n 次元波動方程式の Green 関数

西田究

April 2023

波動関数のGreen関数

第 1 章

1.1 複素積分を使った 1 次元 Green 関数の導出

$$\frac{\partial^2 G^{1D}}{\partial z^2} + k_0^2 G^{1D} = \rho_0 \delta(z), \tag{1.1}$$

$k_0^2 \equiv \rho_0 \omega^2/\kappa$.

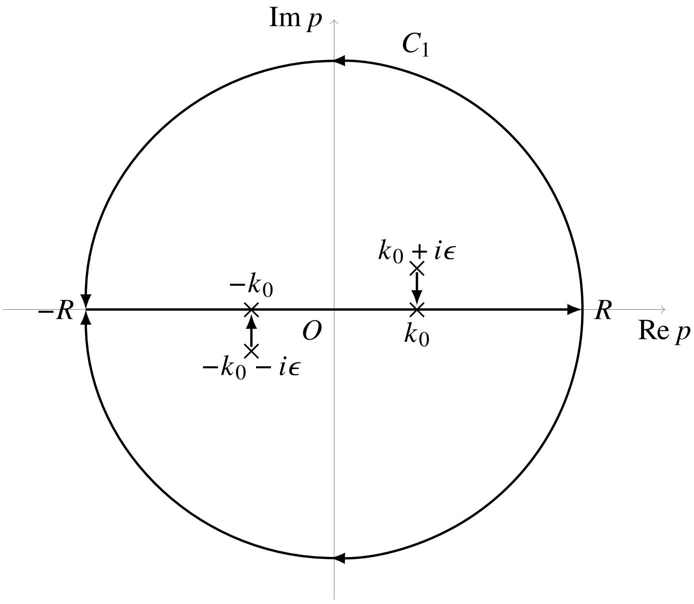
ここでは、空間方向にもフーリエ変換して、複素積分を使って G^{1D} を求めてみます。ここで G^{1D} のは空間 (z) に関するフーリエ変換を考え、そのフーリエ成分を $\tilde{G}$ とします。波動方程式のフーリエ変換を考えると、空間微分は波数 k を使って ik となるので、

$$\tilde{G} = \frac{\rho_0}{k_0^2 - k^2} \tag{1.2}$$

となります。この逆フーリエ変換を考えれば G^{1D} を求めることが出来ます。

$$G^{1D} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_0}{k_0^2 - k^2} e^{ikz} dk \tag{1.3}$$

を計算すれば良いことが分かります。この積分を留数を使って評価していきます。ただこのままでは、1 位の極 $(k = \pm k_0)$ が実軸上にあるために評価できません。そこで因果律を考えて $\pm k_0 \pm i\epsilon$ を考え ϵ を 0 とする極限を考えます。物理的には、波が原点から未来に向かって伝播し、かつ少しだけ振幅が減衰する状況を考えています。



留数を評価することで、G^{1D} を

$$G^{1D}(z,\omega) = \frac{\rho_0 i}{2k} e^{-ik_0|z|} \tag{1.4}$$

と求めることが出来ます。

1.2 3 次元 Green 関数と 1 次元 Green 関数の関係

3 次元の場合には

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G^{3D}}{\partial r}\right) + \frac{\omega^2}{\kappa}G^{3D} = \frac{\delta^+(r)}{4\pi r^2} \tag{1.5}$$

を考えます。$G^{3D} = \Psi/r$ と定義し整理すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{\kappa}\Psi &= \frac{\delta^+(r)}{4\pi r} \\ &= -\frac{1}{4\pi}\frac{d\delta^+(r)}{dr}\end{aligned} \tag{1.6}$$

この式をじっと眺めると、左辺は 1 次元波動方程式の形になっているので、Ψ は 1 次元

Green 関数とデルタ関数の微分との r に関する畳込みの形でかけることが分かります。

$$\begin{aligned}\Psi &= -\frac{1}{4\pi}G^{1D} * \frac{d\delta^+}{dr}\\ &= \quad -\frac{2}{4\pi}\frac{\partial G^{1D}}{\partial r}\\ &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial G^{1D}}{\partial r}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

ここで最後に 2 をかけたのは、G^{1D} と対応する Green 関数は変数に関して 0 に対して両側で定義されているためです。最終的に 3 次元 Green 関数と 1 次元 Green 関数は

$$G^{3D} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial G^{1D}}{\partial r}, \tag{1.8}$$

という関係で結び付けることが出来ます。これは以前別の方法で導出した Green 関数から確かめることが出来ます。

1.3 n 次元 Green 関数と $n+2$ 次元 Green 関数の関係

n 次元 Green 関数は、n 次元波動方程式を考えます。Green 関数は原点に関して対象であるとして、極座標で r 方向以外を積分すると

$$S_n\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial G^n}{\partial r}\right) + k_0^2 G^n = \frac{\delta^+(r)}{\rho_0 r^{n-1}}, \tag{1.9}$$

という式が得られます。ここで S_n は n 次元球の表面積は r を固定して他の座標に関して積分したために出てきます。また S_n は

$$S_n = \frac{2\pi^{n/2}r^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \tag{1.10}$$

という漸化式を満たします。また

$$S_{n+2} = \frac{2\pi}{n}S_n \tag{1.11}$$

とう関係を満たします。

3 次元波動方程式は 1 次元の解と単純な関係で結びつけることが出来ました。一般に $n+2$ 次元の解と n 次元の解を結びつけることが出来ないのでしょうか? 実は結びつけることが可能です。ここで天下り的ではありますが、Ψ^n を

$$\Psi^n \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial G^n}{\partial r} \tag{1.12}$$

と定義して、$n+2$ 次元ラプラシアンを作用させると、単純な偏微分の計算から

$$\frac{1}{r^{n+1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1}\frac{\partial \Psi^n}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial \Psi^n}{\partial r}\right)\right) \tag{1.13}$$

となります。つまり n 次元波動方程式 (eq. 1.3) の両辺 r の偏微分をとり、r で割ると、

$$\frac{1}{r^{n+1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1}\frac{\partial \Psi^n}{\partial r}\right)+k_0^2\Psi^n=\frac{1}{\rho_0 S_n}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\delta^+}{r^{n-1}}\right) \tag{1.14}$$

と書くことが出来ます。ここで右辺を評価してみましょう。定数を省略すると

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\delta^+}{r^{n-1}}\right)=-(n-1)\frac{\delta^+}{r^{n+1}}+\frac{d\delta^+}{dr}\frac{1}{r^n}=-n\frac{\delta^+}{r^{n+1}} \tag{1.15}$$

となります。ここでデルタ関数に関する微分の式を使いました。$S_{n+2}=2\pi S_n/n$ を使って整理し直すと

$$\frac{1}{r^{n+1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1}\frac{\partial \Psi^n}{\partial r}\right)+k_0^2\Psi^n=-2\pi\frac{\delta^+}{\rho_0 S_{n+2}r^{n+1}} \tag{1.16}$$

このことから、

$$G^{n+2}=-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial G^n}{\partial r} \tag{1.17}$$

は $n+2$ 次元波動方程式を満たしていることが分かります。つまり奇数次のグリーン関数をは波面にエネルギーが集中しており、ホイヘンスの原理を適応出来ることが分かります (2 次的な波源を一意に決めることが出来ます)。奇数次元の場合、Green 関数は

$$G^n=\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\frac{n-1}{2}}G^{1D} \tag{1.18}$$

と書くことが出来ます。偶数次元の場合には、形式的には分数回微分が出てきてしまい単純には G^{1D} と結びつけられないことが分かります。一般に

$$G^n=-\frac{i\rho_0}{4}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{k}{r}\right)^{\frac{n}{2}-1}H^{(2)}_{\frac{1}{2}n-1}(kr) \tag{1.19}$$

と書くことが出来ます。ここで $H^{(2)}_n$ は第 2 種 Hankel 関数です[*1]。

1.A デルタ関数に関するまとめ

1.A.1 デルタ関数の微分

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{d\delta(x)}{dx}dx=-f'(0) \tag{1.20}$$

[*1] Appendix B の式を使えば導出出来ます。

1.A.2 極座標表示

極座標 r を考えた場合のデルタ関数を考えます。$r \geq 0$ なので、片側でのみ定義すると

$$\int_0^{\epsilon} \delta^+(r) dr = 1. \tag{1.21}$$

と定義します。1/2 とする定義もあります。

3 次元の場合のデルタ関数の極座標表示は

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \frac{\delta^+(r)}{4\pi r^2}. \tag{1.22}$$

と書くことが出来ます[*2]。

この場合にデルタ関数の微分は

$$\frac{\delta^+(r)}{r} = -\frac{d\delta^+(r)}{dr}. \tag{1.23}$$

と書くことが出来ます。Test function を $g(r)/r$ として積分すると簡単に導出出来ます(問題)。

1.B Hankel 関数

1.B.1 漸化式

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k \left(z^{-\nu} H_\nu^{(2)}(z)\right) = (-1)^k z^{-\nu-k} H_{\nu+k}^{(2)}(z)$$

DLMF (https://dlmf.nist.gov/10.6) 参照。

1.B.2 球 Hankel 関数との関係

球 Hankel 関数 $h_n^{(2)}$ と Hankel 関数 $H_{\frac{n}{2}-1}^{(2)}$ の間には

$$h_n^{(2)}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} H_{\frac{n}{2}-1}^{(2)}$$

という関係があります。

[*2] ここで原点に位置するデルタ関数は、原点に対して対象なため r のみの関数であるとします。また、デルタ関数は試験関数との積分で定義できるため、両辺全空間で積分してみると一致することが分かります。

　また

$$h_0^{(2)}(kr) = -\frac{1}{kr}e^{-ikr}$$

です。