$$

の形で表現でき、Byerlee の法則と呼ばれることがある (図 25)。 σ_{s0} は法線応力がない時の破壊強度で、摩擦係数 μ' (剛性率ではない!) は 0.3-0.6 程度の値をとる。剪断応力が閾値 σ_c を超えると破壊が起こるのである。地中深くなるにつれ静水圧はまし、破壊強度は増す。またある程度以上の深さ (80km 程度) では、このような摩擦破壊は起きないと考えられる (が、地震は 700km くらいの深さまで起こる)。

岩石圧は地中で圧縮なので、ここでは $\sigma = -\tau$ を使っている

図 25

既存の断層面 (弱面) がある場合 実際の地球では、地震は新しい断層を作ることとはまれで、既存の断層面・弱面にそって破壊が起きる。そのような面の方向がわかれば、Byerlee の法則から、以下の式で定義されるクーロン応力 (Coulomb stress) を評価することで予想される断層面での状態を把握できる。クーロン応力 (σ_f) は

$$\sigma_f = \sigma_s - \mu' \sigma_n \quad (36)$$

で与えられ、この値がある閾値を超えたとき、または近くの値になったとき、地震は何時起こってもおかしくない状況にあるとする考え方である。

また、地震が起きた場合に、地震によって変化した応力場がクーロン応力を増やすか・増やさないかを評価できる。この変化分 (ΔCFF と呼ばれる) を評価することで、長期的な地震危険度の評価、大地震の後の余震の起こり方の予測ができるのではないかと近年注目を浴びている。

問題

1. 日本海溝の一番深いところの水深はおよそ 10000m である。水の密度を 1.0g/cc とし、日本海溝の底での水圧を求めよ。
2. 同様に、地殻の岩石の密度を 2.7g/cc とし、深さ 10km での静水圧を求めよ。またそこで地震が起きるためには最低どの程度の剪断応力が必要か、Byerlee の法則が正しいとして評価せよ。
3. 地震を起こす剪断歪みはどの程度の応力値に対応しているのだろうか？

参考文献：なし