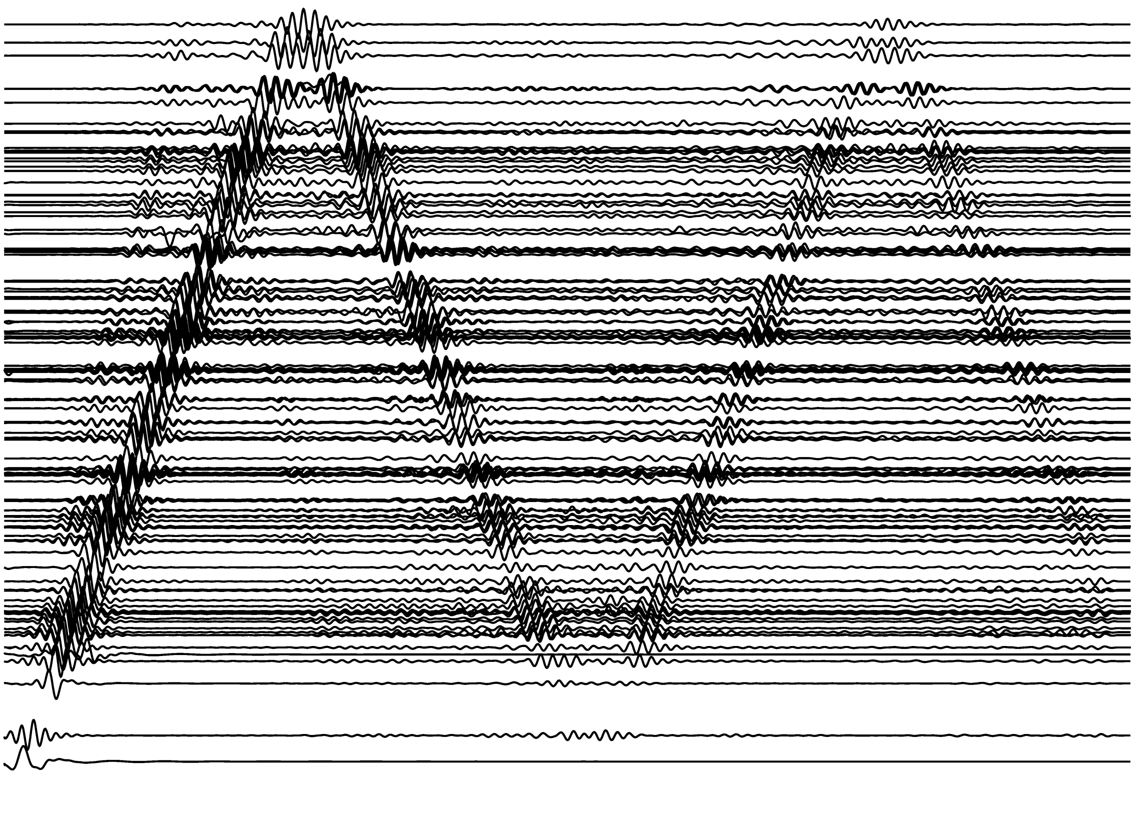
地震波動論

―地震波形を読み解くために―

西田究



2024 年 9 月 17 日

表紙の波形は *2010* 年に発生したチリ・マウリ地震の広帯域観測記録。地球を周回する *Rayleigh* 波を見て取れる。詳細は章参照のこと。

目次

はじめに

第 1 章

この世の中には色々な学問分野が存在します。私たちが新しくある学問分野に関して学ぶとき、その醍醐味は何でしょうか？ もちろんこの問に対して正解などなく、人それぞれに様々な答えが考えられます。しかし、あえて一つ挙げるとするならば、世の中の風景が違って見える新たな視点を手に入れることでしょう。例えば地質学的を学ぶと、これまで目に止めることもなかった地形や地質から、数百万年以上の時間スケールでその歴史を読み解くことが可能なことを知ります。現象を観察する事はそれほど単純ではなく、学んだ事に応じて読み解けるものが変わることを実感することでしょう。観察するという行為は意外と単純ではなく、観察者がどのように現象を捉えているかが既に反映されています。ある種のモデルという眼鏡を通して現象を観ることを避けることは出来ません。この授業で取り扱う内容は地球物理学の一分野です。地球物理はどのように現象を捉えているのでしょうか？

物理学は、対称性・普遍性の学問です。地球物理学では、地球に関する何らかの物理学的なデータを観測し、そこから情報を読み取っていきます。その際、対称性・普遍性はとても大切な判断基準となっています。一見複雑で何が何やら分からないデータでも、一度支配している現象を認識できると、これまで見えなかった対称性が不意に浮かび上がってくることがあります。その鑑賞方法を理解していれば万華鏡のようにキラキラ見えるのですが、理解していない場合ただただ雑然としてしたものにしか見えません。

ここで、風が吹いて川面に波を立てた情景を思い浮かべましょう。水面波の物理をある程度理解していれば、波の分散を見て取ることも出来ますし、水深によってその様子が変わってくることも観察できます。また川に流れがあれば、波の伝わり方にその影響を見て取ることも出来ます。そこに、カモが泳いでいたとしましょう (図 1.1)。カモは波の速度より速く泳いでいるため、衝撃波を作ってるのだなと気づくと思います。しかしよく見ると、カモの後ろのハの字型の波面は、衝撃波として期待される直線ではありません。この波の崩れは、群速度と位相速度は異なって (分散性) いるため、波の形が変化している影響です。そうなってくるとカモの後ろのくさび状の波のなす角度も気になってきます。このように、物理学的な事をある程度理解していると、波の情報を段々と読み解けるようになってきます。この授業では、地震波の情報を読み取る物理学的な基礎を一通り学ぶこを

目的としています。

図 1.1　カモの作る波。一般にこのような波は航跡波とよばれ、波紋はケルビンパターンで説明されます [5]。

この章では、まず地震学とは何を取り扱う学問なのかについて説明し、その中で地震波動伝搬を理解する大切さについて述べてきます。つづいて、地震波動論ではどのような内容を取り扱うかについてその概略を述べていきます。

1.1 地震波を読み解く

ここでは地球物理学からもうすこし対象を絞って、地震学について考えていきましょう。地震学というと、地震にのみ関する学問であるという印象を持っていると思います。これは**地震**という単語の 2 つの意味を持つため、混乱が生じていることが原因です。1 つ目は、**断層の破壊現象としての地震**、2 つ目は**地面の振動を表す地震**です。この 2 つの意味を区別するため、後者のことを地震学者は**地震動**と呼び区別しますが、一般には混乱をきたしている感が否めません。ここで強調したい事は、地震学とは断層の破壊現象に関するだけの学問ではなく、広く地球の振動現象を扱う学問だということです。日本語では意識しないと 2 つの意味を区別することはなかなか難しいですが、実は英語でははっきりと区別して単語を使います。地震に対しては earthquake という単語を使い、地震動に関しては seismic という単語を使います。英語で地震学は seismology といい、文字通り地球の振動を広く扱う学問を意味します。

ここでは少し簡単な喩え話をしてみましょう。夏の夜に花火大会を見物していると、打ち上げと音とのタイミングにずれがあることに気付くはずです。光はとても速く伝わる (30 万 km/s) ために瞬時に目に届きますが、音はゆっくりと伝わる (340 m/s) ために耳に届くのに時間がかかるためです。例えば 3 s ほど遅れて A さんに音が聞こえる場合には、打ち上げ場所は A さんから 1 km (340 [m/s] × 3 [s]) ほど離れていることが分かります (図 1.2)。この見積もりでは、地震の位置 (震源) を地震計記録から決める手法と同じ原理を用いています。

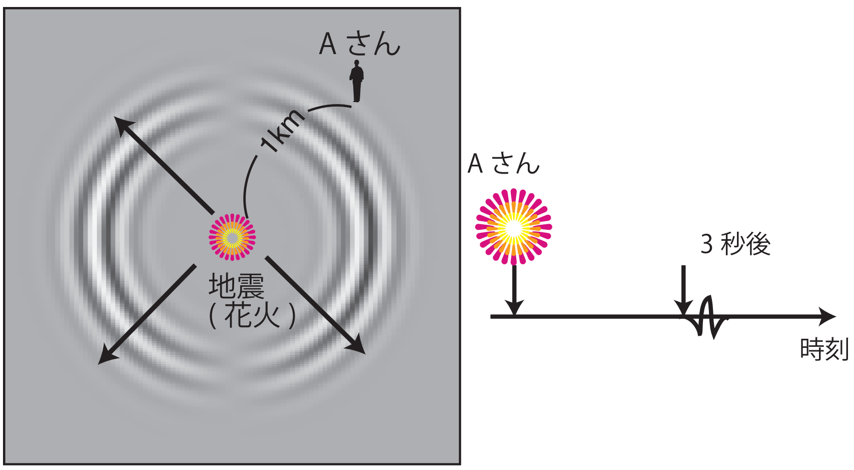


図 1.2　地震が起きた後のある瞬間の地面の動き。震源から同心円状に伝播しています。

逆に打ち上げ場所までの距離があらかじめ分かっている状況を考えてみましょう。この場合、時間ずれの大きさから音の速さを調べる事ができます。このような方法は地球内部の状態を知る上でも重要な役割を果たしてきました。地震波は固い物質中では速く伝わり、柔らかい物質中ではゆっくりと伝わる性質があります。そのため、地震が引き起こす地震波は固い場所を通ってくる場合には観測点に早く到達し、柔らかい場所を通ってくる場合には遅く到達します。この到着時間のずれから、地球の内部のどの部分が固くて、どこが柔らかいか調べることができます。実際これまでに、多くの地震波を使って地球内部構造を推定する研究が行われてきました。

地震学の研究は多岐にわたりますが、ここで述べた視点から、大きく 2 つの研究分野に大別できます。1 つ目は、地震波から地球の揺れを起こしている原因にせまっていく研究です。地震が発生すると地震波が励起され、伝搬していきます。地震計の記録から地震波を読み解き、地震や火山現象の描像に迫っていきます[注 1)]。2 つ目は、地震波の伝わり方から地球内部構造を調べる研究です。例えば、CT スキャンで人体を調べるように、地震波を使って地球内部の物質の固さをしらべることができる事が知られており、地球のダイナミクスを知る上で大きな手がかりとなっています。

実際に現実の地球を調べようとすると、それほど単純ではありません。現実の地球の構造は複雑なため、その波動伝搬も複雑とります。そのため、(1) 地震の破壊過程を調べる、(2) 地球内部構造を調べる、そのどちらの場合にも伝播の複雑さが大きな問題となります。地震学の様々な研究テーマを取り組んでいく上で、地震波動の伝播を読み解く力は、必要不可欠な素養です。地震観測の歴史的を考えると、地震計は空間的にはまばらですが、時間的には連続的に観測データを収録していました。これらの観測データを工夫して用いることで、地震現象・地球内部構造が調べらてきました。しかし、近年地震学を含め地球物理学はデータ量の爆発が起きています。実際に、近年地震観測点は 1000 点を超え 1 万点を超える観測も現実のものとなっています。また Distributed Acoustic Sensing （DAS）計測 など、波動場を面的に捉える新たな計測技術も指点しています。今後波動場をまるごと観測し、そこからどういった知見が得られるか? という問いは、地震学の今後を考える上で重要な視点と言えます。新たな面的な観測データを生かすためには、地震波動場を物理的に理解する基礎を身につけることが今後ますます大切となってくることでしょう。

この講義では、地震波動伝播を**理解する枠組み**を系統的に学んでいきます[注 2)]。近年では、複雑な構造に対して、地震波動場を数値計算することが一般的となってきました。数値計算手法が高度化するに従って、得てして解析全体がブラックボックスになりがちです。しかし、たとえ数値計算で厳密に波動場を再現できたとしても、それを読み解く力が

注 1) 地震現象を調べる手段は地震波だけではなく、地殻変動や地質学等の知見も大切です。

注 2) 地震波動伝播問題は応用数学の一分野として発展した歴史があります。例えば Jeffreys は応用数学者としても著名 (ベイズ統計の教科書を読んでも名前が出てきます) です。量子力学で出てくる WKBJ 近似の J も Jeffreys から取っています (量子力学に関連する仕事ではないですが)。古典的な教科書では複素解析を駆使して波形を計算するテクニックに焦点があてられがちですが、今回の講義ではより直感的な説明を試みています。

ないと理解したとは言えません。地震波動論の基礎が一層大切になってきたとも言えるでしょう。 この講義では、そのような地震波動を理解する基礎を身につけることに主眼をおいています。

1.2 授業の構成

この授業では、2 章で弾性体の支配方程式について復習します。この授業では連続体力学の基礎は既に学んでいることを仮定しています。しかし、連続体力学は本質的に難しい点もあり、一度学んだだけでは、つまずきやすい点も数多くあります。授業では全てを解説することは難しいですがが、この講義ノートでは、なるべく直感的に、つまづきやすい点にていての解説も試みています。

次に 3 章では、無限媒質中の地震波の伝播を考えるための準備として、Green 関数について解説していきます。続いて一般化されたホイヘンスの原理とも言える、表現定理について解説していきます。この章では、地震波動伝播を理解していく上で最も単純な全無限媒質での、解の基本的な振る舞いを学んでいきます。

4 章では、表現定理に基づき地震波の励起はどのように表現出来るか学んでいきます。震源の物理には立ち入らず、励起プロセスを force system としてどのように表現出来るかについて解説していきます。

5 章では、現実的な構造での弾性波動の伝播を学ぶ第一歩として、自由表面の効果について学びます。まずは反射・変換について解説していきます。半無限媒質での波動伝播問題は Lamb の問題として知られ、条件付きですが、その解析解が知られています。自由表面が存在することによって初めて Rayleigh 波も存在可能となります。

続いて 6 章では、2 層構造での波動伝播について学んでいきます。その理解のため、内部境界面での反射・透過についてまず学びます。続いて、2 層での一般的な弾性波動について学んでいきます。直接波・先駆波・反射波についてこれまでに学んだ知識を使って解釈していきます。また、表層に低速度層がある場合に存在する表面波である Love 波についても学んでいきます。

7 章では簡単に流体中の波について解説しています。流体の波と固体の波動は別々に学ぶことが多いですが、現実では、固体・海洋・大気を一つの結合した系として捉える必要がある現象も数多くあります。例えば 2022 年フンガトンガ-フンガハアパイ火山の噴火は記憶に新しいと思います。そのような現象を理解する際の簡単な道しるべとして、概略を述べるよていです (まだ執筆途中です)。

8 章では多層構造での弾性波動伝播を理解する上で大切な波線理論を学んでいきます。複雑な弾性波動を理解していく上で大切な理解の枠組みとなります。波線理論は、光学を起源として物理的にも数学的にも確立された分野です。

第 9 章正規モードでは、地球全体を 1 つの系と見たときに、地震波動場を定在波の重ね合わせとして取り扱う方法を解説していきます。時間領域に対する周波数領域のように、8 章までに解説してきた内容と全く独立の内容ではなく、**別の視点**を学んでいきます。

最後の 10 章では、応用例として地震波干渉法について学んでいきます。この講義では基礎に重きをおいているために、主に理論的背景や必要とする仮定について解説していき

ます。

7,9,10 章はまだまだ書きかけです。

1.2 参考書

授業全体の参考書は、斎藤 (2009)[6]、纐纈 (2018),[4] Dahlen and Tromp (1998),[2] Aki and Richards (2009),[1] Shearer (2009)[3] です。以降、各章で適宜参考書を挙げていきます。

1.3 参考文献

[1] K. Aki and P.G. Richards. *Quantitative Seismology*. Univ Science Books, 2nd edition, 2009.

[2] F.A. Dahlen and J. Tromp. *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, Princeton, 1998.

[3] P.M. Shearer. *Introduction to Seismology*. Cambridge University Press, 2009.

[4] 纐纈一起. 地震動の物理学. 近代科学社, 2018.

[5] 戸田盛和. 流体力学 30 講. 朝倉書店, 1994.

[6] 斎藤正徳. 地震波動論. 東京大学出版会, 2009.

弾性体の基礎方程式

第 2 章

弾性体力学の復習を兼ねて、支配方程式についておさらいしていきます。より詳細は Dahlen and Tromp による教科書 (Theoretical global seismology[1]) の教科書を参照してください。弾性体力学について物理的に詳しく理解したいい場合には、Landau の教科書 [5] や Fung の教科書 [3] を参考にすると良いでしょう。

2.1 座標系記述: Lagrangian 座標と Eulerian 座標

連続体中の時刻 0 で $\boldsymbol{x}$ にある粒子[注 1)]が時間とともに $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t)$ と運動する状況を考えます。始めの位置 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t での粒子を追跡する記述を と呼び、今いる位置で記述する方法をと呼びます。ある物質量の Eulerian 記述を q^E とし、Lagrangian 記述を q^L とでは以下の

$$q^L(\boldsymbol{x},t) = q^E(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t),t). \tag{2.1}$$

という関係があります。時刻 t での粒子の位置 $\boldsymbol{r}$ とその初期位置 $\boldsymbol{x}$ の関係 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t)$ は一番単純な場合と解釈することが出来ます。ここで粒子速度を考えてみましょう。初期位置 $\boldsymbol{x}$ に印を付けて速度 $\boldsymbol{u}^L$ を考えると

$$\boldsymbol{u}^L(\boldsymbol{x},t) = \partial_t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t) \tag{2.2}$$

と書くことが出来ます[注 2)]。速度 $\boldsymbol{u}$ も q の一種であるため、当然速度の Eulerian 記述 $\boldsymbol{u}^E$ は

$$\boldsymbol{u}^E(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t),t) = \boldsymbol{u}^L(\boldsymbol{x},t) \tag{2.3}$$

注 1) 今後 $\boldsymbol{x}$ と太字の場合には基本的にベクトルを表します。

注 2) では、$(\boldsymbol{r},t)$ を、では $(\boldsymbol{x},t)$ を独立変数の組としてみています。例えば $\partial_t q^E$ の q^E として位置 $\boldsymbol{r}$ を考えた場合には 0 となりますが、Lagrangian の見方では $\partial_t \boldsymbol{r}(,t)$ となり、異なります。この違いがここでの時間微分の違いに現れます。まずは q として位置を考えると自分の理解のチェックとなるでしょう。

と定義することができます。

両辺の時間微分を取ると、

$$\partial_t q^L = \partial_t q^E + \boldsymbol{u}^E \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} q^E \equiv D_t q^E, \tag{2.4}$$

と書くことができます。この関係はスカラー量 q だけではなくベクトル量に対しても成り立ちます[注 3)]。Eulerian 記述では特に (Lagrange 微分) D_t と呼び ∂_t と明示的に区別します [注 4)]。q^E として加速度 $\partial_t \boldsymbol{u}^L$ を考えると、

$$\partial_t \boldsymbol{u}^L = \partial_t \boldsymbol{u}^E + \boldsymbol{u}^E \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{u}^E \equiv D_t \boldsymbol{u}^E, \tag{2.5}$$

となります。地震計記録を考える場合、地震計は地面に張り付いているためにの方がより自然です。

流体力学では $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}, t)$ は時間とともに遠くへ流れていきます。一方弾性体力学を考える場合には、微小な変形を考える事で十分な場合が多くなります。そこで、以降簡単化のため無限小変位 (線形弾性論) を考えていきます[注 5)]。微小な変形 $\boldsymbol{s}$ を以下のように考えます:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, t). \tag{2.6}$$

変形が起こる前の釣り合いの状態を q^0 で表現出来るとします。釣り合いの状態からのずれを Eulerian 表示 (q^{E1}) と Lagrangian 表示 (q^{L1}) として

$$\begin{aligned} q^E(\boldsymbol{r}, t) &= q^0(\boldsymbol{r}) + q^{E1}(\boldsymbol{r}, t), \\ q^L(\boldsymbol{x}, t) &= q^0(\boldsymbol{x}) + q^{L1}(\boldsymbol{x}, t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

と書くことが出来ます。変化量 q^{E1}, q^{L1} と、変形 $\boldsymbol{s}$ が十分に小さければ、

$$q^{E1}(\boldsymbol{r}, t) = q^{E1}(\boldsymbol{x}, t), q^{L1}(\boldsymbol{x}, t) = q^{L1}(\boldsymbol{r}, t), \tag{2.8}$$

と書くことが出来ます。つまり Eulerian で記述した摂動、Lagrangian で記述した摂動ともに $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}$ に依存しないことが分かります。

次にでの摂動 q^{E1} とでの摂動 q^{L1} の関係を見ていきましょう。変形 $\boldsymbol{s}$ が微小であると仮定し 1 次の摂動まで考え、式 2.1 に代入すると、

$$q^{L1}(\boldsymbol{x}, t) + q^0(\boldsymbol{x}) = q^{E1}(\boldsymbol{r}, t) + q^0(\boldsymbol{r}), \tag{2.9}$$

となります。$q^0(\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{x}$ の周りで 1 次の微少量まで評価すると

$$q^{L1}(\boldsymbol{x}, t) = q^{E1}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{s} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} q^0, \tag{2.10}$$

注 3) ただし、$\partial_t q_i^L = \partial_t q_i^E + \boldsymbol{u}^E \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} v_i^E$ のようにベクトルの成分毎にこの関係が成り立つのは直交座標の場合だけです。これは一般曲線座標の場合には、単位ベクトルが空間方法に変化するためです。

注 4) 以下、記述を簡単化するために時間での偏微分を ∂_t と記述することもあります。

注 5) そのため流体では速度を基準に考え、弾性体力学では変位を基準に考えます。ここでは、弾性体力学的な記述とするために、変位の形に書き直しています。

となる事が分かります[注 6)]。これは式 2.4 を時間積分した形となっています。地震学で考える変位・速度は、多くの場合高次の項を無視することが出来ます。そのため、線形弾性論 (無限小変位) の範囲では、ほとんど Eulerian 記述と Lagrangian 記述を区別する必要はありません。しかしや密度、重力などは初期値が空間微分を持っているために (つまり q^0 の空間微分が 0 とならないため)、Eulerian で記述した摂動と、Lagrangian で記述した摂動が一致しません。つまり、初期応力・重力を考える場合には Eulerian 記述であるか Lagrangian 記述であるかに十分注意する必要があります。初期応力 (静水圧) が重要となってくるために、Eulerian 記述と Lagrangian 記述に違いが出てくる例として大気中の波動 (§**??**, 未完成) について取り上げます。

2.2 ひずみ: 変形をどう測るか

変形を測るために、2つの粒子 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r})$ を追跡する。$t = 0$ で2つの粒子は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ に位置する。$d\boldsymbol{r}$ と $d\boldsymbol{x}$ は

$$d\boldsymbol{r} = \nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} + \nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{s}) \cdot d\boldsymbol{x}, \tag{2.11}$$

と結び付けられます。ここで粒子間の距離がどの程度変化したか見積もっていきます。

$$|d\boldsymbol{r}|^2 - |d\boldsymbol{x}|^2 = 2(d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{E}^L \cdot d\boldsymbol{x}), \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{E}^L \equiv \frac{1}{2}[\nabla\boldsymbol{s} + (\nabla\boldsymbol{s})^T - (\nabla\boldsymbol{s})^T\nabla\boldsymbol{s}] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_j}{\partial x_i} + \frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_l}{\partial x_i}\frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right) \tag{2.13}$$

と書け、Green-Lagrange と呼びます。

ここで変形 $\boldsymbol{s}$ が十分に小さく 2 次の項が無視できるとすると、は

$$\boldsymbol{E}^L = \frac{1}{2}[\nabla\boldsymbol{s} + (\nabla\boldsymbol{s})^T] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_j}{\partial x_i} + \frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right) \tag{2.14}$$

と書ける[注 7)]。テンソル $\boldsymbol{E}^L$ は Lagrangian で記述されていますが、この式から分かるように微小変形の場合には Eulerian 記述か Lagrangian 記述であるかを区別する必要はありません。また定義から自明ですが、ひずみテンソルは対象なため 6 つの独立な成分があります。

注 6) 詳細は Dahlen and Tromp (1998)[1] の §3.2 参照。

注 7) Einstein の和の縮約記法に従い、同じ項で添字が重なる場合は和をとります。

問題 2.1

2 次元の場合の剛体回転を考える。テンソルの 1 次の項を計算せよ。剛体回転では歪まないはずであるが、2 次の微小量が残ってしまう。剛体回転に対する Green-Lagrange を考えることにより、が完全にキャンセルされることを示せ。

2.2.1 一般的な座標でのひずみの表現

ここでは、一般的な座標で線形の範囲でみがどう表現出来るか見ていきましょう。変位 $\boldsymbol{s}$ を直交座標

$$\boldsymbol{s} = \sum_j s_j \hat{\boldsymbol{x}}_j \tag{2.15}$$

と定義すると、勾配は

$$\nabla \equiv \hat{\boldsymbol{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.16}$$

と書けます。変位 $\boldsymbol{s}$ の定義を代入すると、その勾配は

$$\boldsymbol{\nabla s} = \sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_i} = \sum_i \hat{\boldsymbol{x}}_i \left[\sum_j \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \hat{\boldsymbol{x}}_j + \sum_j s_j \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_j}{\partial x_i} \right] \tag{2.17}$$

となります。また 2 階のテンソル $\boldsymbol{E}$ は成分と基底ベクトルを使って

$$\boldsymbol{E} = \sum_{ij} T_{ij} \hat{\boldsymbol{x}}_i \hat{\boldsymbol{x}}_j \tag{2.18}$$

と書くことが出来ます。ここでややこしくなるのは、基底ベクトルの偏微分が入ってくるところです。

円筒座標 (r, φ, z) でのひずみ (1 次)

円筒座標でのみを考えてみましょう。基底ベクトルを $\hat{\boldsymbol{r}}$ と書くと、その偏微分は $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{z}$ です。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial r} = 0, &&\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \varphi} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}, &&\frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial r} = 0, &&\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} = -\hat{\boldsymbol{r}}, &&\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial \hat{z}}{\partial r} = 0, &&\frac{\partial \hat{z}}{\partial \varphi} = 0, &&\frac{\partial \hat{z}}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

となります。の定義に従って、テンソルの成分を比較すると

$$
\begin{aligned}
E_{rr} &= \frac{\partial s_r}{\partial r}, E_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{s_r}{r}, E_{zz} = \frac{\partial s_z}{\partial z} \\
2E_{\varphi z} &= \frac{\partial s_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial s_\varphi}{\partial z}, E_{zr} = \frac{\partial s_r}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial r}, \\
2E_{r\varphi} &= r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{s_\varphi}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial s_r}{\partial \varphi}.
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

となります。

問題 2.2

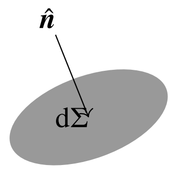
上記に示した、円筒座標系の 1 次のを導出せよ。

球座標 (r, θ, φ) でのひずみ (1 次)

極座標でのも同様に計算する事が出来ます。ここでは結果のみ示します。

$$
\begin{aligned}
E_{rr} &= \frac{\partial s_r}{\partial r}, E_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} + \frac{s_r}{r}, E_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} + s_\theta \cos\theta\right) + \frac{s_r}{r} \\
2E_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r}\frac{\partial s_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial s_\theta}{\partial \varphi} - s_\varphi \cos\theta\right), 2E_{\varphi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial s_r}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{s_\varphi}{r}\right) \\
2E_{r\theta} &= r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{s_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial s_r}{\partial \theta}.
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

2.3 内力: 応力テンソルとトラクション



連続体の中の任意の微小面 $d\Sigma$ を考えて、その面に垂直な単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{n}}$ とする。この面を堺として $\hat{\boldsymbol{n}}$ の正側の物質が負側に及ぼす単位面積あたりの力 ($\boldsymbol{f}$) をトラクションと呼び、$\boldsymbol{T}^{E}$[注8)]を

$$\boldsymbol{f} = d\Sigma \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{T}^{E}. \tag{2.22}$$

と定義します。任意の面を境にして、それぞれの側が相手側に及ぼすトラクションは同じ大きさで方向が反対となります。

2.4 角運動量の保存

角運動量の保存から、 テンソルは対称 ($T_{ij} = T_{ji}$) であることが要請されます。詳細は問題 2.3 を参照してください。このように、物質を構成する点がそれ自身の回転や方向の影響を持たない物質を非極性物質 (nonpolar material) と呼びます。

以下問題 2.3 の補足です。少し考えると分かるのですが、厳密にはこの対称性はミクロな角運動量 (スピン) を考えない場合に成り立ちます。湯川秀樹の物理学講義 [10] にある弾性体力学の記述面白いです。授業をしなくていけなくなって弾性体力学を勉強しなくてはいけなくなったけれども、よく考えると色々分からなくなるという文脈でテンソルの対称性を話題にしています。スピン考えるとこの対称性は崩れるのではないかという記述があります。実は、近年では弾性波とスピンの相互作用は研究されていて、理論・実験とも論文が出版されています。例えば Rayleigh 波を使ってスピンをコントロールする実験的な研究もあります [4]。

注 8) 正確にはこの場合には Cauchy stress と呼ぶ。変形前の微小面に対してを定義する方法もあるがここでは割愛する。

問題 2.3

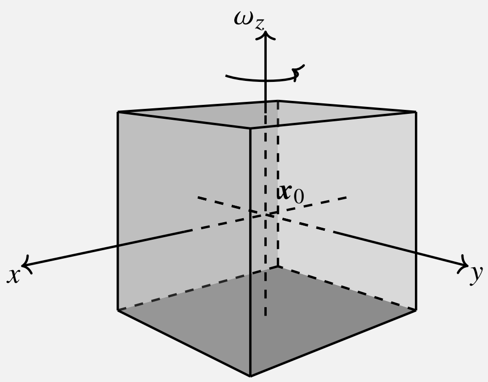
一辺 ϵ の微小な立方体要素の、z 軸回りの角運動量を考える。以下で示す二つの場合について、角運動量の保存則 (立方体にかかるトルクが、微小体積要素の角運動量の時間微分に等しいという式) を書き下せ。そして、ϵ が 0 の極限を考え $T_{xy} = T_{yx}$ を示せ。

1. T_{xy} と T_{yx} は定数であり、他の成分 T_{ij} は 0 とする。
2. (Optional) T_{xy} と T_{yx} は

$$T_{xy}(\boldsymbol{x}) = T_{xy}(\boldsymbol{x}_0) + \left.\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{x}_0} \delta x + \left.\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}\right|_{\boldsymbol{x}_0} \delta y, \tag{2.23}$$

$$T_{yx}(\boldsymbol{x}) = T_{yx}(\boldsymbol{x}_0) + \left.\frac{\partial T_{yx}}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{x}_0} \delta x + \left.\frac{\partial T_{yx}}{\partial y}\right|_{\boldsymbol{x}_0} \delta y, \tag{2.24}$$

であるとし、多の成分は $T_{ij} = 0$ とする。



2.5 質量の保存

微小変形の場合の支配方程式を、まずは質量保存から見ていきましょう。この保存則は重力 (浮力) を考慮する際に重要です。

一般に質量の保存は

$$\partial_t \rho^E = -\nabla \cdot (\rho^E \boldsymbol{u}^E) \tag{2.25}$$

と書けます。ここで $\boldsymbol{u}^E$ オイラーで記述した速度場です。

ここで密度の 1 次の摂動を考えます。

$$\rho^E = \rho^0 + \rho^{E1} \tag{2.26}$$

上式を質量保存の式に代入し時間積分すると

$$\rho^{E1} = -\nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{s}) \tag{2.27}$$

が得られます。右辺は密度が流れによってどの程度流れこんだかを表し、左辺は流れこんだ分だけ変化していることを表します。一方 Lagrangian 記述では

$$\rho^{L1} = -\rho_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{s} \tag{2.28}$$

と書けます。こちらは粒子に張り付いているので、膨らんだ分だけ密度が下がることを表しています。

注意すべき点は、Lagrangian で記述した密度の摂動 ρ^{L1} は $\rho^{L1} = -\rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{s}$ となり、Eulerian で記述した場合と一致しません。$\nabla \rho_0$ が 0 であれば成り立つが一般には一致しません。弾性波の波長が典型的な密度の変化スケールより十分短ければ、記述の違いは無視することが出来ます。

2.6 運動方程式: 運動量の保存

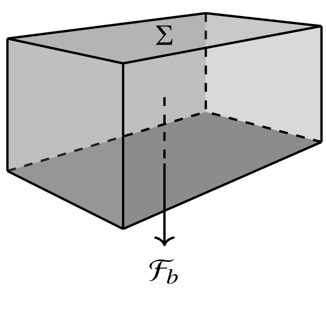
ある体積要素 V^t が変形にともなって形を変えていく状況を考えます。

$$\frac{d}{dt} \int_{V^t} \rho^E \boldsymbol{u}^E dV^t = \mathcal{F}, \tag{2.29}$$

外力 $\boldsymbol{F}$ は表面 ∂V^t に働く表面力 (surface force) と、重力のように遠隔力として直接体積要素に働く実体力 (body force) の和で

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_s + \mathcal{F}_b = \int_{\partial V^t} (\hat{\boldsymbol{n}}^t \cdot \boldsymbol{T}^E) d\Sigma^t + \int_{V^t} \rho^E \boldsymbol{g}^E dV^t, \tag{2.30}$$

と書けます。



ガウスの発散定理を使って整理すると、

$$\rho^E D_t \boldsymbol{u}^E = \nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{T}^E - \rho^E \nabla \phi^{E1} \tag{2.31}$$

ここで物質微分を書き直して、質量保存則を使って成分表示をすると、運動量保存の形を

$$\frac{\partial (\rho^E \boldsymbol{u}_i^E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho^E u_i^E u_j^E - T_{ij}^E \right) = -\rho^E \frac{\partial \phi^{E1}}{\partial x_j} \tag{2.32}$$

と導出することができます。$\rho^E u_i^E u_j^E - T_{ij}^E$ を運動量流束密度テンソルと呼びます。

初期応力、実体力を無視して 1 次の微小量まで考えると

$$\rho_0 \partial_t^2 \boldsymbol{s} = \nabla \cdot \boldsymbol{T}^{E1}, \tag{2.33}$$

となります。

重力を考えた場合

$$\rho_0 \partial_t^2 \boldsymbol{s} = \nabla \cdot \boldsymbol{T}^E - \rho^E \nabla \phi^E, \tag{2.34}$$

となります。ここで ϕ^E は重力ポテンシャルです[注 9)]。重力を考える場合、重力を支える静水圧を考える必要があります。静水圧からのずれ T^{E1} は

$$T_{ij}^E = -p^0 \delta_{ij} + T_{ij}^{E1}, \tag{2.35}$$

と書くことが出来ます。静水圧が重力を支えているため

$$\nabla p^0 = -\rho_0 \nabla \phi^0, \tag{2.36}$$

を満たす必要があります。1 次の微小量まで考え整理すると

$$\rho_0 \partial_t^2 \boldsymbol{s} = \nabla \cdot \boldsymbol{T}^{L1} - \nabla[\rho^0 \boldsymbol{s} \cdot \nabla \phi^0] - \rho^0 \nabla \phi^{E1} - \rho^{E1} \nabla \phi^0, \tag{2.37}$$

となります。

2.7 エネルギーの保存則

全エネルギ U は運動エネルギー U_k、弾性エネルギー U_e、重力エネルギー U_g の和で

$$U = U_k + U_e + U_g \tag{2.38}$$

と書くことが出来ます。以下簡単のため重力ポテンシャルの寄与は無視します[注 10)]。運動エネルギーは

$$U_k = \frac{1}{2} \rho_0 \partial_t \boldsymbol{s} \cdot \partial_t \boldsymbol{s} \tag{2.40}$$

と書くことが出来ます。エネルギーフラックスを $\boldsymbol{K}$

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{T} \cdot \partial_t \boldsymbol{s}, \tag{2.41}$$

注 9) ここでは重力の効果は考慮しますが、ポテンシャルの摂動 () は無視します。天文の分野では Cowling 近似と呼ばれており、特に大気の運動を考える場合には良い近似です。後に述べるように地球の弾性振動を考える場合にも、周期 3000 秒程度になるとの効果は大きくなってきます。

注 10) 重力ポテンシャル

$$E_g = \rho_0 \left[\boldsymbol{s} \cdot \nabla \phi^0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{s} \cdot \nabla \phi^{E1} + \frac{1}{2} \boldsymbol{s} \cdot \nabla \nabla \phi^0 \cdot \boldsymbol{s} \right] \tag{2.39}$$

と書くことが出来ます。詳細は Dahlen and Tromp (1998) の 3.8 節を参照のこと。

と定義すると[注 11)]、エネルギーの保存則は

$$\partial_t U + \nabla \cdot \boldsymbol{K} = 0, \tag{2.42}$$

と書くことができます。

弾性エネルギーは天下り的[注 12)]に

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{ij} E_{ij} T_{ij}, \tag{2.43}$$

変形の履歴のない形 (とを決めると一意に決まる) で定義しますが自明なことでしょうか？じつは、この様なポテンシャルエネルギーとして弾性エネルギーが存在することは決して自明ではありません。ここでは、その存在条件について詳しく考えていきましょう。

内部応力 T_{ij} が単位体積当たりにする仕事 δR は

$$\delta R = -T_{ij} \delta E_{ij} \tag{2.44}$$

と書くことができます [(5)]。ある微小要素が $\boldsymbol{E} = 0$ から $\boldsymbol{E} = \Delta \boldsymbol{E}$ となるまで変形を受けるとします。この際に内部応力がする仕事 ΔR は

$$\Delta R = -\int_0^{\Delta \boldsymbol{E}} \sum_{ij} T_{ij} dE_{ij} \tag{2.45}$$

とかけ、変形の履歴 (E_{ij}) に依存する形になります。しかし弾性体を考える場合には、変形を加えたあとのもとの状態 (ここでは $\boldsymbol{E} = 0$) に戻したときに ΔR が 0 となることが要請されます (保存力)[注 13)]。つまり、ΔR は変形の履歴によらないことが要請されます[注 14)]。この条件から

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{\partial T_{kl}}{\partial E_{ij}} \tag{2.46}$$

という関係が要請されます。次元が高いから一見馴染みがない関係式のように見えますが、2 次元の場合を考えると (問題 2.6 参照)、式 2.46 は渦なし場の条件に対応します。渦なし場に対しては、$\mathbf{T}$ はスカラポテンシャル W の空間勾配 (空間座標として E を考える) で表現できると解釈することができます。言い換えると、弾性エネルギー W は $\mathbf{T}$ に対することからスカラポテンシャルとも解釈する事ができます。3 次元の場合には微分幾何の知識 (Stokes の定理) を使ってこの関係を一般化することができます。[注 15)]。

注 11) エネルギーフラックスには重力ポテンシャルの変化に関する項もあるのですが、煩雑になるためここでは省略します。詳細は Dahlen and Tromp (1998) の 3.8 節を参照のこと。

注 12) 正確には熱力学的な考察によります。

注 13) 実は弾性体一般に成り立つ性質ではありません。変形が大きくなると突然変形様式がかわり大きく変形することが知られています。座屈 (buckling) と呼ばれる現象です。この場合に一つの応力状態に対して複数の変形状態が存在し不安定を起こします。この場合には変形に経路依存性が出てしまい、保存力の条件を満たさなくなってしまいます。

注 14) 弾性体の微小変形を考える場合には、エネルギーの散逸が起きないためにこの要請は満たされます。しかし、粘弾性物質の場合には、粘性散逸が起きるため一般に $\Delta R \neq 0$ となってしまいます [(6)]。

注 15) 例えばシュッツ [(9)] 参照

問題 2.4

$$dR = -T_{ij} dE_{ij} \tag{2.47}$$

を導け。(ヒント: 内力 $F_j = \partial_i T_{ij}$ のする仕事を見積もる。)

問題 2.5

まず単純のため正方形の領域を変形させ $E_{xx} = \Delta E_{xx}$, $E_{yy} = \Delta E_{yy}$ と変形する状況を 2 通り考える。(i) まず ΔE_{yy} だけ変形させ、次に ΔE_{xx} 変形させる。(ii) 最初に ΔE_{xx} 変形させ、次に ΔE_{yy} だけ変形させる。まず (i), (ii) の場合それぞれについて仕事 $\Delta R^{(i)}$, $\Delta R^{(ii)}$ を見積もれ。

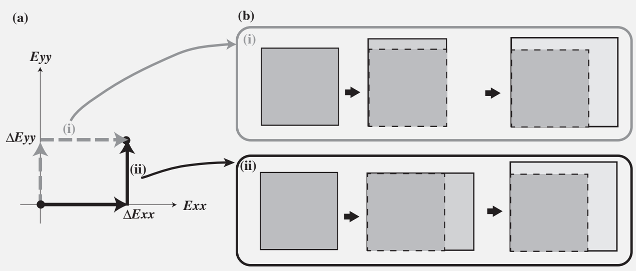


図 2.1

保存力による変形を考える場合, $\Delta R^{(i)} = \Delta R^{(ii)}$ となる必要がある。この場合弾性定数が満たすべき以下の条件を導け。

$$C_{ijkl} = C_{klij} \tag{2.48}$$

問題 2.6

式 2.46

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{\partial T_{kl}}{\partial E_{ij}}$$

の関係を理解するため、より単純な 2 次元変形の場合を考えてみよう。この場合に・の独立な成分は 3 つとなる。E の成分張る 3 次元空間を考えよう。この場合に、内部応力がする仕事 δR が変形の履歴によらないための条件である式 2.46 が、渦なし場の条件と等価となることを示せ。

2.8 構成方程式: フック則

弾性体内の運動を決めるためには、$\boldsymbol{T}^{L1}$ と E_{L1} の関係 (構成式) を知る必要があります。ある要素の変形を見るため、Lagrange 的味方が本質的です。しかしまずは、初期応力を考えず (Eulerian 記述と Lagrangian 記述を区別せず) 考えていきましょう。線形弾性体の場合には、とは一般化された

$$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}. \tag{2.49}$$

によって結び付けられます。ここで C_{ijkl} は弾性テンソルと呼ばれ 81 の成分を持ちます。テンソルとテンソルの対称性 $C_{ijkl} = C_{jikl}, C_{ijkl} = C_{ijlk}$ が得られます[注 16)]。また前節で述べた、T_{ij} による内力が保存力になるという要請から $C_{ijkl} = C_{klij}$ が要請されます[注 17)]。結果的に 21 の自由度を持つこととなります。

弾性体が等方な場合には Lamé 定数 λ, μ を使って

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.50}$$

と単純化されます[注 18)]。

今後良く使うため、等方性媒質の場合のを書き下しておきます。

$$\begin{aligned}
T_{xx} &= (\lambda+2\mu)E_{xx} + \lambda(E_{yy}+E_{zz}), \qquad & T_{xy} &= 2\mu E_{xy}, \qquad & E_{xz} &= 2\mu E_{xz} \\
T_{yy} &= (\lambda+2\mu)E_{yy} + \lambda(E_{xx}+E_{zz}), \qquad & T_{yz} &= 2\mu E_{yz} \\
T_{zz} &= (\lambda+2\mu)E_{zz} + \lambda(E_{xx}+E_{yy})
\end{aligned} \tag{2.51}$$

また、弾性定数としてはヤング率 E やポアソン比 ν もよく使われ、ラメ定数とは

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{2.52}$$

という関係にあります。

先に述べたように、初期応力がある場合には Lagrangian 記述による摂動と Eulerian による摂動は異なります。ここでは地球が静水圧平衡下にある事を仮定しましょう[注 19)]。微小体積要素 V^t を追うため、まずは Lagrangian で記述します。構成方程式を考える際にはある微小要素に注目することが自然であり、つまり Lagrangian 記述が自然なためです。

$$p^L = p_0 + p^{L1}. \tag{2.53}$$

注 16) 厳密にいうと弾性定数に自由度は残るため、一般性を失わずに対称性を持つように定義できると言った方が正確です。

注 17) 式 2.46 から導くことができます。関連する詳細な議論は弾性体力学の教科書 (例えば Fung の教科書 [3] 参照のこと。また、厳密には減衰が生じる場合には粘性散逸によって、$C_{ijkl} = C_{klij}$ の対称性は崩れてしまいます [6]。

注 18) 弾性定数についての詳細は弾性体力学の教科書を参考のこと。

注 19) 地球深部の静水圧は数は数 100 万気圧にも及ぶためその影響を無視できない場合があります。地球は第 1 次近似的には球対称と考えて良いので、静水圧平衡を考えることは妥当だと考えられらます。

構成方程式は

$$p^{L1} = -\lambda(\boldsymbol{x})\nabla \cdot \boldsymbol{s} \tag{2.54}$$

Eulerian で記述した運動方程式

$$p^{E1} = \boldsymbol{s} \cdot \nabla p_0 - p^{L1} \tag{2.55}$$

と書けます。

初期圧力 p_0 は静水圧平衡であると仮定すると、

$$\nabla p_0 + \rho_0 \boldsymbol{g} = 0, \tag{2.56}$$

満たす必要があります。連続の式も合わせて運動方程式を整理すると

$$\rho_0 \partial_t^2 \boldsymbol{s} = \nabla p^{L1} + \rho_0[(\nabla \cdot \boldsymbol{s})\boldsymbol{g} - \nabla(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{g})] \tag{2.57}$$

となります。

Eulerian 記述の圧力と Lagrangian 記述の圧力を混同すると浮力の項が消えてしまいます。重力が係る場合には、初期応力を考えなくてはならない場合も多く、Eulerian 記述と Lagrangian 記述に注意する必要があります。

2.9 構成方程式のミクロモデル: バネ・おもりモデル

連続体中を伝播する弾性波動をイメージするために、バネ・おもりモデルを考えていきます。特に S 波が伝播するためには”斜めのバネ”が重要です。

2.9.1 1 次元の弦の場合: P 波の伝搬

波が伝わるには、復元力が働く必要があります。地震波の場合”弾性体”がにたいして元に戻ろうとする力が働きます。ここでは単純に 1 次元の場合を考えてみましょう。図 2.2 のように、重り (質量 m) がバネ (ばね定数 k) で繋がれている場合を考えます。

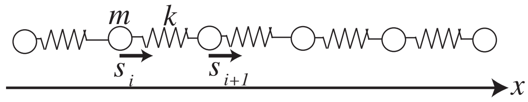


図 2.2　1 次元のバネ・重りモデル。

$$m\frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} = k(s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1}), \tag{2.58}$$

と書けます。右辺は、s の 2 階差分化した形になっているので、おもりの間隔 Δx が十分に小さい場合には、波動方程式

$$\frac{m}{\Delta x}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = (k\Delta x)\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \tag{2.59}$$

と書くことができます。$m/\Delta x$ は密度 ρ に対応し、$k\Delta x$ は弾性定数 κ と対応します。ここで κ と ρ は、波は速度 c との間に $\kappa = \rho c^2$ という関係を満たします。改めて波動方程式を書き直すと

$$\rho\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \kappa\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \tag{2.60}$$

となります。E は $E = \frac{\partial s}{\partial x}$ と書けるために、T は $T = \kappa E$ となります。そのため波動方程式は、

$$\rho\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.61}$$

と弾性体の運動方程式そのものであることが分かります。この例では、振動方向と伝搬方向が一致しているので、弾性波で考えると P 波と対応します。詳細は次の章で解説していきます。

2.9.2 2 次元の場合: P 波と S 波

弾性体中の波動には、前の章でも解説したように P 波と S 波の二種類が存在します。この章では、ではそもそも、なぜ P 波速度ははは S 波速度より速いのか[注 20)]考えていきます。まず最初に、P 波が伝播する際にもずり変形が伴うことを示し、そこから P 波速度が S 波速度が速くなることを説明していきます。続いて、簡単な 2 次元バネー重りのモデルを考えて考察していきます。

2 次元バネ–重りのモデルを考える前に、なぜ P 波が S 波より伝播速度が速いか、直感的な説明を試みます。

まず前提として、固いもの (同じ変形をするにも大きな力がいる) ほど伝わる波の速度が速いことが大切になってきます。弦の振動では硬いバネほど、波の伝わる速度が速いことに対応します。なので、P 波を伝える弾性体の変形が、S 波の変形に比べて固い事が言えれば P 波速度のほうが S 波速度より速いことが分かります。

まずは図 2.3 をのような仮想実験を考えてみましょう。

1. まずは薄板に注目し、液体に浸し圧力をかけます。
2. その結果として一様に縮みます。

注 20) 10 年くらい前に、一般公開のさいに大学生から”なぜ P 波のほうが S 波よりも早く伝わるのか?” という素朴な質問がありました。直感的な説明を試みて上手くいかなかった経験が、この節のもととなっています。

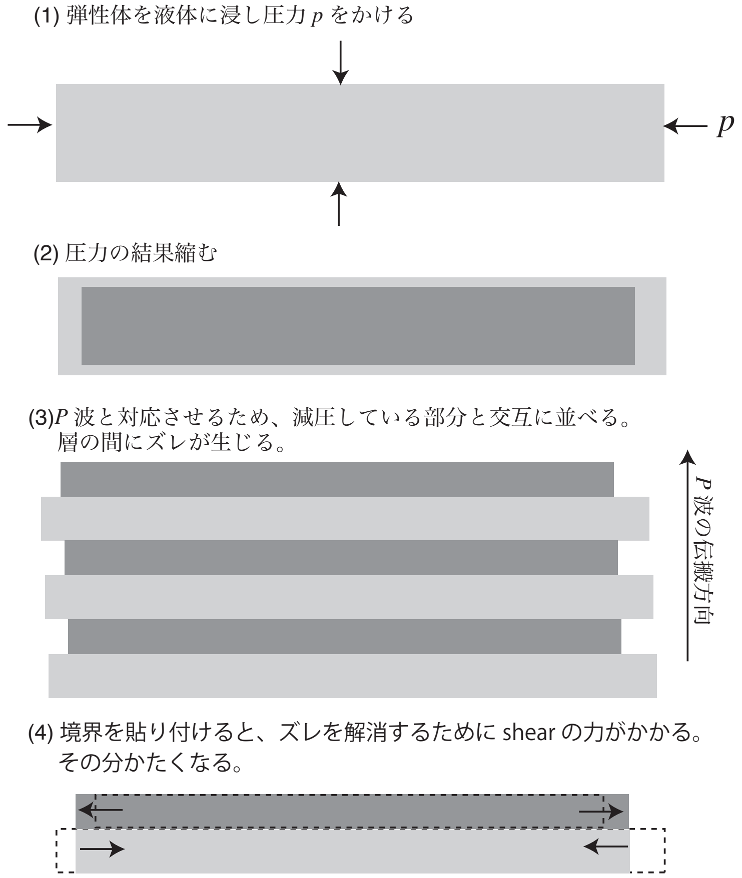


図 2.3　P 波の伝播にともなう変形の模式図。

3. P 波は圧力が高いところ低いところが交互に伝わっていくので、縮めた薄板と、膨張した薄板を並べます。
4. P 波と対応させるためには、ピタッと貼り付けなくてはいけません。そのため貼り付ける境界では余分に力をかけなくては いけません。このズリの変形は、進行方向にたいして垂直のためにちょうど S 波の変形に対応します。つまり P 波の変形は、流体的な体積膨張と S 波的な変形を必要とします。つまり S 波よりも、流体的な体積膨張の分だけ硬くなります。結果として P 波のほうが S 波より伝わる速度が速くなると言えます。

それでは次に、バネ–重りのモデルを 2 次元に拡張して考えていきましょう。2 次元問題に S 波を再現するためには、斜めに入ったバネが必要となり、モデルが複雑になってきます。ここでは単純化して、図 2.4 で示した単純化した問題 (正三角形で空間を埋め尽くす場合) を考えていきましょう。

S 波について考えていきましょう。S 波は情報に伝播し、x 方向 (紙面左右方向) に変位が生じているとします。i 番目の重りは x 方向のみ $s_{x,i}$ だけ変動するとします。ここで大切なことは、平面波の伝播を仮定しているため $s_{x,i}$ は x 座標によらないということです。

図 2.3 同様、シート状の変形を考えます。

図中太線で示したバネによって、ある重り (m と書いてあるもの) にかかる復元力 T^S(ここでは x 方向) は

$$T_i^S = \frac{1}{2}k(s_{x,i+1} - s_{x,i}), \tag{2.62}$$

となります。重りの下側にもバネが付いているので、トータルでは $T_i^S - T_{i-1}^S$ の力がかかり、1 次元波動方程式と対応します。

次に P 波の場合を考えていきましょう。i 番目の重りは y 方向のみ $s_{y,i}$ だけ変動するとします。 図中太線で示したバネによって、ある重りにかかる復元力 T^P(ここでは y 方向) は

$$T_i^P = \frac{3}{2}k(s_{y,i+1} - s_{y,i}), \tag{2.63}$$

となります。上の式と比較して分かるように、P 波のほうが S 波に比べて物質が堅く反応するために、伝播速度は速くなることがわかります。、トータルでは $T_i^P - T_{i-1}^P$ の力がかかります。

よく使われる弾性定数 (Lame 定数) との対応を示して、整理していきます。図 2.4 のモデルの場合には、$\lambda = \mu = \sqrt{3}/4k$ となります。その場合 S 波速度 (β) は剛性率 μ と密度 ρ で決まり、 P 波速度 (Vp) は λ と剛性率 μ 両方が関係します。

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$
$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{2.64}$$

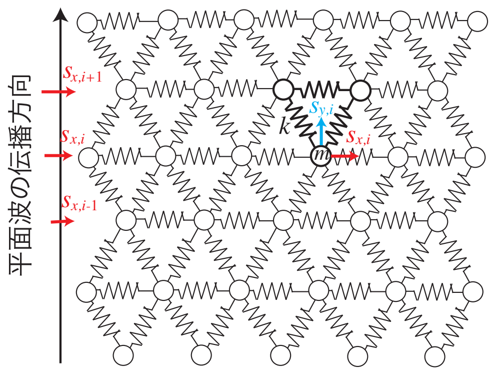


図 2.4　2 次元のバネ・重りモデル。

となります。α を決めている 1 項目 (λ) は流体的な意味での圧縮に対する力に対応し、2 項目 (μ) は固体としてその場にとどまろうとする復元力に対応します。P 波速度 Vp にも剛性率 μ が関係していることが、一見直感とは一致しませんが、斜めのバネがずりの変形に対しても応答していることで理解できます[注 21)]。

注 21) 少し考えてみると分かりますが、斜めのバネを入れず格子状にバネをつなぐと、ずり変形に対応する復元力が働かきません。そのため S 波に対応する変形を加えるとぺしゃんこにつぶれてしまいます。

問題 2.7

式 2.62 と式 2.63 を導け。
ヒント: 図 2.5 のように単純化したバネと重りに対して、変位 s_x と s_y にたいしてどのような力がかかるかを考えてみる事。

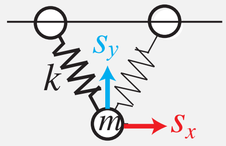


図 2.5　単純化したモデル。

2.9.3 † 減衰

この講義ノートの大部分では地震波の減衰を取り扱いませんが，実際には地震波は徐々に減衰していきます。弾性エネルギーが徐々に熱エネルギーへと散逸していくためです。この節では、ミクロに見た時に減衰はどのような物理的な素過程と対応するのか見ていきます。簡単のため、前節で考えたバネおもり系に、粘性散逸を担うダンパーを接続することを考えます。

ダッシュポット

バネのみ考える場合には，エネルギー散逸がないために振幅の減衰は起こりません。ここでエネルギーの散逸による減衰を考えるため, バネに加えてダッシュポットを考えます。

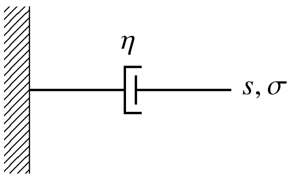


図 2.6　ダッシュポット

ダッシュポットは粘性抵抗 η を受けるため、右下端で変位 $s(t)$ を与えると、加えた力 $\sigma(t)$ は

$$\sigma = \eta \frac{ds}{dt} \tag{2.65}$$

という力 σ を受ける関係を満たします。

ケルビン・フォークトモデル

ここでバネとダッシュポットを組み合わせたモデルを考えます。
この場合右下端で加えた力 σ と変位 s の関係は

$$\sigma = k\left(s + \frac{\eta}{k}\frac{ds}{dt}\right) \tag{2.66}$$

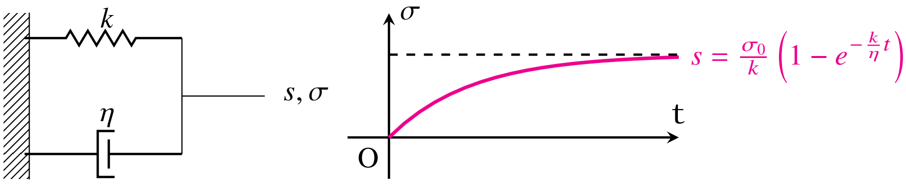


図 2.7　ケルビン・フォークトモデルとその応答。

と書くことが出来ます。右側に

$$\sigma = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sigma_0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{2.67}$$

と時刻 t に一定の力 σ_0 を加えたときの変位 (クリープ応答関数 $J(t)$) は

$$s = \frac{\sigma_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{\eta}t}\right) \tag{2.68}$$

となります。バネのみであれば瞬時に σ_0/k と変位しますが (黒点線)、粘性緩和によって遅れて最終変位に達している様子が分かります。

ゼナーモデル (Zener model)

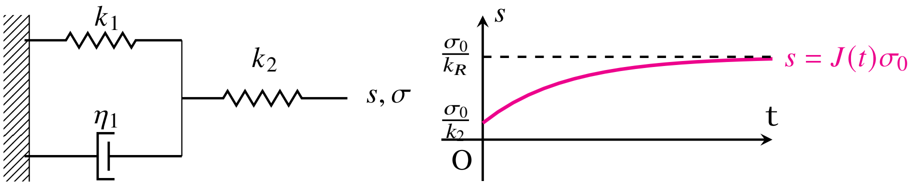


図 2.8　ゼナーモデルとその応答。

バネを一つ加え、より現実的なモデルを考えてみましょう。

右下端で加えた力 σ と変位 s の関係は

$$\sigma(t) + \tau_\epsilon \frac{d\sigma}{dt} = k_R\left(s + \tau_\sigma \frac{ds}{dt}\right) \tag{2.69}$$

と書くことが出来ます。ここで、$k_r, \tau_\epsilon, \tau_\sigma$ は

$$k_R \equiv \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \tau_\sigma \equiv \eta/k_1, \tau_\epsilon \equiv \eta/(k_1 + k_2) \tag{2.70}$$

と定義しました。

同様に、右端で $\sigma = \sigma_0 H(t)$　($H(t)$ はヘヴィサイドの階段関数) という力を加えると、その応答は $\sigma_0 J(t)$ とないます。ここで $J(t)$ はクリープ応答関数

$$J(t) = \frac{1}{k_R}\frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma} + \frac{1}{k_R}\frac{\tau_\sigma - \tau_\epsilon}{\tau_\sigma}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}}\right] \tag{2.71}$$

です。

複素弾性定数

$\sigma = \sigma_0 e^{-i\omega t}$, $s = s_0 e^{-i\omega t}$ という周期的な入力を考えます。代入し整理すると、ケルビン・フォークトモデルの場合は

$$\sigma_0 = k\left(1 - i\omega\frac{\eta}{k}\right)s_0 \tag{2.72}$$

ゼナーモデルの場合には、

$$\sigma_0 = k_R\frac{1 - i\omega\tau_\sigma}{1 - i\omega\tau_\epsilon}s_0 \tag{2.73}$$

となります。複素弾性定数 K をそれぞれ、

$$K_v \equiv k\left(1 - i\omega\frac{\eta}{k}\right) \tag{2.74}$$

$$K_z \equiv k_R\frac{1 - i\omega\tau_\sigma}{1 - i\omega\tau_\epsilon} \tag{2.75}$$

と弾性定数を複素数に拡張することによって、減衰を表現出来るようになります。

ゼナーモデルの場合に Q^{-1} は

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{\tau_\sigma - \tau_\epsilon}{\tau}\frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \tag{2.76}$$

となります。ここで $\tau \equiv \sqrt{\tau_\sigma\tau_\epsilon}$ とします。

非弾性パラメータ Q

$$\sigma(t) = \sigma_2 \cos\omega t \tag{2.77}$$

を与え

$$s(t) = s_2\cos(\omega t - \delta) \tag{2.78}$$

という変位が生じた場合を考えます。ここで σ_2, s_2, ω は実定数です。

1 周期振動する際に、エネルギー E が ΔE だけ減少したときに、非弾性パラメータ Q は

$$\frac{2\pi}{Q} = \frac{\Delta E}{E} \tag{2.79}$$

と表現することが出来ます。ここで、1 周期でのエネルギー散逸量 ΔE は

$$\Delta E = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sigma\frac{ds}{dt}, \tag{2.80}$$

と E は

$$E = \frac{1}{2}\sigma(0)s(0) \tag{2.81}$$

と評価出来ます。

物理分散

減衰によって生じる位相速度の分散性を考えために，バネ・おもりモデルを一般化します。ここでバネの代わりにゼナ－モデルを考え，同様に角周波数ωで特徴付けられる周期的な振動を考えます。この場合に Δx を小さく取ると、係数を複素数に拡張した波動方程式

$$-\omega^2 \rho s_0(x) = K_v \frac{\partial^2 s_0(x)}{\partial x^2} \tag{2.82}$$

を考えます。変位 s_0 として位相速度 $c(\omega)$ で伝播する波

$$s_0(x) = e^{-\frac{\omega x}{2c(\omega)Q(\omega)}} e^{i\omega \frac{x}{c(\omega)}} \tag{2.83}$$

を考えてみましょう。この場合 $c(\omega)$ は周波数によって変化 (分散) します。具体的に書き下すと

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{k_R}{\rho}} \left(1 + \frac{\tau_\sigma - \tau_\epsilon}{2\tau} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \tag{2.84}$$

となります。

地震波の周波数帯 (10^{-3}–10 Hz) の帯域では,Q は周波数に依存せず、おおよそ一定であることが知られています。バネ-ダッシュポットをを組み合わせる事によって，Q が周波数に依存しない事を説明出来ることが知られています。いまゼナ－モデルでは単一の緩和時間 (τ_σ) に対応する、減衰が働く周波数帯が存在するが位相速度は大きく変わります。地球は実際には、多くの素過程に対応する、色々な緩和時間が存在します。そこで、緩和時間の異なるゼナーモデルを並列に接続することにより、Q^{-1} が一定である周波数帯を広げることが出来ます。

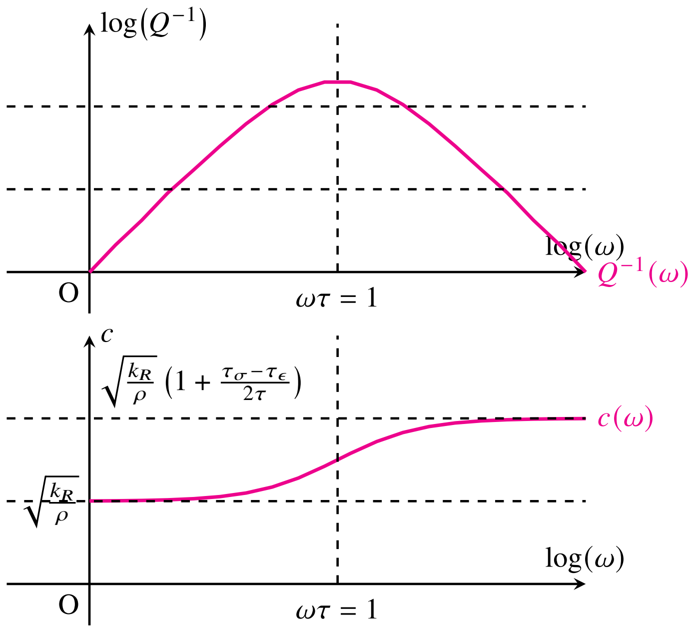


図 2.9　物理分散。

問題 2.8

1. 波は媒質中を伝わる際には，媒質が振動のエネルギーを吸収し熱に変わることによって波は減衰する。角周波数 ω で振動する波 s_0 の伝播を，非弾性パラメーター Q を使い

$$s_0(x,t) = e^{-\frac{|\omega|x}{2cQ}} e^{i\omega\left(\frac{x}{c}-t\right)} \tag{2.85}$$

と表現できるとするとする。ただし Q は正の実数である。ここで，$t=0$ で $x=0$ に撃力が加えられた場合に発生する波を考える。撃力はすべての周波数成分を等しく含むため，x 軸正の向きに伝播する波束は $t>0, x>0$ の領域で

$$s(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\omega|x}{2cQ}} e^{i\omega\left(\frac{x}{c}-t\right)} d\omega \tag{2.86}$$

と書くことが出来る。c, Q は周波数に関して一定と仮定し，s の解析解を求めよ。また，位置 x での時間発展を図示せよ。
2. (1) で求めた解は、厳密には物理的に実現不可能な解である。その理由について考察せよ。

2.10 境界条件

地球で一番大きな境界はもちろん地表の自由表面です。それ以外にも地球内部には、多くの地震波速度のジャンプがあることが知られています。また、海水・外核という流体層の存在も無視できません。この節では、不連続面での境界条件についてか簡単にまとめます。詳細については Dahlen and Tromp の教科書 [1] 参照のこと。

2.10.1 固体・固体境界 Moho や 660 km 不連続のように縫いついた境界

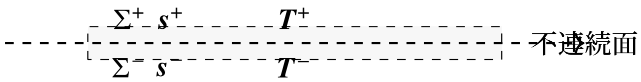


図 2.10　境界を囲む面 Σ^+ と Σ^- を考える。

境界を囲む面 Σ^+ と Σ^- を考え、力の釣り合い、変位の連続を考えるといかの条件が境界条件であることが分かります。

変位の連続:　$[\boldsymbol{s}]_-^+ = 0.$
全トラクションの連続:　$[\boldsymbol{T}^{L1} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}]_-^+ = 0.$

2.10.2 固体・流体境界 CMB や海底のような境界

固体流体の境界では水平方向の変位が不連続となることが重要です。そのために固体・流体境界にエネルギーが集中する波が存在出来ることとなります。次章以降で詳しく述べますが Stonely モードと呼ばれる波です。海底面やコア・マントル境界にエネルギーが集中していて、外からは捉えづらい波の存在が知られています。

変位の連続:　$[\boldsymbol{s} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}]_-^+ = 0.$ 不連続面に対して平行な変位 (すべり) を許す。
全トラクションの連続:　$[\boldsymbol{T}^{L1} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}]_-^+ = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{T}^{L1} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}]_-^+ = 0.$ ただし流体中の shear はゼロとなることに注意[注 22)]。

[注 22)] 初期応力や静水圧を考える必要がある場合には、これらの寄与を考えなくてはいけなく注意が必要 [Dahlen and Tromp, 1998][1]。

2.10.3 重力ポテンシャルの境界条件 (全ての場合)

弾性体の振動問題を解く場合に、境界条件を考える必要があります。境界条件は Lagrangian 記述が自然ですが、初期応力などが無視できる場合には Eulerian 記述と区別する必要はありません。ここでは詳しくは述べませんが、(重力ポテンシャル ϕ の摂動) を考える場合には、Eulerian 記述と Lagrangian 記述の違いに注意する必要があります。これは重力は本質的に Eulerian 記述が自然である一方、弾性変形は Lagrangian 記述が自然であるためです。

$$
\begin{aligned}
&[\phi^{E1}]_-^+ = 0\\
&[\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi^{E1} + 4\pi G\rho^0\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}]_-^+ = 0
\end{aligned}
$$

2.11 各項の比較

運動方程式の各項を見積もってみましょう。角周波数 ω、波数 k の波 $u = e^{i(kx-\omega t}$ を考えてみましょう。

慣性:	$\rho\partial^2 s$	$-\rho\omega^2 s$
弾性:	$\nabla\cdot\boldsymbol{T}$	$k^2\kappa s$
重力:		$\rho k s g$

表 2.1　運動方程式の各項の大きさの見積もり。

g は重力加速度、κ は”代表的”な弾性定数 (ρ弾性波速度^2) となります。重力項と弾性項を比べると、

$$\frac{重力}{弾性} \sim \frac{\rho g}{k\kappa} \tag{2.87}$$

となる。つまり重力と弾性が同程度の大きさになる周期 T は

$$T = \frac{2\pi 弾性波速度}{g} \sim 3000s, \tag{2.88}$$

となる。最も低周波の弾性振動の周期と同程度です。周期 100 秒より長周期側では、重力の効果を考える必要がありますが、より短周期側ではほとんど影響しません。大気音波の場合を考えると音速を 340 m/s 程度とすると周期 200 秒から重力が効いてくると見積もることができる。

周期 1000 秒を超えるとコリオリ力の効果も無視できなくなることが知られている。波の進む方向によって地球回転の影響が変わってくるためである[注 23]。コリオリ力の効果

注 23) 1960 年のチリ地震での例が The Fynman lectures on physics `http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_51.html` で紹介されています [2]。Caltech での物理と地球科学の議論が興味深いです。

についての詳細は Snieder *et al.* (2016)[7] 参照。図 2.11 は 2004 スマトラ地震時のスペクトルです。自転の効果で，伝播方向によって固有周波数が分裂している様子が見て取れます。ゼーマン効果とのアナロジーから、Zeeman splitting と呼ぶこともあります [8]。地球回転が効いてきて伝播に指向性が出てくると、次章で詳しく解説する相反性が崩れることも知られています。詳細は Dahlen and Tromp (1998) を参照のこと。

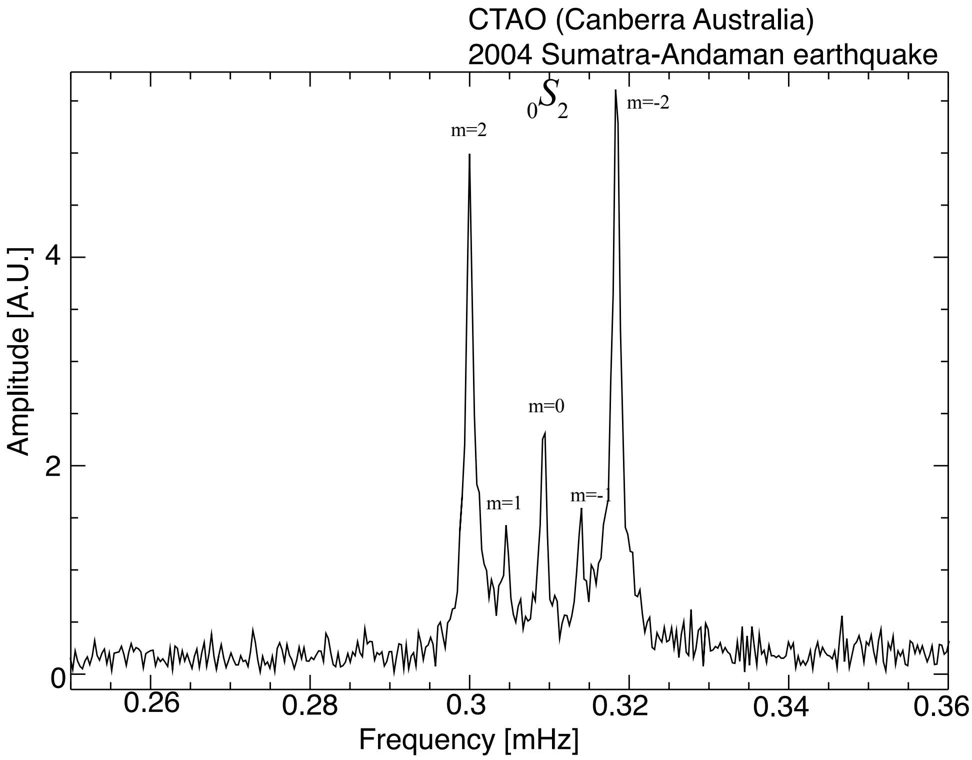


図 2.11　コリオリ力によるモードの分裂

問題 2.9

コリオリ力と弾性力を比較し、コリオリ力が効いてくる周期を見積もれ。

2.12 参考文献

[1] F.A. Dahlen and J. Tromp. *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, Princeton, 1998.

[2] Richard Phillips Feynman, Robert B Leighton, and Matthew Linzee Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 1. Pearson/Addison-Wesley, 2006.

[3] Y.C. Fung. *Foundations of Solid Mechanics*. International seeries in dynamics. Prentice-Hall, 1965.

[4] D. Kobayashi, T. Yoshikawa, M. Matsuo, R. Iguchi, S. Maekawa, E. Saitoh, and Y. Nozaki. Spin current generation using a surface acoustic wave generated via spin-rotation coupling. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 119, p. 077202, Aug 2017.

[5] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, A.M. Kosevich, J.B. Sykes, L.P. Pitaevskii, and W.H. Reid. *Theory of Elasticity*. Course of theoretical physics. Elsevier Science, 1986.

[6] Tryfan G Rogers and Allen C Pipkin. Asymmetric relaxation and compliance matrices in linear viscoelasticity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, Vol. 14, No. 4, pp. 334–343, July 1963.

[7] Roel Snieder, Christoph Sens-Schönfelder, Elmer Ruigrok, and Katsuhiko Shiomi. Seismic shear waves as Foucault pendulum. *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 43, No. 6, pp. 2576–2581, mar 2016.

[8] R Widmer-Schnidrig. What can superconducting gravimeters contribute to Normal-Mode seismology? *Bull. Seismol. Soc. Am.*, Vol. 93, No. 3, pp. 1370–1380, June 2003.

[9] B.F. シュッツ. 物理学における幾何学的方法. 物理学叢書. 吉岡書店, 1987.

[10] 湯川秀樹. 物理講義 (講談社学術文庫). 講談社, 1977.

Green 関数と表現定理

第 3 章

地震波の励起を考える場合、は便利な道具立てです。ホイヘンスの原理の自然な拡張版ともいうべきと合わせて、弾性体中の様々な現象 (地震、火山噴火) によって引き起こされる地震動を取り扱う枠組を作る上で重要な役割を担います。この章では単純な弦の振動・音響方程式についての Green 関数の解説から始め弾性体の場合へと進み、最後にについて解説します。

3.1 1 次元波動方程式の解

まずは一番単純な 1 次元波動方程式について見ていきましょう。ここでは流体中の音波を考えます。単純化のため、弾性定数 κ と密度 ρ が一定とします。圧力変動 p は以下の波動方程式を満たします。

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \tag{3.1}$$

ここで α は伝播速度 (音速) で $\alpha = \sqrt{\kappa/\rho}$ と書くことができます。

ここで数学的には乱暴ですが、波動方程式を時空間で Fourier 変換してみましょう。圧力の Fourier 成分 $P(k,\omega)$ は波数 k と角周波数 ω の関数となります。

$$\left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k^2\right) P(k,\omega) = 0. \tag{3.2}$$

となります。つまり $P \neq 0$ の非自明な解を考えるとき、$\omega^2/\alpha^2 - k^2 = 0$ という関係式 (分散関係) を満たさなくてはいけません。ここで 1 つの Fourier 成分 $P(k,\omega)e^{i(\omega t + kx)}$ を考えます。分散関係から $k = \pm\omega/\alpha$ と書けるため、Fourier 成分は $P(k,\omega)e^{i(\omega(t \pm x/\alpha))}$ と書き直すことができ、x 軸正の向きと負の向きに伝わる内を表していることが分かります。

d'Alembert の解

もう少し厳密に 1 次元波動方程式の一般解を考えてみましょう。$\xi = x - \alpha t, \eta = x + \alpha t$ と変数変換することで 1 次元波動方程式の解は任意の関数 ϕ, ψ を使って、

$$p(x,t) = \phi(x - \alpha t) + \psi(x + \alpha t), \tag{3.3}$$

と書けることが分かります。右辺第一項は x 軸正の方向に進む波を、第二項は負の方向に進む波を表します。

初期値問題

$t = 0$ で初期条件が分かっているときに、どのように解が求まるか考えていきましょう。

$$p(x,0) = p_0(x), \tag{3.4}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=0} = q_0(x), \tag{3.5}$$

と初期条件が分かっているとき、d'Alembert の解と初期条件を比較してみましょう。

$$p_0 = \phi(x,0) + \psi(x,0) \tag{3.6}$$

$$q_0 = -\alpha\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial t}\right), \tag{3.7}$$

式 3.7 の両辺を積分すると、ϕ と ψ を解くことが出来ます。以上まとめると、$p(x,t)$ は

$$p(x,t) = \frac{1}{2}\left[p_0(x - \alpha t) + p_0(x + \alpha t)\right] + \frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} q_0(x')dx' \tag{3.8}$$

と書けることが分かります。第 1 項のみの場合には、初期条件 $p = p_0$ を与えて静かに手を離した状況に相当します。第 2 項のみの場合には、$t = 0$ で変位は 0 ですが、$t = 0$ で運動量を変化を与えた事に対応します。

問題 3.1

以上の状況をもう少し具体的に考えてみましょう。

1. 式 3.3 と式 3.8 を示せ。
2. p が $t=0$ で

$$p(x,0) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \tag{3.9}$$

$$\left.\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right|_{t=0} = 0 \tag{3.10}$$

   という初期条件を満たす場合の解を求め図示せよ。

3. p が $t=0$ で

$$p(x,0) = 0 \tag{3.11}$$

$$\left.\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \tag{3.12}$$

$$\tag{3.13}$$

   という初期条件を満たす場合の解を求め図示せよ。

3.2 音波の場合: Green 関数

地震・火山などの現象が引き起こす波動を考える場合、波を励起する現象は外力として表現されます。この場合には、撃力に対する応答 () を考え、外力の時空間分布をたたみ込む事によって、励起された波動を評価することが出来ます。ここでは、まずはの性質について見ていきましょう。

まずは単純な音波で考えてみましょう。運動方程式と構成方程式 ($\kappa\nabla \cdot \boldsymbol{s} = -p$) から圧力の摂動 $p(\boldsymbol{x}, t)$ に対する波動方程式が導かれます。外力 $\boldsymbol{f}$ に対して

$$-\nabla \cdot \frac{\nabla p(\boldsymbol{x}, t)}{\rho_0(\boldsymbol{x})} + \frac{1}{\kappa(\boldsymbol{x})}\frac{\partial^2 p(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{f}}{\rho_0}\right). \tag{3.14}$$

と書くことができます。

ここで $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ で 外力 $\delta(\boldsymbol{x} - \xi)\delta(t - \tau)$[注 1)]が存在するときの応答 $g(\boldsymbol{x}, t; \xi, \tau)$ を

$$-\nabla \cdot \frac{\nabla g(\boldsymbol{x}, t; \xi, \tau)}{\rho_0(\boldsymbol{x})} + \frac{1}{\kappa(\boldsymbol{x})}\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{x}, t; \xi, \tau)}{\partial t^2} = -\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t - \tau). \tag{3.15}$$

考えます。

問題 3. 2

式 3.15 で外力 $-\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})$ は流体の湧き出し $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ と対応することを示せ。実際には湧き出しがどのような物理現象を表しているか述べよ。

境界条件が時間変化しないとすると時間に対して、

$$g(\boldsymbol{x}, t; \xi, \tau) = g(\boldsymbol{x}, t - \tau; \xi, 0) \tag{3.16}$$

という対称性があります。そのためは時刻差 $t - \tau$ を変数として取れば十分です。または外力が加わる前には静止 ($g = 0, t - \tau < 0$) しているとします。

p は $(g(\boldsymbol{x}, t - \tau; \xi, 0))$ の重ね合わせで

$$p(\boldsymbol{x}, t) = \int_V g(\boldsymbol{x}, t; \xi, \tau)\nabla\left(\frac{f(\xi, \tau)}{\rho_0}\right) dV(\xi) d\tau, \tag{3.17}$$

と表現できます。

次は周波数領域で考えてみましょう。$P(\omega, \boldsymbol{x})$ は圧力 p のフーリエ変換を表します。こ

注 1)

$$f(0) = \int f(x)\delta(x)dx$$

とかけるので、デルタ関数の次元は 1/m となることに注意が必要です。

こでは重力を無視し静水圧を考えないで良いとします。ω は角周波数[注 2)]で、F は外力 $\nabla \cdot \left(\frac{f(\boldsymbol{x},t)}{\rho_0(\boldsymbol{x})} \right)$ のフーリエ変換です。

$$\nabla \cdot \frac{\nabla P(\boldsymbol{x},\omega)}{\rho_0(\boldsymbol{x})} + \frac{\omega^2}{\kappa(\boldsymbol{x})} P(\boldsymbol{x},\omega) = F(\boldsymbol{x},\omega). \tag{3.20}$$

周波数領域ではは

$$\nabla \cdot \frac{\nabla G(\boldsymbol{x},\xi,\omega)}{\rho_0(\boldsymbol{x})} + \frac{\omega^2}{\kappa(\boldsymbol{x})} G(\boldsymbol{x},\xi,\omega) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}). \tag{3.21}$$

と書けます。P は $(G(\boldsymbol{x},\xi,\omega))$ の重ね合わせで

$$P = \int_V G(\boldsymbol{x},\xi,\omega) F(\xi,\omega) dV(\xi), \tag{3.22}$$

と表現できます。

3.3 均質媒質での Green 関数

一般的な媒質に対するの振る舞いを理解するために、均質媒質中での具体的な解について解説してきます。まずは波動方程式の性質について見ていくことにします。

3.3.1 1 次元 Green 関数の導出

まずは 1 次元波動方程式を考えます。3 次元媒質でも平面波の伝播を考える上で重要です。今撃力が $t=0$ で加わった場合を考え、力が加わる前には静止 $(g=0, t<0)$ しているとします。

均質であることとから、式 3.21 から

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 G^{1D}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{\kappa} G^{1D} = \delta(z). \tag{3.23}$$

となります。

注 2) フーリエ変換の規格化には色々な流儀があるので注意すること。時系列 $u(t)$ に対し、その Fourier 変換 $\mathcal{F}$ と Fourier 逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ を

$$U(f) = \mathcal{F}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi f t} dt, \tag{3.18}$$

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}(U) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} U(f) e^{i2\pi f t} df, \tag{3.19}$$

と定義する。ここで、U は時系列 u のフーリエ成分を表します。この授業での定義の詳細は付録に示しました。

問題 3.3

1. $z = 0$ 以外での解を求めよ。
2. $z = 0$ では右辺がデルタ関数になるために式が特異になる。そこで式 3.23 を $-\epsilon/2 <= r <= \epsilon/2)$ で積分し、

$$\left[\frac{\partial G^{1D}}{\partial z}\right]_{-\epsilon/2}^{+\epsilon/2} = \rho_0 \tag{3.24}$$

であることを示せ。ここで式 3.22 から微小区間での積分は十分に小さくなるべきことに注意せよ。

3. 原点 $z = 0$ でそれ以外の解と接続することによって、1 次元が

$$G^{1D}(z, \omega) = \frac{\rho_0 i}{2k} e^{-ik|z|} \tag{3.25}$$

を導出せよ。ここで $k = \omega/\alpha$ は波数である。

4. フーリエ逆変換し

$$g^{1D}(z, t) = \begin{cases} 0 & t < |z|/\alpha \\ -\frac{\alpha}{2}\rho_0 & t >= |z|/\alpha. \end{cases} \tag{3.26}$$

を示せ

5. 問題 3.1 (3) では、1 次元波動方程式の初期条件として速度を与えた。この解と 1 次元とを比較し物理的に考察せよ。

複素積分を使った 1 次元 Green 関数の導出

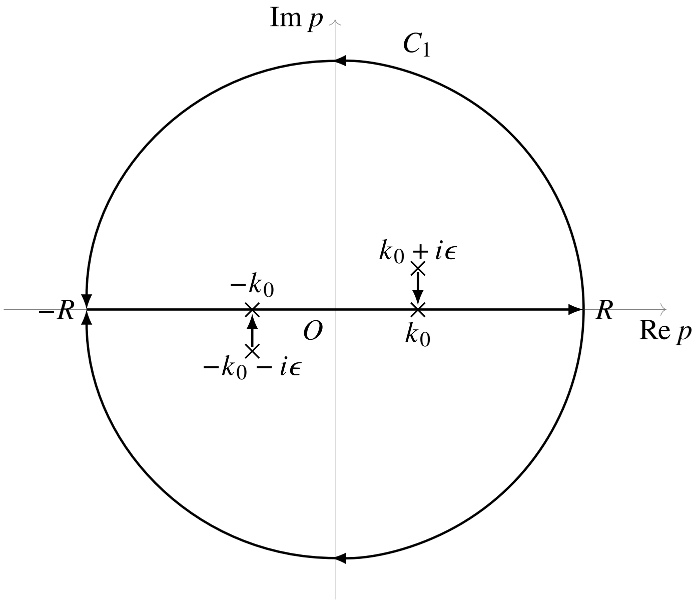
ここでは、空間方向にもフーリエ変換して、複素積分を使って G^{1D} を求めてみます。簡単のため k_0 を $k_0^2 \equiv \rho_0\omega^2/\kappa$ と定義します。G^{1D} のは空間 (z) に関するフーリエ変換を考え、そのフーリエ成分を $\tilde{G}$ とします。波動方程式のフーリエ変換を考えると、空間微分は波数 k を使って ik となるので、

$$\tilde{G} = \frac{\rho_0}{k_0^2 - k^2} \tag{3.27}$$

となります。この逆フーリエ変換を考えれば G^{1D} を求めることが出来ます。

$$G^{1D} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_0}{k_0^2 - k^2} e^{ikz} dk \tag{3.28}$$

を計算すれば良いことが分かります。この積分を留数を使って評価していきます。ただこのままでは、1 位の極 $(k = \pm k_0)$ が実軸上にあるために評価できません。そこで因果律を考えて $\pm k_0 \pm i\epsilon$ を考え ϵ を 0 とする極限を考えます。物理的には、波が原点から未来に向かって伝播し、かつ少しだけ振幅が減衰する状況を考えています。



留数を評価することで、G^{1D} を

$$G^{1D}(z,\omega) = \frac{\rho_0 i}{2k} e^{-ik_0|z|} \tag{3.29}$$

と求めることが出来ます。

3.3.2 2 次元 Green 関数の導出

均質であることとから、式 3.21 は

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G^{2D}}{\partial r}\right) + \frac{\omega^2}{\kappa} G^{2D} = \delta(r). \tag{3.30}$$

となる。ここで $\boldsymbol{x}_0$ を原点に円筒座標 (r,ϕ) をとり、$t_0 = 0$ の場合を考えています。

1. $r = 0$ 以外では、式 3.30 の解は第 1 種 $J_0(r)$ とノイマン関数 $N_0(r)$ の線形和で表現出来ます。
2. $r = 0$ では式が特異になる。そこで式 3.30 を原点付近の微小円 (領域 C) で面積積分し、ガウスの発散定理から、

$$\int_C \frac{\partial G^{2D}}{\partial r} dl = \rho_0 \tag{3.31}$$

   であることが分かります。
3. 原点 $r = 0$ でそれ以外の解と接続することによって、2 次元が

$$G^{2D} = -i\frac{\rho_0}{4} H_0^{(2)}(kr) \tag{3.32}$$

   と表すことが出来ます。ここで $H_0^{(2)}$ は第 2 種です。

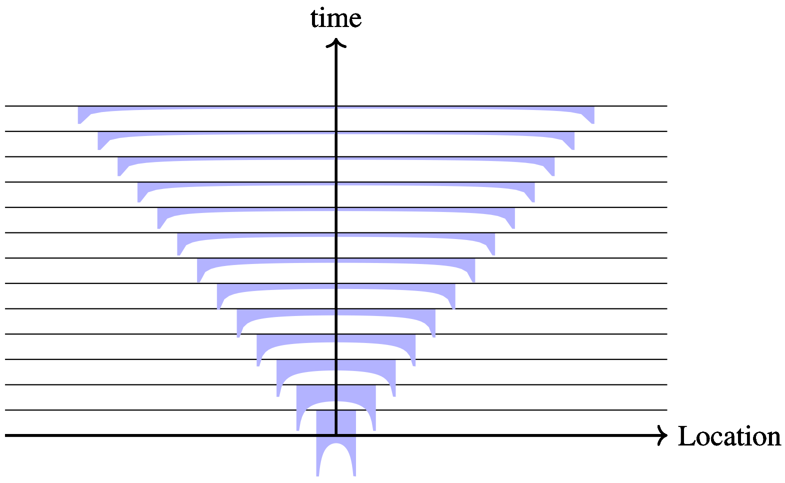


図 3.1　2 次元 Green 関数の伝播の様子。

4. 時間領域では

$$g^{2D}(r,t) = -\frac{\rho_0}{2\pi}\frac{H(t-r/\alpha)}{\sqrt{t^2-r^2/\alpha^2}}, \tag{3.33}$$

と表現できます。ここで H は Heaviside の階段関数です。

問題 3.4

1. 第 1 種の遠方での近似式 (4 章の付録参照) から、円筒波で表現出来ることを示せ。
2. 円筒波の振幅の距離依存性を、エネルギー保存則から解釈せよ。
3. 時間領域の解 (式 3.33) は、十分に遠いときに振幅が $1/\sqrt{r}$ に比例することを示せ。

3.3.3 球面波: 3 次元 Green 関数

この節では、3 次元空間の原点に $\delta(\boldsymbol{x})\delta(t)$ の力が働いた場合にどう波が伝播するか考えていきます。球対称の問題を考えるため、支配方程式は

$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial g^{3D}}{\partial r}\right) + \frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2}{\partial t^2}g^{3D} = -\delta(\boldsymbol{x})\delta(t), \tag{3.34}$$

と簡単に書くことができます。。

まずは、解が距離 r のみに依存する場合について、d'Alembert の解を考えていきま

す[注 3)]。$p = \bar{p}f/r$ と変数変換すると、

$$p = \frac{p_0(t-r/\alpha)}{r} + \frac{p_1(t+r/\alpha)}{r}, \tag{3.35}$$

と表現することが出来る。この解の性質から、原点で発生した波は球面上を一様に広がっていき、振幅は $1/r$ で減衰することが分かる。点から広がった場合波面の面積は $4\pi r^2$ と見積もることが出来るので、振幅 (p に比例する) の自乗の波面での積分が保存することが分かかります。

3 次元のは (詳細は問題 3.5 参照)

$$g^{3D}(r,t) = -\frac{\rho_0}{4\pi}\frac{\delta(t-r/\alpha)}{r}, \tag{3.36}$$

と書くことが出来ます。

問題 3.5

式 3.21 を時間に球座標で書き直し書き下し、フーリエ変換すると

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G^{3D}}{\partial r}\right) + \frac{\omega^2}{\kappa}G^{3D} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) \tag{3.37}$$

となる。ここで $\boldsymbol{\xi}$ を球座標 (r,θ,ϕ) 原点に取る場合を考えている。

1. $G^{3D} = \bar{G}/r$ と変数変換して方程式を書き直せ。
2. $r = 0$ 以外での解を求めよ。
3. $r = 0$ では式が特異になる。そこで式 3.21 を原点付近の微小球で体積積分し、ガウスの発散定理から、

$$\int_\Sigma \frac{\partial G^{3D}}{\partial r} d\Sigma = \rho_0 \tag{3.38}$$

であることを示せ。

4. 原点 $r = 0$ でそれ以外の解と接続することによって、3 次元が

$$G^{3D} = -\frac{\rho_0}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r} \tag{3.39}$$

を導出せよ。

5. 逆フーリエ変換することによって、時間領域でのを導出せよ。

注 3) 一般に波動方程式は偶数次と奇数次で解の性質が違います。奇数次元の解は局在化し、偶数次元の解は長く尾を引きます。単純に次元が高くなれば難しくなるというわけではなく、3 次元よりも 2 次元のほうが厄介な点も多い。たとえば、2 次元の解は局在化せず、$t = \infty$ まで値を持つことがその一例です。

3.3.4 † n 次元波動方程式の Green 関数

2 次元のと、1 次元・3 次元のはずいぶんと振る舞いが違います。この章では、一般次元波動方程式ののの性質をみていくことで、その振る舞いをみていきます。この章は、進んだ内容ですので読み飛ばしてかまいません。

3 次元 Green 関数と 1 次元 Green 関数の関係

3 次元の場合には

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G^{3D}}{\partial r}\right)+\frac{\omega^2}{\kappa}G^{3D}=\frac{\delta^+(r)}{4\pi r^2} \tag{3.40}$$

を考えます。$G^{3D}=\Psi/r$ と定義し整理すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{\omega^2}{\kappa}\Psi&=\frac{\delta^+(r)}{4\pi r}\\&=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\delta^+(r)}{dr}\end{aligned} \tag{3.41}$$

この式をじっと眺めると、左辺は 1 次元波動方程式の形になっているので、Ψ は 1 次元とデルタ関数の微分との r に関する畳込みの形でかけることが分かります。

$$\begin{aligned}\Psi&=-\frac{1}{4\pi}G^{1D}*\frac{d\delta^+}{dr}\\&=-\frac{2}{4\pi}\frac{\partial G^{1D}}{\partial r}\\&=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial G^{1D}}{\partial r}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

ここで最後に 2 をかけたのは、G^{1D} と対応するは変数に関して 0 に対して両側で定義されているためです。最終的に 3 次元と 1 次元は

$$G^{3D}=-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial G^{1D}}{\partial r}, \tag{3.43}$$

という関係で結び付けることが出来ます。これは以前別の方法で導出したから確かめることが出来ます。

n 次元 Green 関数と $n+2$ 次元 Green 関数の関係

n 次元は、n 次元波動方程式を考えます。は原点に関して対象であるとして、極座標で r 方向以外を積分すると

$$S_n\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial G^n}{\partial r}\right)+k_0^2G^n=\frac{\delta^+(r)}{\rho_0 r^{n-1}}, \tag{3.44}$$

という式が得られます。ここで S_n は n 次元球の表面積は r を固定して他の座標に関して積分したために出てきます。また S_n は

$$S_n = \frac{2\pi^{n/2} r^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \tag{3.45}$$

という漸化式を満たします。また

$$S_{n+2} = \frac{2\pi}{n} S_n \tag{3.46}$$

とう関係を満たします。

3 次元波動方程式は 1 次元の解と単純な関係で結びつけることが出来ました。一般に $n+2$ 次元の解と n 次元の解を結びつけることが出来ないのでしょうか? 実は結びつけることが可能です。ここで天下り的ではありますが、Ψ^n を

$$\Psi^n \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial G^n}{\partial r} \tag{3.47}$$

と定義して、$n+2$ 次元ラプラシアンを作用させると、単純な偏微分の計算から

$$\frac{1}{r^{n+1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1}\frac{\partial \Psi^n}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial \Psi^n}{\partial r}\right)\right) \tag{3.48}$$

となります。つまり n 次元波動方程式 (eq. 3.3.4) の両辺 r の偏微分をとり、r で割ると、

$$\frac{1}{r^{n+1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1}\frac{\partial \Psi^n}{\partial r}\right) + k_0^2\Psi^n = \frac{1}{\rho_0 S_n}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\delta^+}{r^{n-1}}\right) \tag{3.49}$$

と書くことが出来ます。ここで右辺を評価してみましょう。定数を省略すると

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\delta^+}{r^{n-1}}\right) = -(n-1)\frac{\delta^+}{r^{n+1}} + \frac{d\delta^+}{dr}\frac{1}{r^n} = -n\frac{\delta^+}{r^{n+1}} \tag{3.50}$$

となります。ここでデルタ関数に関する微分の式を使いました。$S_{n+2} = 2\pi S_n/n$ を使って整理し直すと

$$\frac{1}{r^{n+1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1}\frac{\partial \Psi^n}{\partial r}\right) + k_0^2\Psi^n = -2\pi\frac{\delta^+}{\rho_0 S_{n+2} r^{n+1}} \tag{3.51}$$

このことから、

$$G^{n+2} = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial G^n}{\partial r} \tag{3.52}$$

は $n+2$ 次元波動方程式を満たしていることが分かります。つまり奇数次のをは波面にエネルギーが集中しており、ホイヘンスの原理を適応出来ることが分かります (2 次的な波源を一意に決めることが出来ます)。奇数次元の場合、は

$$G^n = \left(-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\frac{n-1}{2}} G^{1D} \tag{3.53}$$

と書くことが出来ます。偶数次元の場合には、形式的には分数回微分が出てきてしまい単純には G^{1D} と結びつけられないことが分かります。一般に

$$G^n = -\frac{i\rho_0}{4}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{k}{r}\right)^{\frac{n}{2}-1} H^{(2)}_{\frac{1}{2}n-1}(kr) \tag{3.54}$$

と書くことが出来ます。ここで $H_n^{(2)}$ は第 2 種です[注 4)]。

問題 3.6

1. 1 次元は、3 次元空間で平面上の外力項が並んでいる $f(\boldsymbol{x}) = \delta(z)$ と解釈できる。この性質を利用し、1 次元を 3 次元で表現せよ。
2. 式 3.33 から、2 次元は初動が通過して以降振幅は小さくなるが、ずっと振幅がゼロにはならない事が分かる。ここで 2 次元問題を 3 次元問題として解釈し直してみよう。2 次元問題は $r = 0$ の線状に分布する $\delta(r)$ の外力による励起の問題だと考えられる。この性質を使い、3 次元をもちい、2 次元を導出しせよ。

注 4) 3.C 章 の式を使えば導出出来ます。

3.4 均質弾性体媒質の Green 関数

・初期応力を無視した運動方程式

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} s_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} + f_i, \tag{3.55}$$

を考えます。振幅 s_i が十分に小さい場合には、**等方均質弾性体**を仮定すると

$$\begin{aligned} \rho\partial_t^2 \boldsymbol{s} &= (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{s}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{s} + \boldsymbol{f} \\ &= \underbrace{(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{s})}_{P\text{ 波}} \underbrace{-\mu(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{s})}_{S\text{ 波}} + \boldsymbol{f} \end{aligned} \tag{3.56}$$

と書けます。右辺第 1 項は体積変化を表しており P 波に対応し、第 2 項はずりの変形を表し S 波に対応します。今後全空間で弾性定数が一様な無限媒質を考えていきます。

3.4.1 ポテンシャル表示: P 波と S 波の分離

見通しを良くするために、変位 $\boldsymbol{s}$ を Helmholtz の定理を使ってスカラーポテンシャルと ϕ[注 5)]、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ で

$$\boldsymbol{s} = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\psi}, \tag{3.57}$$

と表すことが出来ます。ここで注意しなくてはならないのはベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ には任意性が残る点です。ベクトルポテンシャルとして $\boldsymbol{\psi}' \equiv \boldsymbol{\psi} + \nabla\chi$ を考えると、$\nabla\times\boldsymbol{\psi}'$ は $\nabla\times\boldsymbol{\psi}$ と完全に等価であることが分かります。静磁場の場合には $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}$ と一般に取ります。電磁気の場合ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルが互いに関係していていますが、弾性体の場合には以後述べるように互いに独立しているために議論が単純になります。ベクトルポテンシャルに制約を課さずに P 波と S 波を分離することが出来ます。また任意性が残るということは、言い換えると問題毎に適切なベクトルポテンシャルを取ると見通しが良くなることも意味します。あとの章で述べる水平多層構造では $\nabla\times((0,0,\psi)^T + \nabla\times(0,0,\chi)^T)$ とベクトルポテンシャルを取ると (それぞれ、水平方向に変更する S 波 (SH) と鉛直広報に変更する S 波 (SV) に対応)、見通しが良くなります [5]。

式 3.56 に式 3.57 を代入し、div と rot をとると、

$$\begin{cases} \nabla^2\left(\rho\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - (\lambda+2\mu)\nabla^2\phi\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{f} \\ \nabla\times\nabla\times\left(\rho\dfrac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} + \mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\psi}\right) = \nabla\times\boldsymbol{f} \end{cases} \tag{3.58}$$

注 5) 定義から圧力と $p = -\kappa\nabla^2\phi$ と対応付けることが出来ます。

となります。ここで α は P 波速度、β は S 波速度でそれぞれ $\lambda + 2\mu = \rho\alpha^2, \mu = \rho\beta^2$ という関係を満たします[注 6)]。

第 2 式を見通しが良くなるよう式変形していきます。

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \nabla^2 \boldsymbol{\psi} \tag{3.59}$$

というベクトル解析の公式を使って式変形した後、$\nabla \times [\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi})] = 0$ [注 7)]である事とから

$$\nabla \times \nabla \times \left(\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \boldsymbol{\psi} \right) = \nabla \times \boldsymbol{f} \tag{3.60}$$

書き換える事が出来ます。

また、同様に外力 $\boldsymbol{f}$ も Helmholtz 分解

$$\boldsymbol{f} = \nabla \Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi} \tag{3.61}$$

と分解できるとします。そうすると運動方程式を満たすには

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi = \Phi \\ \qquad \rho \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\Psi} \end{cases} \tag{3.62}$$

であれば十分です[注 8)]。これらの式はそれぞれ、P 波と S 波の波動方程式に相当します。音波に対するを考える場合に比べてややこしいのは、撃力を考える場合に $\boldsymbol{f}$ がデルタ関数的であるため、ポテンシャルに対する外力の表示が単純でない (1 回積分したような形になっている) 点です。

注 6) 弾性定数の次元が密度 × 速度 ^{2} になることを覚えておくと便利です

注 7) 単純に $\nabla \times (\nabla$ スカラー $)$

注 8) 解としては並進運動と剛体回転の項 (問題 3.7 参照) もありますが、無限小の仮定に反するので落とすことができます

問題 3.7

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi \right) = 0 \tag{3.63}$$

について考えていきます。

1. $\nabla^2 \phi_0(\boldsymbol{x}, t) = 0$ を満たす ϕ_0 を求めよ。
2. $\phi + \phi_0$ も式 3.63 の解であることを示せ。
3. ϕ_0 が式 3.56 を満たす場合には、ϕ_0 が並進運動を表すことを示せ。
4. ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}_0$ についても同様の議論を考える。

$$\boldsymbol{\psi}_0 = \begin{pmatrix} 0 & r_{xy} & r_{xz} \\ -r_{xy} & 0 & r_{yz} \\ -r_{xz} & -r_{yz} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

というベクトルポテンシャルを考える。スカラーポテンシャル同様の議論から、剛体回転も支配方程式を満たすことを示せ。実際には 1 次のオーダーまでを議論するためにこれらの項は落として考える。

3.4.2 爆発震源の場合

弾性波の励起の問題は一般に複雑です。今後の見通しを良くするために、スカラポテンシャルのみで表現できる単純な例として、爆発震源が励起する弾性波について考えていきます。この単純な例は、”近地項”と”遠地項”という大切な考え方を理解する上で手助けになるでしょう。

まずはポテンシャル ϕ について G^{ϕ} を考えていきましょう。圧力 $\delta(t)$ が与えられた場合のは

$$\frac{\partial^2 G^{\phi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\xi},\tau)}{\partial t^2} - \alpha^2 \nabla^2 G^{\phi} = -\frac{\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)}{\rho_0} \tag{3.65}$$

を満たします。

$$G^{\phi}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau) = -\frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)\mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\mid}\delta\left(t-\tau-\frac{\mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\mid}{\alpha}\right) \tag{3.66}$$

爆発震源: 遠地項と近地項

一般の弾性体に対する場合に問題を解くと、煩雑で特徴を掴みづらいためまずは単純な場合について考えていきます。原点 $\boldsymbol{x}_0$ に十分に小さい圧力源 (半径 Δr の微小球) があり時刻 0 で Δp だけ増圧したとします[注 9)]。

$$p^{\mathrm{source}}(\boldsymbol{\xi},\tau) = \Delta p(1-H(r_{\xi}-\Delta r))H(\tau) \tag{3.67}$$

と書くことが出来ます。ここで r_{ξ} は原点から $\boldsymbol{\xi}$ までの距離 (図 3.2)、 $H(t)$ へビサイドの階段関数[注 10)]です。ずりの変形はないために P 波のポテンシャル ϕ だけ考えれば十分です。ϕ はとの畳込みで

$$\begin{aligned}\phi &= \int_{-\infty}^{\infty} G^{\phi}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\xi},\tau)p^{\mathrm{source}}(\boldsymbol{\xi},\tau)dV(\boldsymbol{\xi})d\tau \\ &= -\frac{\Delta p \Delta r^3}{3(\lambda+2\mu)}\frac{H\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)}{r}\end{aligned} \tag{3.68}$$

です。

変位 $\boldsymbol{s}$ はポテンシャルの勾配で表現出来るため

$$s_r = \frac{\Delta p \Delta r^3}{3(\lambda+2\mu)}\left(\underbrace{\frac{H(t-r/\alpha)}{r^2}}_{\text{近地項}} + \underbrace{\frac{\delta(t-r/\alpha)}{\alpha r}}_{\text{遠地項}}\right). \tag{3.69}$$

まずは近地項[注 11)]を考えていきましょう。式を見ると明らかに永久変位に対応しています。中心で増圧しその影響で永久変位が生じたと (地殻変動) 解釈できます。$t=\infty$ での

注 9) 応力と圧力の符号の定義の違いからマイナスがつきます。
注 10) $H(t)=1, t \geq 0, H(t)=0, t<0$
注 11) 厳密に言うと intemidiate term に対応します。

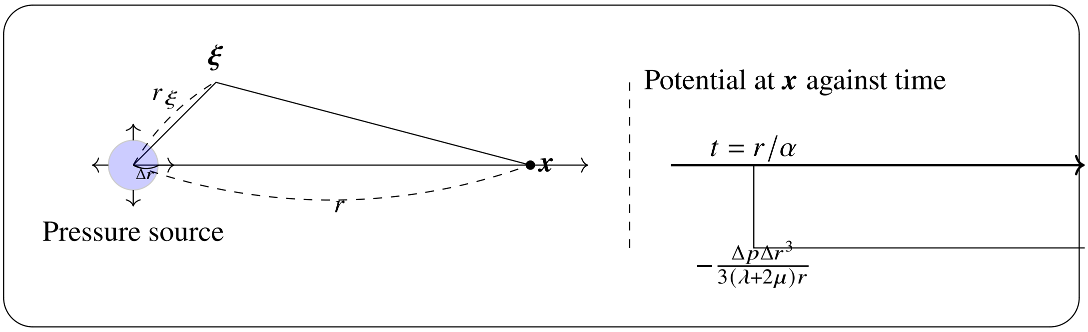


図 3.2　圧力源の増加に伴う P 波の励起を示した模式図。

変位を考える場合に式 3.65 は、

$$\nabla^2 G^{\phi} = -\alpha^2 \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \tag{3.70}$$

となり、解は点電荷が作る静電場のアナロジーとして考えることが出来ます。これは支配方程式が同じためです。

一方遠地項はデルタ関数が伝播するため、波が通った後には変位が 0 に戻ることが分かります。振幅は $1/r$ で減少するため、距離 r の球殻でエネルギーフラックスを積分すると距離によらず一定であることが分かります。これは波動によって伝播されるエネルギーが保存することに起因しています[注 12)]。

問題 3.8

1. 式 3.68 を導出せよ。
2. 式 3.69 を導出し、近地項と遠地項を図示せよ。

注 12) エネルギーフラックスについては後の章を参照のこと。

3.4.3 3 次元弾性体の Green 関数

一般的な外力に対する弾性応答を考える場合にはを使った手法が有効です。ここでは、弾性体のを求めるためには、単位力を与えた時にどう変位するか考える必要がいきましょう。x 方向に撃力 $X_0(t)$ が与えられた場合を考えてみましょう。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{G} = \alpha^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}) - \beta^2(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{G}) + [\delta(\boldsymbol{x})X_0(t), 0, 0] \tag{3.71}$$

外力は Helmholtz の定理から、スカラーポテンシャル Φ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\Psi}$ で

$$[\delta(\boldsymbol{x})X_0(t), 0, 0] = \nabla\Phi + \nabla\times\boldsymbol{\Psi} \tag{3.72}$$

と書くことが出来ます。ここで両辺 div を取ってみましょう。

$$\nabla^2\Phi = X_0(t)\frac{\partial\delta(\boldsymbol{x})}{\partial x} \tag{3.73}$$

と書くことが出来ます。ここで、式 3.3.3 からスカラーの場合のを陽に書き下すと

$$\nabla^2\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right) = \delta(\boldsymbol{x}), \tag{3.74}$$

となります。2 つの式を比較することによって[注 13)]

$$\Phi = -\frac{X_0(t)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}\,|}$$

となることが分かります。

次に両辺の rot を取ってみましょう。ここでベクトルポテンシャルには自由度が 1 つあるため、簡単のために $\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi} = 0$ となる (クーロンゲージ) 条件を考えます。そうすると

$$-\nabla^2\boldsymbol{\Psi} = X_0(t)\left(0, \frac{\partial\delta(\boldsymbol{x})}{\partial z}, -\frac{\partial\delta(\boldsymbol{x})}{\partial y}\right) \tag{3.75}$$

ϕ と同様にスカラーのと見比べると、

$$\boldsymbol{\Psi} = \frac{X_0(t)}{4\pi}\left(0, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}\,|}, -\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|\,\boldsymbol{x}\,|}\right) \tag{3.76}$$

となる事が分かります。

G も同様 Helmholtz の定理から

$$G = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\psi} \tag{3.77}$$

とスカラポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ と表せます。それぞれポテンシャルごとに波動方程式を満たします。そのため例えばスカラーポテンシャルは

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \alpha^2\nabla^2\phi + \Phi \tag{3.78}$$

注 13) 詳細は斎藤正徳・地震波動論 [5] 参照のこと。

という式を満たします。ϕ は、3 次元スカラーと励起項 Φ の畳み込み積分で (ここで、この章の最初の節の説明を思い出しましょう。)

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{(4\pi)^2(\lambda+2\mu)} \iiint_V X_0\left(t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}{\alpha}\right) \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} \frac{\partial}{\partial \xi_0} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} dV(\xi) \tag{3.79}$$

と書けます。ここで $\boldsymbol{\xi}$ は励起源の微少要素の位置を、ξ_0 はその x 座標を表すとします。ここで $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}| = \alpha\tau$ という座標変換を考えます。そうすると

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{(4\pi)^2(\lambda+2\mu)} \int_0^\infty \frac{X_0(t-\tau)}{\tau} \left(\iint_S \frac{\partial}{\partial \xi_0} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} dS\right) d\tau, \tag{3.80}$$

と書き直すことが出来ます。

ここで $\iint dS$ に注目してみましょう。図 3.3 で示した円は、半径 $\alpha\tau$ の球殻に対応します。式の形をよく見ると $1/r$ のポテンシャルの表面積分の形をしているため、重力ポテンシャルの計算をアナロジーとして考えることが出来ます。球殻上に質量が一様に分布している場合の、原点 $\boldsymbol{O}$ でのポテンシャルを 1 回微分 (つまり重力の x 成分) に相当します。重力の場合を思い出すと分かりますが、点 $\boldsymbol{O}$ が球殻内に含まれる場合には重力は 0 となり、含まれない場合には、質量が仮想的に質点 $\boldsymbol{x}$ に集中すると考えることが出来ます。この場合分けした解をを代入すると

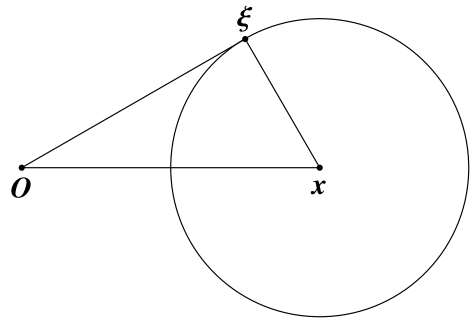


図 3.3　ポテンシャル ϕ を評価する際の座標。

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right)\int_0^{r/\alpha} \tau X_0(t-\tau)d\tau \tag{3.81}$$

となることが分かります。

ベクトルポテンシャルも同様に計算できます。まとめると

$$\begin{cases} \phi(\boldsymbol{x},t) = -\dfrac{1}{4\pi\rho}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r}\right)\displaystyle\int_0^{r/\alpha} \tau X_0(t-\tau)d\tau \\ \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t) = \dfrac{1}{4\pi\rho}\left(0, \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{r}, -\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{r}\right)\displaystyle\int_0^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau)d\tau \end{cases} \tag{3.82}$$

となります。

$\boldsymbol{s} = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\psi}$ の関係式に代入し、多少煩雑な計算をすると

$$\begin{aligned} s_i(\boldsymbol{x},t) = &\frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x}\frac{1}{r}\right)\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau X_0(t-\tau)d\tau \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2 r}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x}\right) X_0\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho\beta^2 r}\left(\delta_{i1} - \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x}\right) X_0\left(t-\frac{r}{\beta}\right), \end{aligned} \tag{3.83}$$

という関係が得られます[注 14)]。

$X(t)$ がインパルシブで、その時定数が $r/\beta - r/\alpha$ より十分に短い場合、第一項が近地項を第二項は P 波の遠地項を、第三項は S 波の遠地項を表します。

ここで近地項と遠地項についてもう少し詳しく考えてみましょう。２つのタイムスケールをもとに、近いか遠いかを判断することができます。１つ目のタイムスケールは、$X(t)$ の特徴的時間、２つ目は P-S 走時差 $r/\beta - r/\alpha$ です。簡単な計算 (問題 3.9 参照) から、$X(t)$ の特徴的時間が P-S 走時差より十分に小さいときには第二項と第三後は $1/r$ に比例し、第一項は r^{-2} に比例します。第一項は遠くで無視でき、近くでは地殻変動に対応する静的な変位を表している事が分かります。一方 $X(t)$ が P-S 走時差より十分に長い場合すべての項が $1/r$ に比例し、全ての項が重要になってきます。詳しくは次の章で学びますが、実際の地震を考える場合にはもう少し複雑で、遠地項・近地項の他に中間項が出てきますが、本節で導出したを用いて理解することが出来ます。

問題 3.9

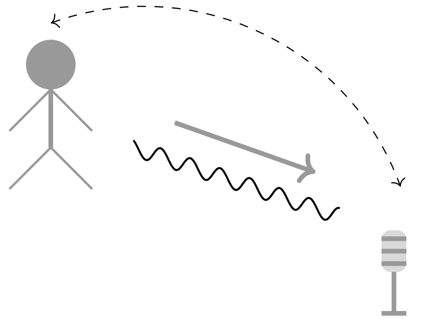
1. $X(t) = \delta(t)$ の場合に、近地項 (式 3.83 の右辺第一項) を評価しなさい。
2. $X(t) = H(t)$ の場合に、近地項 (式 3.83 の右辺第一項) を評価しなさい。ここで H は Heaviside の階段関数とする。

問題 3.10

1. 式 3.82 中の $\nabla\phi$ を評価し、P 波変位の遠地項を計算せよ。
2. 式 3.83 を導け。

注 14) 計算は煩雑ですが、基本的に $1/r$ の微分と、$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ という関係を使って愚直に計算すると導出できます。

3.5 音波の相反定理



この節では、音波のについて、どの様な物理的要請から成り立つのか、できるだけ分かりやすく解説していきます。

外力 $F(\boldsymbol{x},\omega)$ という力を系に及ぼし、$P(\boldsymbol{x},\omega)$ という圧力変動が生じたとします[注 15)]。

$$\nabla\cdot\frac{\nabla P(\boldsymbol{x},\omega)}{\rho_0(\boldsymbol{x})}+\frac{\omega^2}{\kappa(\boldsymbol{x})}P(\boldsymbol{x},\omega)=F(\boldsymbol{x},\omega)\equiv\mathcal{F}\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\rho_0}\right)\right]. \tag{3.84}$$

形式的ですが PF という量[注 16)]を考えます。

2 組の音場 $(P_1, F_1$ と $P_2, F_2)$ を考えます。それぞれ

$$\nabla\cdot\frac{\nabla P_1(\boldsymbol{x},\omega)}{\rho_0(\boldsymbol{x})}+\frac{\omega^2}{\kappa(\boldsymbol{x})}P_1(\boldsymbol{x},\omega)=F_1(\boldsymbol{x},\omega), \tag{3.85}$$

$$\nabla\cdot\frac{\nabla P_2(\boldsymbol{x},\omega)}{\rho_0(\boldsymbol{x})}+\frac{\omega^2}{\kappa(\boldsymbol{x})}P_2(\boldsymbol{x},\omega)=F_2(\boldsymbol{x},\omega), \tag{3.86}$$

という関係を満たします。ここで 2 通りの波動場を考えます。

ここで 2 つの量 (i) F_1P_2 と (ii) F_2P_1 の差を考えます。式 3.85 に P_2 をかけ、式 3.86 に P_1 をかけて差を取り (interaction quantity と呼ばれる量 [(2)])、領域 Σ 内で体積積分し整理すると、

$$\int_V (P_2F_1-P_1F_2)dV=\int_\Sigma \frac{1}{\rho}(P_2\nabla P_1-P_1\nabla P_2)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}d\Sigma, \tag{3.87}$$

と書けます[注 17)]。ここでは斉次の境界条件 (境界 Σ で $P=0$ もしくは $\nabla P=0$) を考えます。そうすると式 3.87 の右辺は消えます。つまり変形の順番によらないことが分かります。$F_1=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)$ とし、$F_2=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2)$ となるを考えると、

$$G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\omega)=G(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1,\omega), \tag{3.88}$$

という空間対称性が得られます。この式はと呼ばれ理論的な考察だけではなく、実際に地震波を計算する場合に良く使われる重要な定理です。

実際の地球の場合には、地表を $p=0$ とみなすのは良い近似です。()

注 15) 移流項を考えず速度も微小である状況を考えているので、圧力の摂動だけで状態を記述することが出来ます。

注 16) Fourier 成分のかけ算のため P と F のたたみ込み積分と対応します。外力がした仕事の時間積分を

注 17) ベクトル解析に詳しければ、グリーンの定理 (問題 3.11) と呼ばれる式と対応している事が分かります。また、音波に関してこの関係式を最初に示したのは Lord Rayleigh[(2)] です。Lord Rayleigh は Helmholtz の定理と記したそうですが、実際には Helmholtz による記述は見つかっていないそうです。また相反定理には covolution 型 (ここで説明した形式) と、一方を時間反転した correlation 型のがあります [(2), (3)]。correlation 型のは、後の章で述べる地震波干渉法の理論的な裏付けとして重要な役割を果たします [(4)]。

† 少し数式の操作が抽象的なため、物理的な意味合いがわかりづらいと感じると思います。ここでは物理的な意味づけについてもう少し踏み込んでみます。ただし少し先の章 (8 章) の内容を先取りした内容のため、以下は読み飛ばしてかまいません。

まずは、支配方程式を線形の偏微分演算子として抽象化します。

$$\mathcal{L} \equiv \nabla \cdot \frac{\nabla}{\rho_0(\boldsymbol{x})}, \tag{3.89}$$

ここで任意の関数 u,v を考えます。

$$\left(\int u^* \mathcal{L} v dV\right)^* = \int u^* \bar{\mathcal{L}} v dV, \tag{3.90}$$

を満たす演算子 $\bar{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ とエルミート共役な演算子と呼びます。

$$\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}, \tag{3.91}$$

という条件をみたすとき $\mathcal{L}$ をエルミート演算子もしくは自己随伴演算子と呼びます[注 18)]。

エルミート演算子には重要な特徴が二つあります[注 19)]:(i) 固有値が実数となる、(ii) 固有関数が直交し完全系をなします。そのため任意の関数を固有関数で展開することが出来ます。

演算子 $\mathcal{L}$ に対して固有値 λ_n と固有関数 u_n

$$\mathcal{L} u_n = -\frac{\lambda_n}{\kappa(\boldsymbol{x})} u_n \tag{3.92}$$

を考えます。

$$G = \sum_n a_n u_n \tag{3.93}$$

とを固有関数で展開し、波動方程式に代入すると

$$\sum \left(\frac{\omega^2 - \lambda_n}{\kappa(\boldsymbol{x})}\right) a_n u_n = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1), \tag{3.94}$$

と書くことが出来ます。固有関数の直交性

$$\int \frac{u_n^*(\boldsymbol{x}) u_{n'}(\boldsymbol{x})}{\kappa(\boldsymbol{x})} dV = \delta_{nn'} \tag{3.95}$$

から、

$$a_n = \frac{u_n(\boldsymbol{x}_1)}{\omega^2 - \lambda_n} \tag{3.96}$$

$$G = \sum \frac{u_n(\boldsymbol{x}_1) u_n(\boldsymbol{x}_2)}{\omega^2 - \lambda_n} \tag{3.97}$$

注 18) 1 次元問題の場合には、Sturm-Liouville 型と呼ばれる常微分方程式に帰着できます。水平成層構造の場合には変数分離することによって,Sturm-Liouville 型に書き直すことが出来ます。色々と性質が詳しく調べられているために、取り扱いやすい特徴があります。

注 19) エルミート行列を思い出して下さい

と書くことが出来ます。この式から、が相反性を満たすことが分かります。またこの議論から一般に自己随伴演算子として記述出来る場合には、固有関数が直交性・完全性を満たすために相反性が成り立つことが分かります。例えば、音波でも平均風がある場合には、風上側に音波が伝播する場合と、風下側に伝播する場合に平均風の影響の分だけ走時が変わるため相反性が満たされません。この場合には、支配方程式が自己随伴の性質を満たしていないことが分かります。

またエルミート演算子の定義式を見ると、interaction quantity を調べることは、自己随伴性が成り立つか調べていることになることが分かります。行列の形に書き直すと、エルミート演算子はまさにエルミート行列と対応しており、種々の性質が理解しやすくなると思います[注 20)]。

問題 3.11

1. Green の定理を用いて、式 3.87 を導きなさい。ヒント: $\nabla \cdot (F\boldsymbol{u}) = F(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} \cdot \nabla F$ という関係と、ガウスの発散定理を使う。

注 20) 例えば、エルミート行列が、直交行列で対角化出来、固有値が実数であることが対応します。

3.5.1 †Interaction quantity について物理的な意味

Interaction quantity を評価すると、を導出できます。ただ、物理的にはどういった意味があるのか、いまいちはっきりとしません。ここでは、interaction quantity について、変形の順番を変えると外力がする仕事がどう変わるかに注目して考えてみましょう。

外力が流体にする仕事の総量

はじめに、外力が単位時間あたりに流体に及ぼす仕事について評価します。領域 V に外力が及ぼす単位時間あたりの仕事 $w(t)$ は

$$w(t) = \int_V \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} dV \tag{3.98}$$

となります。$\boldsymbol{v}$ は粒子速度です。この章では変数を圧力 p で取っているので、$\boldsymbol{v}$ ではなく p での表式を考えましょう。運動方程式から

$$\rho_0 \partial_t \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = -\nabla p(\boldsymbol{x}, t) \tag{3.99}$$

となります。p の 1 回時間に関して積分した関数を $h(t)$ とすると $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla h(t) \tag{3.100}$$

と書けます。$\nabla \cdot (F\boldsymbol{u}) = F(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} \cdot \nabla$ F という関係式から、

$$w(t) = \int_V \left(\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{f}}{\rho_0} \right) \right) h dV \tag{3.101}$$

と書くことが出来ます。ここで $w(t)$ の全時間での積分を考えましょう。一般化パーセバルの等式[注 21)]から

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_V \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\boldsymbol{x}, \omega) \frac{P(\boldsymbol{x}, \omega)}{i\omega} d\omega dV$$

となる事が分かります。ここで F は $\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{f}}{\rho_0} \right)$ のフーリエ成分で、$P(\omega)$ は p のフーリエ成分です。まとめると、フーリエ成分 $F^* P/(i\omega)$ を周波数領域で積分すると、外力が流体に及ぼした仕事の総量を見積もることが出来ます。

注 21) 一般化パーセバルの等式は、任意の関数 f と g に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) G(\omega) d\omega \tag{3.102}$$

と言う等式が成り立つことを示しています。左辺は相互相関関数のラグが 0 の場合と解釈でき、cross spectrum の逆変換を考えるとでこの式を導出出来ます。

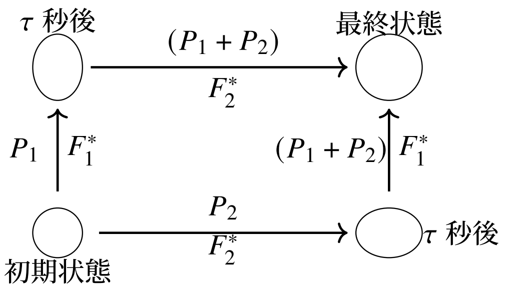


図 3.4 二つの異なった変形経路。ある変形について 2 つのことなった経路を考えます。

力を加える順番を変えてみる

(i) 最初に F_1 を加えて音波を出し、τ 秒後に F_2 を加える場合 (ii) 最初に F_2 を加えて音波を出し、τ 秒後に F_1 を加える場合を比較するために、$F_1^*P_2 - F_2^*P_1$ 注 22)。その後の式変形は同様です。Hooke 則の章で、弾性定数の対称性を考える際に、変形の経路依存性によらないという対称性を考えました (この対称性自体相反関係として知られています)。この対称性を動的問題に一般化した場合に、音波のの相反性が導出されることを示しています。

注 22) interaction quantitiy と少し違いますが、こう定義した方が物理的に分かりやすいかなと思います。数学的には同じです。

3.6 表現定理: ホイヘンスの原理との関係

地震波動伝播を考える上で重要になってくるのがです。では波面を解釈することしか出来ませんが、ではその振幅を振幅を見積もることも出来ます。弾性体の取り扱いは複雑なので、まずは音響場 (スカラー) から見ていきましょう。

ここで F_1 は領域 V 内では 0 だとし (P_1 を P と書き換えます)、$F_2 = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1)$ という状況 ($P_2 = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \omega)$) を考えます。

$$P(\boldsymbol{x}_1, \omega) = \int_\Sigma \frac{1}{\rho}(P(\boldsymbol{x}, \omega)\nabla G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \omega) - G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \omega)\nabla P(\boldsymbol{x}, \omega)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\Sigma. \tag{3.103}$$

と書くことが出来ます。圧力勾配を変位 ($\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \omega)$) に書き直すと

$$P(\boldsymbol{x}_1, \omega) = \int_\Sigma \frac{1}{\rho}\left[P(\boldsymbol{x}, \omega)\nabla G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \omega) - \rho\omega^2 G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \omega)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \omega)\right] \cdot \hat{\boldsymbol{n}} d\Sigma. \tag{3.104}$$

と書き直せます。ある境界 Σ で囲まれた領域を考えると、その境界での変位と、その微分を知ることができれば、その内側についての波動場をすべて知ることが出来ることを表しています。

との対応を考え、仮想震源を Σ 上に移すためにを使い整理すると

$$P(\boldsymbol{x}_1, \omega) = \int_\Sigma \frac{1}{\rho}\left[P(\boldsymbol{x}, \omega)\nabla G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}, \omega) - \rho\omega^2 G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}, \omega)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \omega)\right] \cdot \hat{\boldsymbol{n}} d\Sigma. \tag{3.105}$$

となります。

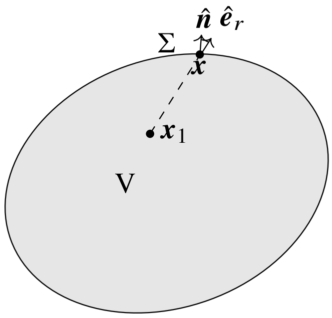


図 3.5　考えている流体の空間構造。

問題 3.12

の性質を理解するために、簡単のため 1 次元問題を考える。の章で述べたように、3 次元問題で考えると、Σ の領域として $0 \leq x \leq L$ という板状の領域を考え、P は x のみの変数となる場合に相当する。

1. この場合は
$$P(x_1, \omega) = \left[\frac{1}{\rho(x)} \left\{ P(x, \omega) \left(\frac{\partial}{\partial x} G^{1D}(x_1, x, \omega) \right) - G^{1D}(x_1, x, \omega) \frac{\partial P(x, \omega)}{\partial x} \right\} \right]_{x=0}^{L} \tag{3.106}$$
と書けることを示せ。
2. 均質媒質の場合 $\rho(x) = \rho_0, k = \omega/\alpha_0$ とすると、1 次元 G^{1D} は
$$G^{1D}(x_1, x, \omega) = \frac{\rho_0 i}{2k} e^{-ik|x_1 - x|} \tag{3.107}$$
となる。$P(x, \omega) = P_0(\omega) e^{-ik|x|}$ という進行波解を考える。この場合、が成り立つことを示せ。

は、境界からの波の出入りを調べると、その内部の波動場を完全に再現出来ることを示していることが分かる。

ここで単純化のため原点を $\boldsymbol{x}_1$ にとり極座標を考え、が $G(r)$ のように r のみの関数である場合を考えてみましょう。$\nabla G = \partial_r G\hat{\boldsymbol{e}}_r, \nabla G = \partial_r G\hat{\boldsymbol{e}}_r$ と書けることから、

$$P(\boldsymbol{x}_1, \omega) = \int_\Sigma \left\{ \frac{1}{\rho} P \frac{\partial G(r)}{\partial r} (\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) - \omega^2 G(r)(\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}) \right\} d\Sigma, \tag{3.108}$$

と書くことが出来ます。右辺第 1 項は dipole に対応し、第 2 項は monopole に対応します。では波面の伝わり方のみを予測出来ますが、ではこれらの 2 項の放射パターンの組み合わせで振幅を見積もることが可能となります。光学の分野では、Fresnel-Kirihifop の回折定理として知られています。

3.6.1 ホイヘンスの原理との関係

まず平面波が上方に伝播している状況で、波面と平行な平面での境界を考えてみましょう (図 3.6。同様境界面に 2 次波源を配置した状況と解釈できます。違いは、2 次波源からの放射が一様ではなく、上方に波が放射されている点です。これはダイポールとモノポールの組み合わせから、図のような放射パターンになることが分かります。

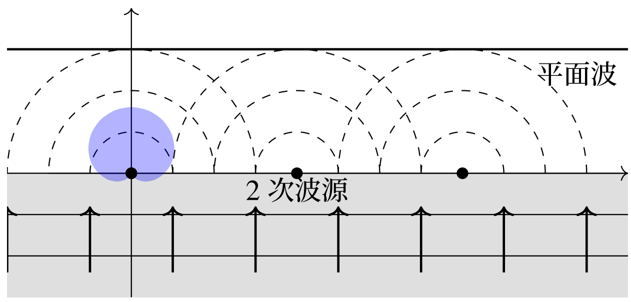


図 3.6　平面波の波面と平行な境界面を考えた場合。

次に進行する平面波の波面と境界面が直交する場合を考えます (図 3.7)。波面と境界面が平行な場合に比べて分かりづらいですが、順を追って考えてみましょう。各 2 次波源の放射パターンは、ダイポールである事が分かります。波を励起するタイミングは、波面が通過するタイミングと同時です。そのため、全ての 2 次波源からでた波面が重なり、平面波を校正することが分かります。媒質中の波の伝搬速度と、2 次波源のから波が放出されるタイミングが一致しているので、ショックフロントが境界面に直交しながら進行しているとも解釈できます。

をの拡張と解釈すると、物理的な意味合いは理解できたと思います。しかし、数式をよく見ると色々と疑問がわいてきます。たとえば考えている領域で斉次の境界条件を満たさない (例えばスピーカーのように境界で応力・変位を与えている場合) は、がを満たさずに破綻をするのでは無いか？ というものが典型的な例です。実はこの問題は回避すること

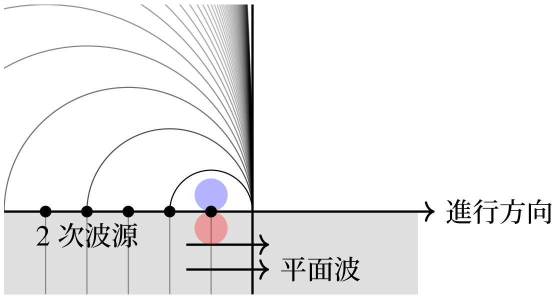


図 3.7　平面波の波面と境界面が直交する場合。

が出来ます。それは考えている波動場の組み合わせ $((F_1, P_1)$ と $(F_2, P_2))$ は領域 V 内では同じ状況設定を考えているが、その外側は必ずしも同じとは限りません。

まずは単純な場合として、領域 V として球場の領域を考えてみましょう。球表面では自由表面 (斉次の境界条件を満たす) を満たしているとします。この場に、として自然に V の境界上で斉次の境界条件を満たしているものを考えると思います。しかし、必ずしもそう選ぶ必要は無く、領域外にも媒質が無限に続いている状況を考え、全無限 (3.3.3 節参照) を選んでも問題ありません。

次に球面上で斉次の境界条件を満たさない (例えば一部でスピーカーのような強震動源があるとします) 場合を考えます。この場合でもとして全無限 (基本解・主要解とも呼ばれます) を選ぶことができ、問題無くを適応でます。つまり同様にを適応することが出来ます [6]。

言い換えると境界の外側については何も知らなくても、境界 Σ 上での変位・圧力さえ分かっていれば、その内側の圧力場・変位場は完全に表現出来ます[注 23)]波動場は一見とても自由度が高いように見えますが、その境界の情報のみから内部を再構築できることから、自由度は意外に少ないことが理解できます。また、一度を推定できれば、地表の波動場から地中の波動場を知ることが出来ます。地中の波動場を完全に再現することができれば、地中の任意の地点での空間微分と時間微分の比から地中の地震波速度構造を知ることが出来ます。物理探査の分野におけるイメージングの原理です。表面の情報から内部を再構築出来るからこそ可能となります。

ここでを知るためには地中の地震波速度構造を知ることが必要です。一見循環論法に見えますが、多くの場合” 初期モデル” からを推定することによって、地震波速度構造をアップデートすることが可能です。実際に地球内部の構造を調べる場合は、原理的にはこういった手続きを取っていることになります。

注 23) 表面の情報からだけで内部全体が決定できる形式を一般にと呼びます。これまでに目にしたであろう例と指定は、コーシーの積分定理がその一例です。積分路 C ないで正則な複素関数 $f(z)$ を考えると、領域内の任意の点 z_0 で

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \tag{3.109}$$

となります。C の境界に沿った積分から、任意の内部の点の情報が得られる事が分かると思います。

問題 3.13

図 3.6,3.7 で、境界面で励起された平面波の振幅を考えてみましょう。

1. 図 3.6 で円筒波の波面が強調する条件を考えてみましょう。$x = 0$ で励起された、半径 r の球面波を考えた場合、$x = 0$ 近傍で波面を 2 次の精度で近似しなさい。
2. $x = \delta x$ に位置する 2 次波源が励起した波との干渉を考えます。δx が r に比べて十分に小さいとき、$x = 0$ での 2 つの球面波の位相差が $\pi/4$ 程度となる δx を求めなさい。
3. いま 2 次元を考えているため、波面での振幅は $(kr)^{-1/2}$ に比例します。$x = \pm\delta x$ の範囲内の 2 次波源の寄与を考える事で、2 次的に励起波面の振幅を見積もりなさい。
4. 同様に、図 3.7 の状況で 2 次的に励起された平面波の振幅を見積もりなさい。

3.7 弾性体の相反定理

ここでは音波と同様に弾性体のを考えていきましょう。

音波のでは、仕事がその変形の履歴に寄らない (式 3.87) ことが物理的な本質でした。弾性体に対しても、二通りの変形を考えると、その際の仕事が等しくなります。この関係から、Betti の定理として知られている関係式を導出できます[注 24)]。

3.7.1 Betti の定理

音波の場合と同様に二通りの変形を考えます。ここで二組の弾性波動場: 外力 $\boldsymbol{f}_1$ によって励起された弾性波動場 $\boldsymbol{s}_1$ と、外力 $\boldsymbol{f}_2$ によって励起された弾性波動場 $\boldsymbol{s}_2$ を考えます。音波の場合同様、それぞれが満たす運動方程式に、もう一方の変位場との内積をとり体積積分します。

$$\int_V \left\{\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{x},t)\cdot(\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x},\tau)-\rho\partial_t^2\boldsymbol{s}_2)-\boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{x},\tau)\cdot(\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x},t)-\rho\partial_t^2\boldsymbol{s}_1)\right\}dV \tag{3.110}$$

$$=\int_\Sigma \{[\boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{x},\tau)\cdot\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{x},t))\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]-[\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{x},\tau))\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]\}\,d\Sigma \tag{3.111}$$

この式を導出する際に弾性定数の対称性 $C_{ijkl}=C_{klij}$[注 25)]から

$$\sum_{ij}E_{ij}T'_{ij}=\sum_{ij}E'_{ij}T_{ij} \tag{3.112}$$

が要請されます。Betti のと呼ばれる関係です。

この式を時間積分すると ($\tau=\tau-t$ と変数変換します)

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_V[\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x},\tau-t)-\boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{x},\tau-t)\cdot\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x},t)]dV \tag{3.113}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_\Sigma\{[\boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{x},\tau-t)\cdot\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{x},t))\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]-[\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{x},\tau-t))\cdot\hat{\boldsymbol{n}}]\}\,d\Sigma, \tag{3.114}$$

という関係が得られます。ここでは問題 3.14 の関係式を用いました。

注 24) 詳細は斎藤正徳・地震波動論 [5] 参照のこと。

注 25) 前章で述べたように、弾性エネルギーが変形の経路によらないという条件から導出できます。

問題 3.14

$s_1(\infty) = s_1(-\infty)$ と $s_2(\infty) = s_2(-\infty)$ という条件を用いて、時間に関して部分積分することによって、有限の時間 τ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ s_1(\boldsymbol{x}, t) \cdot \partial_t^2 s_2(\tau - t) - s_2(\boldsymbol{x}, \tau) \cdot \partial_t^2 s_1(\tau - t) \right\} dt = 0. \tag{3.115}$$

となることを示しなさい。

3.7.2 相反定理

Betti の定理では 2 組の力と変位のくみあわせを考えました。そこで $\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1)$ と対応する変位 $G_{lm}(\boldsymbol{x}, \tau; \boldsymbol{x}_1, 0)$ と $\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_2)$ と対応する変位 $G_{lm}(\boldsymbol{x}, \tau; \boldsymbol{x}_2, 0)$ の組み合わせを考えてみまそう。この場合、ベクトルの場合の斉次境界条件 (境界 Σ 上で $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}' = 0$ または $\boldsymbol{T}_n[\boldsymbol{s}] = \boldsymbol{T}_n[\boldsymbol{s}'] = 0$) を考えると右辺が 0 になります。の時間に対する並進対称性とも合わせて考えると、弾性体のに対する

$$G_{lm}(\boldsymbol{x}_2, \tau; \boldsymbol{x}_1, 0) = G_{ml}(\boldsymbol{x}_1, \tau; \boldsymbol{x}_2, 0) \tag{3.116}$$
$$G_{lm}(\boldsymbol{x}_2, \tau_2; \boldsymbol{x}_1, \tau_1) = G_{ml}(\boldsymbol{x}_1, -\tau_1; \boldsymbol{x}_2, -\tau_2) \tag{3.117}$$

が得られます。ここで震源での力の向きと、観測点の変位の向きが変わっていることに注意します。

3.8 弾性体の場合の表現定理

Betti の定理 (式 3.112) に、s_2 として $G_{pm}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\eta}, 0)$ を選ぶことにします[注 26]。これは外力が時刻 0、点 $\boldsymbol{\eta}$ に m 方向に力が加えられた時の変位の p 成分です。ここで、時間に対しての並進対称性を考え、τ に関してフーリエ変換し式をまとめると

$$\begin{aligned} s_m(\omega, \boldsymbol{x}) = & \int_V f_p(\omega, \boldsymbol{\eta}) \cdot G_{pm}(\omega, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x}) dV(\boldsymbol{\eta}) \\ & + \int_\Sigma \{ G_{pm}(\omega, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x}) T_{pq}(\boldsymbol{u}(\omega, \boldsymbol{\eta})) \hat{n}_q - s_q(\omega, \boldsymbol{\eta}) T_{pq} \left[(\boldsymbol{G}_m(\omega, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x}) \right] \hat{n}_q \} d\Sigma(\boldsymbol{\eta}), \end{aligned} \tag{3.118}$$

($\boldsymbol{G}$ は m 方向に力が働いたときの) となります。ここで観測点 $\boldsymbol{x}$ における変位 $\boldsymbol{s}$ を求めるために、観測点 $\boldsymbol{x}$ に外力が働いたを用いているのでとてもわかりづらい形となっています。1 つ目の変数 (観測位置に対応) で積分しているために、数式としては分かるが、物理

注 26) Aki and Richards で腑に落ちない場合は、日下部・亀 (2015)[(6)] が参考になる。

的な意味を捉えづらくなっています。そこでは斉次の境界条件を満たしている場合を考え、を使って式を整理すると分かりやすい形になります[注 27)]。最終的に式をまとめると

$$
\begin{aligned}
s_m(\omega, \boldsymbol{x}) = &\int_V f_p(\omega, \boldsymbol{\eta}) G_{np}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) dV(\boldsymbol{\eta}) \\
&+ \int_\Sigma \{ G_{mp}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) T_p(\boldsymbol{\eta}) - s_p(\boldsymbol{\eta}) C_{pqkl} \partial_l G_{mk}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) \hat{n}_q \} d\Sigma(\boldsymbol{\eta}), \qquad (3.119)
\end{aligned}
$$

ここで $\hat{\boldsymbol{n}}$ は境界面での法線ベクトルです。

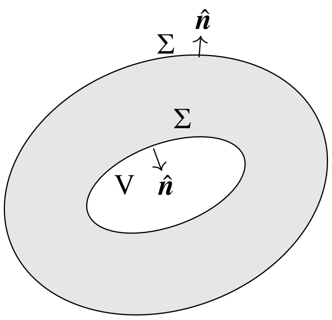


図 3.8　考えている弾性体の空間構造。

は地震波の励起を考える上でとても重要となります。弾性体の一部を切り抜いても、その境界の変位と応力の状態さえ分かれば、その外側の弾性体の運動には何ら影響を与えない事をは保証してくれます。例えば地震は地球の一部が脆性破壊する現象を考えてみましょう。断層付近は弾性体では表現できませんが、それを取り囲むような閉局面で仮想的に切り抜く操作を考えてみましょう。そうすると、 境界面上での応力・変位さえ分かれば、弾性体内の運動を完全に記述する事ができます。次章ではこのことを具体的に見ていきましょう。

注 27) ややこしいところは、ここで用いるの境界条件と、変位 $\boldsymbol{s}$ に対する境界条件を独立に取ることが出来る点です。つまり、の選び方に任意性が出てくるために、混乱が生じます。例えば均質ではあるが、複雑な形状を考える場合には、無限媒質の (基本解) を用いると見通しが良くなります。

3.A デルタ関数に関するまとめ

3.A.1 デルタ関数の微分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d\delta(x)}{dx}dx = -f'(0) \tag{3.120}$$

3.A.2 極座標表示

極座標 r を考えた場合のデルタ関数を考えます。$r \geq 0$ なので、片側でのみ定義すると

$$\int_0^{\epsilon} \delta^+(r)dr = 1. \tag{3.121}$$

と定義します。1/2 とする定義もあります。

3 次元の場合のデルタ関数の極座標表示は

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \frac{\delta^+(r)}{4\pi r^2}. \tag{3.122}$$

と書くことが出来ます[注 28)]。

この場合にデルタ関数の微分は

$$\frac{\delta^+(r)}{r} = -\frac{d\delta^+(r)}{dr}. \tag{3.123}$$

と書くことが出来ます。Test function を $g(r)/r$ として積分すると簡単に導出出来ます (問題)。

3.B Bessel 関数のまとめ

$$\frac{1}{r}\frac{1}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0, \tag{3.124}$$

はベッセルの微分方程式と呼ばれ、その解として第 1 種 $J_m(kr)$ と $N_m(kr)$ が知られている。$J_0(0) = 1, J_m(0) = 0, m \neq 0$ であるがは $r = 0$ で発散する。また両者とも $r \to \infty$ では $1/\sqrt{r}$ で 0 に収束する。詳しくは演習形式で学ぶ特殊関数・積分変換入門 [(7)] もしくは Mathematical Methods for Physicists[(1)] 参照のこと。

注 28) ここで原点に位置するデルタ関数は、原点に対して対象なため r のみの関数であるとします。また、デル

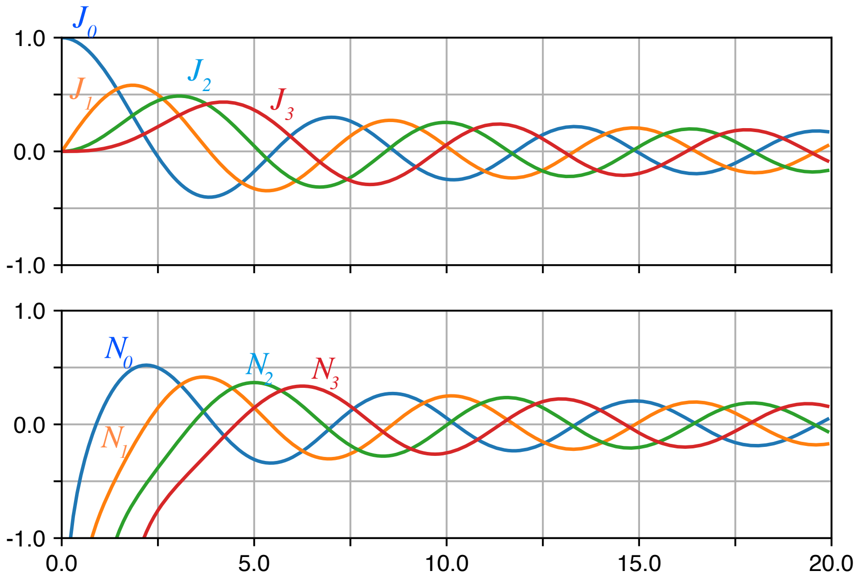


図 3.9　Bessel 関数と Neumann 関数の例

3.B.1 よく使う関係式

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) \tag{3.125}$$

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x) \tag{3.126}$$

3.B.2 0 付近での近似式 $(x \to 0)$

$$J_m(x) \sim \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \tag{3.127}$$

$$N_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2}, \tag{3.128}$$

$$N_m(x) \sim -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^m, m \geq 0 \tag{3.129}$$

タ関数は試験関数との積分で定義できるため、両辺全空間で積分してみると一致することが分かります。

3.B.3 遠方での近似式

$$J_m(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \tag{3.130}$$

$$N_m(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \tag{3.131}$$

$$H_m^{(1)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - \frac{2m+1}{4}\pi\right)} \tag{3.132}$$

ここで、$H_m^{(2)}(kr) = H_m^{(1)*}(kr)$ である。

3.C Hankel 関数

3.C.1 漸化式

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k \left(z^{-\nu} H_\nu^{(2)}(z)\right) = (-1)^k z^{-\nu-k} H_{\nu+k}^{(2)}(z)$$

DLMF (https://dlmf.nist.gov/10.6) 参照。

3.C.2 球 Hankel 関数との関係

球 Hankel 関数 $h_n^{(2)}$ と $H_{\frac{n}{2}-1}^{(2)}$ の間には

$$h_n^{(2)}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} H_{\frac{n}{2}-1}^{(2)}$$

という関係があります。

また

$$h_0^{(2)}(kr) = -\frac{1}{kr} e^{-ikr}$$

です。

3.D 平面波展開

平面波は円筒波の重ね合わせで表現することが出来る。

$$e^{ikr\cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{im\phi} \tag{3.133}$$

3.E Fourier 変換のまとめ

時系列 $u(t)$ に対し、その Fourier 変換 $\mathcal{F}$ と Fourier 逆変換 F^{-1} を

Fourier 変換の定義

$$U(f) \equiv \qquad \mathcal{F}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi ft} dt, \tag{3.134}$$

$$u(t) = \qquad \mathcal{F}^{-1}(U) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} U(f) e^{i2\pi ft} df, \tag{3.135}$$

$$\tag{3.136}$$

と定義する。ここで、U は時系列 u のフーリエ成分を表す。

性質まとめ

- $u(t)$ が実関数ならば $U(f) = U^*(-f)$,
- Parseval の公式: $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(f)^2 df$,
- Cross spectrum $C(u, v; f) = \mathcal{F}(\psi) = U^* \tilde{v}$
- Wiener- Khinchin の定理: $p(f) = \mathcal{F}(\phi) =\mid U \mid^2$.

ここで畳み込み積分は

$$u(t) * v(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(t-t')v(t')dt'.$$

と定義し、自己相関関数 ϕ は

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t+\tau)dt.$$

と定義する。

相互相関関数 ϕ は

$$\psi(u, v; t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t+\tau)dt.$$

と定義する。

3.F Hilbert 変換について

$f(t)$ の $\mathcal{H}f(t)$ は

$$\mathcal{H}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[-isign(\omega)]F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{3.137}$$

によって定義される。これはスペクトルの実部と虚部を入れ替え、また符号も入れ替えたフーリエ変換である。時間領域では

$$\mathcal{H}f(t) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{3.138}$$

である。$\mathcal{P}\int$ はコーシの主値積分を表す。

詳しくは演習形式で学ぶ特殊関数・積分変換入門 [7] もしくは Mathematical Methods for Physicists[1] 参照のこと。

3.7 参考文献

[1] G.B. Arfken and H.J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Science, 2013.

[2] Adrianus T de Hoop. Time ‐ domain reciprocity theorems for acoustic wave fields in fluids with relaxation. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 84, No. 5, pp. 1877–1882, November 1988.

[3] J T Fokkema and P M van den Berg. *Seismic Applications of Acoustic Reciprocity*. Elsevier, 1993.

[4] Kees Wapenaar and Jacob Fokkema. Green's function representations for seismic interferometry. *Geophysics*, Vol. 71, No. 4, p. SI33, 2006.

[5] 斎藤正徳. 地震波動論. 東京大学出版会, 2009.

[6] 日下部哲也, 亀伸樹. 表現定理とグリーン関数. 地震　第 2 輯, Vol. 68, No. 4, pp. 83–89, 2015.

[7] 蓬田清. 演習形式で学ぶ特殊関数・積分変換入門. 共立出版, 2007.

地震波の励起

第 4 章

地震波を励起するメカニズムは種々のものが考えられます。例えば断層運動や火山噴火などです。これら地震波を励起する現象は線形弾性体で記述することはできません。しかし、励起領域が局在化されている場合にいは、前章で学んだ表現定理を使うと、線形弾性体の枠組みで地震波の励起の問題を取り扱うことができます。本章では、一般にこれらの現象が線形弾性体内の**等価体積力**で記述出来ることを学んでいきます。言い換えると、地震学で励起源を調べるということは、その**力系 (force system)** を推定することに他なりません。

地震学的手法は震源の特徴を知る上で有効な手法ですが、波動伝播からは **force system** のみ情報が得られることに注意が必要です。励起源の物理的な描像 (例えば、滑り量や励起源の体積変化など) を得るためには、**等価体積力**を物理現象をもとに焼き直す必要が出てきます。状況によっては複数の解釈が可能であり、推定された震源の描像は仮定している物理モデルに強く依存します。このように、地震学的観測からその励起メカニズムを理解する際には、二段構えの論理構造になっていることを意識することが大切です。

以下の節はまず等価体積力とは何かを理解するために という概念について説明してきます。続いて について解説していきます。

4.1 Indigenous source

地震波を励起するイベントが起きない限り地球は振動せず静かなままです。ある時点で系 (この場合地球) の外からの力 (外力) が働くと地震波が励起されます。例えばもっとも簡単に思いつくイベントとして、隕石の落下の落下が考えられます。火山噴火にともなう質量の噴出も、噴出物が地球外と散逸する場合には、撃力で近似出来る例です。この様に系の外から力が加わる場合には、外力による力積の分だけ、地球全体の運動量は変化します。

しかし多くの場合、固体地球は閉じた系として近似することが出来ます。このような場

合でも、もちろん固体地球内部の現象は地震波を励起することが出来ます。地震 (断層の破壊現象) が典型的な例です。火山性微動のような固体地球内部の火山プロセスも例として挙げることができます。この様に、孤立した固体地球の系内部の励起源をと呼びます。具体的なの物理プロセスとしては、熱応力や相転移、断層運動や流体の移動 (例えば火山性微動の励起源) などが考えられます。地球全体は孤立した系とみなせるため、系全体として運動量・角運動量が保存する必要があります。

Indigenous source が地震波を励起するためには、地球内部の一部で Hooke 則が破綻する必要があります (そうしないと静止したまま動きません)。例えば地震発生時の断層運動は、断層近傍では線形弾性論に従いません。弾性体を重り・バネのアナロジーとして考えた場合、バネが切れるなどバネ定数が突如変化することに対応します。また、火山性微動の励起を考える場合には流体運動が重要な役割を果たします。この様に線形弾性論に従わない領域が体積 V の領域内に局所化している場合を考えましょう。この場合、以下大きく分けて現象を 2 つに分類することが出来ます。

まず 1 つ目は、領域 V とその外側 (線形弾性体の領域) とで運動量・角運動量の交換を無視できる場合です。断層運動がその例です。この場合、線形弾性体の領域 (V 以外) でも、全ての瞬間で運動量・角運動量が保存します。

2 つ目は、領域 V とその外側 (線形弾性体の領域) とで運動量・角運動量の交換をする場合です。地滑りも、斜面を剛体ブロックが滑り落ちる場合が良い例です。動き始めと、動き終わりでは地滑りのブロックの運動量は 0 ですが、その間は運動量を持ちます。地球全体で運動量が保存するために、V 以外の領域では運動量を地滑りブロックから受け取ります。つまり、力積が働らきます[注 1)]。

これらの性質が、次節で述べる等価体積力を考える際に重要となってきます

4.2 等価体積力と stress glut

ここで地震発生を考えてみましょう。地震は断層面上で食い違いが発生する現象で、破壊現象自体は弾性体力学の枠組みでは記述できません。具体的には、フックの法則以外は厳密に成り立つべき物理法則のため、構成則がフックの法則で記述出来ない現象が起きているといえます。ここで Σ で囲まれる領域 V を考えます。Σ の外側では、線形弾性体の枠組みで完全に記述できるとし、フック則は Σ の内部でのみ破綻しているとします。

表現定理は、Σ 上での変位・応力が分かっていれば、その外側の変位応力は完全に記述出来ることを保証します。Σ 外部の変形に、Σ 内部の変形の情報は必要ありません。そこで仮想的に Σ 内部にも、Σ 上で変位・応力の境界条件を満たす線形弾性体を埋め込むことを考えて見ましょう。以下では、系全体を線形弾性体で表し、Hooke 則の破れの効果を等

注 1) 詳細は Takei and Kumazawa [1994, 1995][(12), (13)] 参照のこと。

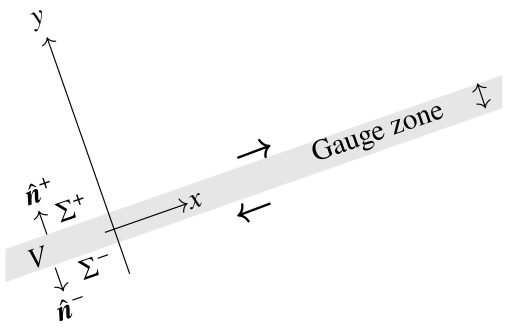


図 4.1 Schematic figure of a right-lateral vertical strike-slip fault.

価な力 (**equivalent body force**) で完全に表現できることを示していきます[注 2)]。

Σ 内部で地震 (断層運動) が起きているとしましょう。Σ 内部では脆性破壊を起こしており、フックの法則は成り立っていません。脆性破壊による変形は、断層付近の薄い断層ガウジと呼ばれる[注 3)]実際の応力を測定できたとし $\boldsymbol{T}_{\mathrm{true}}$ (図中の点線) で表します。

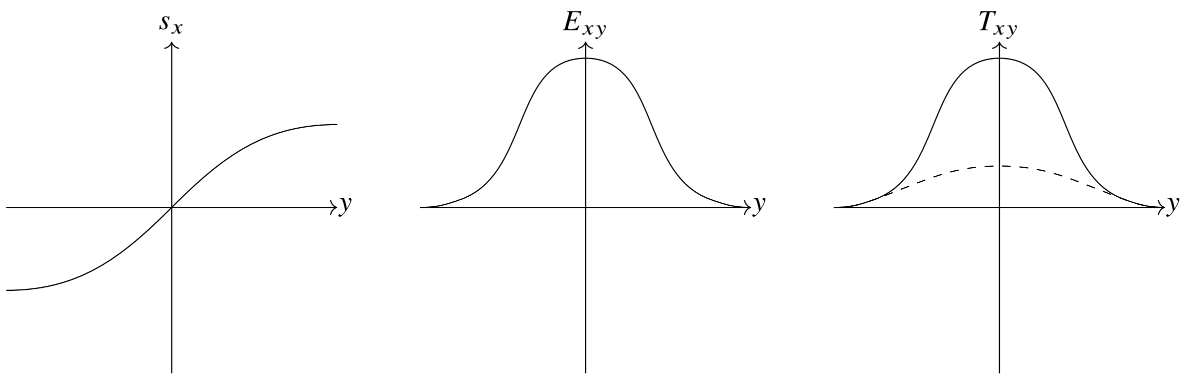


図 4.2 Schematic figure of the the displacement, strain and stress.

ここで Σ の内側を、仮想的に弾性体と入れ替えてみましょう。Σ 内部でフック則が成り立つため、歪から応力を計算できます。図 4.2 にあるように、線形弾性体でモデル化して得られた応力は実際の応力より大きくなります。このモデル化された応力を $\boldsymbol{T}_{\mathrm{model}}$ (図中の実線) で表します. ここで Stress glut $\boldsymbol{\Gamma}$ を $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{model}} - \boldsymbol{T}_{\mathrm{true}}$ で定義します[(1)]。Σ 上で $\boldsymbol{\Gamma} = 0$ となります。

弾性体に置き換えた領域内の微小要素を考えてみましょう。$-\Gamma$ を Σ 内にかけたとすると、完全弾性体内には正味 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{true}}$ がかかるようになり、その運動方程式は弾性体に置き換える前と一致します。つまり、Σ 内の領域を弾性体に置き換え $-\Gamma$ を領域内にかけることにより、全領域 V 内の変形 $\boldsymbol{s}$ を記述することができます。The stress glut が弾性体内部に分布しているとすると、等価な体積力を $-\partial_j \Gamma_{ij}$ と定義できます。弾性体に等価体積力

注 2) 詳細は Dahlen and Tromp 1998[(2)] 参照のこと

注 3) ガウジとは脆性破壊によって細粒化した未固結の粒子からなります。例えば坂口さん http://www.arito.jp/LecEQ22.shtml の HP 参照。

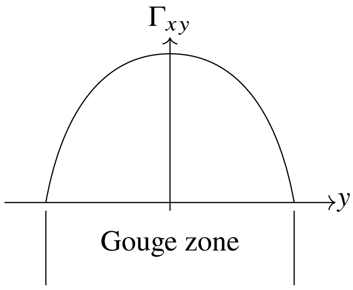


図 4.3　Schematic figure of the stress glut.

を作用させた問題として、完全に弾性体の線形弾性体の枠組み内で記述することができます。

固体地球は系として閉じているため、系にかかる正味の力とトルクは 0 となります。断層運動の場合には、領域 Σ 内と外で角運動量のやりとりがないと近似でき、等価体積力は 2 組の偶力で表現できます。

弾性波動から震源 (地震波動の励起源) を知ろうとする場合に出来る事は、励起源と等価な力 (等価体積力) を決める事が全てです。等価体積力を説明できる物理モデルは唯一とは限らず、その励起メカニズムの考察には独立な情報が不可欠です。

4.3 多重極展開

Stress glut $\mathbf{\Gamma}$ を用いて等価体積力は

$$\boldsymbol{f} = -\nabla \cdot \mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{x}, t). \tag{4.1}$$

と書くことが出来ます。等価体積力による地震波動の励起はを使って

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \omega) = \int_V \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}, \omega) dV(\xi) \tag{4.2}$$

と書くことが出来ます。

Green 関数を $\boldsymbol{\xi}_0$ 近傍で $\Delta\boldsymbol{\xi}$ に関してテーラ展開します。Green 関数の典型的な波数を k とすると、グリーン関数 G の n 階微分は $k^n G$ と評価出来ます。その為テイラー展開の n 次の項はおおよそ

$$\frac{1}{n!} k^n G \Delta\xi^n = \frac{1}{n!} G (k \Delta\xi)^n \tag{4.3}$$

となります。$k\Delta\xi$ が十分に小さい時、つまり領域 Σ が地震波の波長に比べて十分に小さい状況 (図 4.4) ではテイラー展開することが出来ます。そこで $\Delta\boldsymbol{\xi}$ に関して 2 次の項までテイラー展開してみましょう。

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) \approx \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_0, \omega) + \nabla_{\xi} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_0, \omega) \Delta\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\xi}^T \mathcal{H}_{\xi} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_0, \omega) \Delta\boldsymbol{\xi} + O(\Delta\boldsymbol{\xi}^3) \tag{4.4}$$

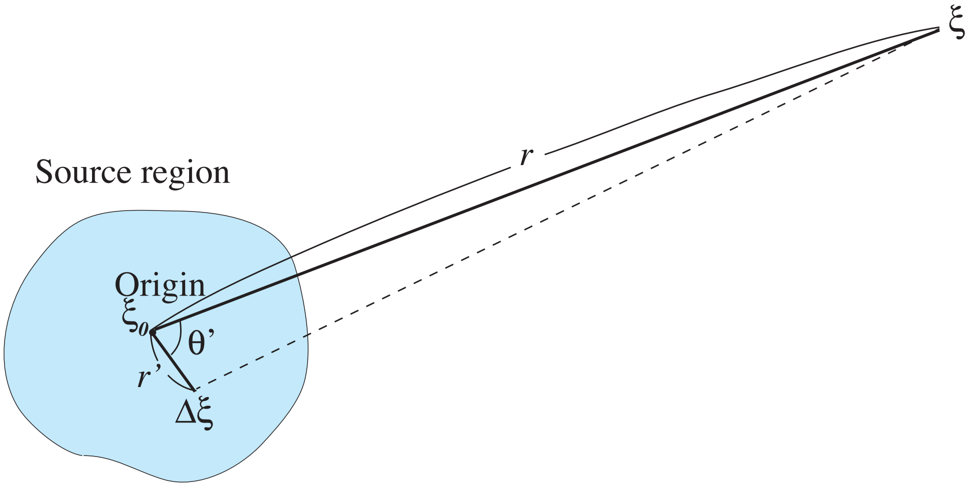


図 4.4　Schematic figure of the source-receiver geometry.

となります。この式を式 4.2 に代入すると

$$
\begin{aligned}
S_i(\boldsymbol{x},\omega) \approx\ & G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\omega)\int_V f_j(\boldsymbol{\xi},\omega)dV(\xi) \\
&+\partial_k G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_0,\omega)\int_V f_j\Delta\xi_k dV(\boldsymbol{\xi}) \\
&+\partial_k\partial_l G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_0,\omega)\int_V f_j\Delta\xi_k\Delta\xi_l dV(\boldsymbol{\xi}).
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

1 項目は力積を表し、2 項目はトルクを表します。Σ 内の運動量・角運動量変化を無視できる場合にはこれらの項はゼロになるため、第 3 項以降が効いてきます[注 4)]。一方、3 次元グリーン関数は遠方では r^{-1} であるため、第 n 項は r^{-n-1} の距離依存性を持ちます。その為高次の項ほど急速に減衰します。そのために遠方では第 3 項 (と呼ばれる量) で等価体積力を記述出来る事が分かります[注 5)]。

注 4) 第 3 項は次節でとして定義します。の反対称成分はトルクを表すため、dipole 成分同様トルクを表します。通常トルクは dipole 成分で表し、は対象テンソルとなります。

注 5) ここでは震源の大きさが波長に比べて十分に小さい場合を考えました。震源域がより広い場合はどうなるでしょうか？ ここでは水平成層構造を考えます。この場合グリーン関数は $Legendre$ 関数の和 (フーリエ級数展開の球面版) で表すことが出来ます。この場合加法定理と呼ばれる次の関係式:

$$
\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\Theta)=\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\boldsymbol{x})Y_{lm}(\boldsymbol{\xi}), \tag{4.6}
$$

が知られています。ここで Θ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{\xi}$ のなす角です。地表面に励起源が分布している場合には

励起源とその他の弾性体の領域とが、運動量・角運動量のやり取りをしない状況を考えます。多重局の 0 次の項は力積に対応し、1 次の項はトルクに対応します。そのために、2 次以降の項しか値を持ちません。次の章では 2 次の項について詳しく見ていきましょう。

4.4 Moment tensor による励起

震源領域の空間スケールが波長よりも十分に短いときには点震源とみなすことが出来、stress glut は

$$\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = M_{ij}(t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0). \tag{4.7}$$

と書くことが出来ます。ここで $\boldsymbol{M}$ はです。Moment tensor M_{ij} のトレースは体積変化を表します。またここでは前節で示したように、震源領域内外での角運動量のやり取りがない状況を考えています。そのため は対称行列と定義することで十分であることが分かります。また は対称行列であることから、3 つの固有値と、互いに直交する固有ベクトルで対角化できます。通常の地震の場合には、M_{ij} の 2 つの固有値の大きさは、他の一つよりずっと大きくなります (2 対の偶力で表現できます。) [注 6)]。

十分に低周波数側では、を

$$\Gamma_{ij} = \sqrt{2}M_0\hat{\boldsymbol{M}}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)m(t), \tag{4.8}$$

と単純化することが出来ます。ここで M_0 は地震モーメントを表し、$m(t)$ は $\int m(t)dt = 1$ と規格化された増加関数です。ここで、各 の成分は、同じ時間依存性を持つと仮定しました。

十分に遠い観測点では、実体波の変位 (U) は無限均質媒質の場合には

$$U \sim \frac{1}{r}\dot{m}_0(t)(t - r/c), \tag{4.9}$$

と書くことが出来ます。r は震源からの距離です。このことは、遠地実体波の変位波形は moment rate 関数 $M_0\dot{m}(t)$ を表していることを示しています。

$\int Y_{lm}(\boldsymbol{xi})f(\boldsymbol{\xi})dV$ を評価すれば良いこととなります。波長に比べて震源域が小さい場合にはテイラー展開と対応します。

注 6) 例えば、爆発震源も で表現することが出来ます。Non-double coupled components の詳細については例えば、Julian et al. [1998][5] 参考のこと。

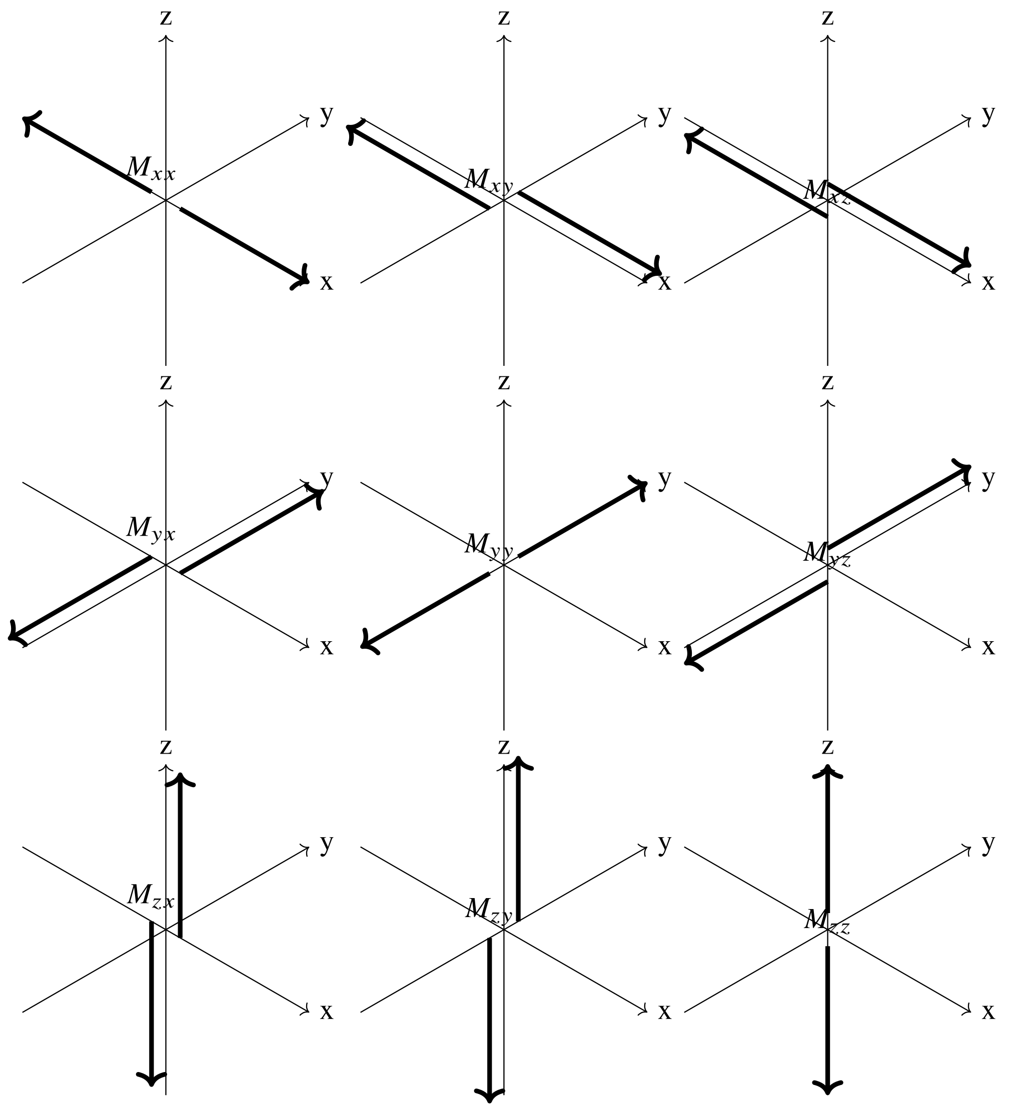
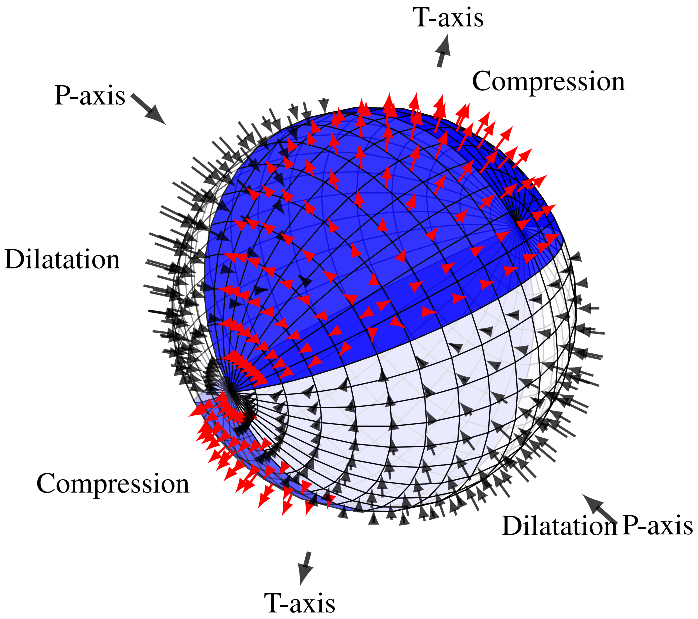


図 4.5　Moment tensor の各成分。

問題 4.1

1. 3.4.2 章では爆発震源を考えたが、この場合震源は で表すことが出来る。Δr が十分に小さい場合、対応するの表現を導きなさい。
2. が $M_{xx} = 1$ のみ値を持つ時、P 波の放射パターンを計算しなさい。
3. が $M_{xx} = 1, M_{yy} = -1$ の場合 P 波の放射パターンを計算しなさい (図 4.6 参照)。



Seismic focal mechanism and Pression-Tension axis.

図 4.6　Double couple source による P 波放射パターン。Cyril Langlois (2010)/ CC BY 2.5.

4.5 Moment tensor のする仕事

この章では が弾性体にする仕事について考えていきましょう。まず stress glut $\boldsymbol{\Gamma}$ を考え、対応する等価体積力 $\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{f} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}, t). \tag{4.10}$$

が弾性体にかかっているとします。弾性体の変位を $\boldsymbol{s}$ とすると、等価体積力が弾性体にする仕事 W は

$$W = \int_V \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{s} dV, \tag{4.11}$$

と書くことができます。この式を、部分積分などを用いて (問題 4.2)

$$W = \int_V \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{s} dV = \sum_{ij} \int_V E_{ij} \Gamma_{ij} dV, \tag{4.12}$$

と書くことができます。ここで簡単のため弾性体の表面 Σ では stress glut が 0 であると仮定しました。Stress glut が式 (4.7) のような で表現出来るときには、

$$W = \sum_{ij} E_{ij} M_{ij}(t), \tag{4.13}$$

と単純化することができます。つまり、震源での地震で生じた歪 E_{ij} と M_{ij} の掛け算で仕事を表現することができます。エネルギー保存則を考えると、stress glut Γ がした仕事 W が運動エネルギー、弾性エネルギーと変わることになります。

問題 4. 2

式 (4.12) を導出せよ。ただし以下の条件を仮定する。

- 領域 V 内の弾性体を考え、stress glut Γ は Σ で囲まれる領域内でのみ存在するとする。
- 表面 Σ では、stress glut $\Gamma_{ij} = 0$ となる。
- 弾性体が孤立した系であると仮定し、弾性体にかかるトルクがゼロ $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ を用いよ。
- ヒント: 部分積分とガウスの発散定理を用いる。

4.6 地震波の励起に対する自由表面の影響

この節では、自由表面が地震波の励起にどのような影響を与えるか考えていきましょう [(14)] [注 7]。結論から言うと、浅い地震では M_{xz}, M_{yz} が地震波を励起しないという一見不思議な結果が得られます。

ここでは簡単のため半無限媒質を考えます。今 $z = 0$ が地表面だとすると、自由境界表面の条件は $z = 0$ で $T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0$ となります。この最初の 2 つの条件を歪みで書き直すと

$$E_{xz}\big|_{z=0} = \left.\frac{T_{xz}}{\mu}\right|_{z=0} = 0 \tag{4.14}$$

$$E_{yz}\big|_{z=0} = \left.\frac{T_{yz}}{\mu}\right|_{z=0} = 0 \tag{4.15}$$

がする仕事 W は $\sum_{ij} E_{ij} T_{ij}$ と書けることを示しました。$z = 0$ で $E_{xz} = E_{yz} = 0$ となるため、対応する の成分 M_{xz}, M_{yz} は励起に寄与しないことが分かります。つまり自由表面近く (波長に比べて深さが十分に浅い) では、M_{xz}, M_{yz} は地震波を励起できないことを示しています。実際の現象に照らし合わすとどういった事が起こるのでしょうか？

例えば海溝付近の浅い地震では、沈み込みの角度が浅い場合には低角逆断層の巨大地震が発生します。その場合には M_{xz} と M_{yz} 成分は地震波をあまり励起しないため、地震波のデータからこれらの成分を決めることは難しいことが知られています。特に長周期の地震波で を推定する場合には深刻な問題となります。浅い低角逆断層の地震のモーメントを求めようとする際に、断層の傾斜角との間にトレードオフができ、モーメントの推定値に大きな不確定性を生じてしまいます。

注 7) 例えば川勝 [1991] 参照。

4.7 Single force による励起

励起源 (線形弾性体から外れた領域) が十分に大きく、その運動量変化が無視できないときには、多重極展開で言うところの dipole に対応する項を無視することができません。single force と呼ばれる項で、source region とそれ以外の領域との運動量交換 (力積) によって発生します。この項は、例えば地すべり (図 4.7) を考えるとイメージしやすいでしょう。もちろん系全体の運動量は保存されることが要請されます。

Single force が重要になってくる例としては、(i) 地滑り、(ii) glacial earthquake[3], [10] や (iii) 海洋波浪による地震波の励起が挙げられます。ともに、十分に大きな volume を持った source region の運動が地震はを励起している場合に対応しています。

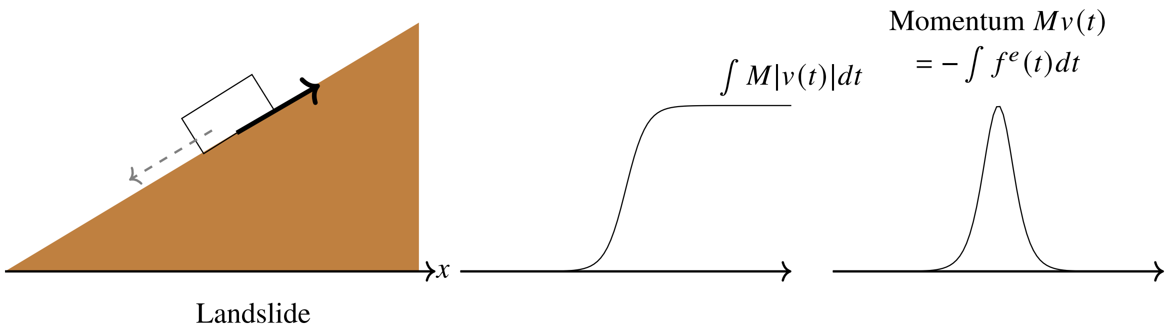


図 4.7　Schematic figure of the single force.[6]

つぎに少し詳しく脈動について見ていきましょう。

4.8 地動の脈動: 海洋波浪は地球を揺らす

地球は地震か起こっていない間も常にゆれ続けています。1 秒短周期帯ては人間の活動か主な励起源です。周期 1 秒より長くなってくると、人間活動起源の振動は小さくなってきます。これは周期か長くなるにつれて地震波の波長か長くなるため、励起源かより深い (km スケール) 領域まて揺すらないといけないためです。周期 5 秒より長い周期帯では、海洋波浪が固体地球を常に揺すっており、表面波 (Rayleigh 波、Love 波) を常に励起されています。この現象を脈動 (microseisms) と呼びます。

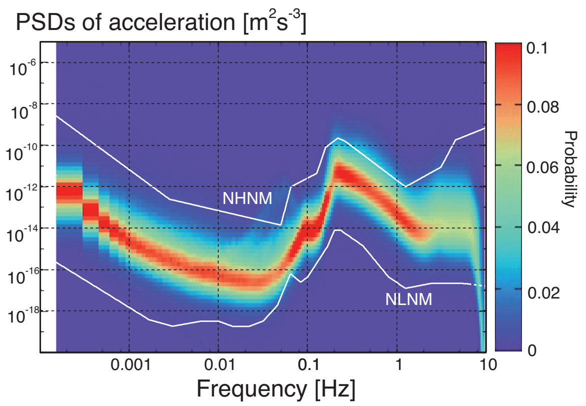


図 4.8　日本で観測されたノイズスペクトル。

図 4.8 を見てみましょう。周期 10 数秒付にピークと、周期 8 秒付近に大きなヒークを見て取れます。周波数の低い方は primary microseisms と呼ばれ、高い方は secondary microseisms と呼ばれています。primary microseisms は海洋波浪の周波数そのものに対応し、secondary microseisms は倍の周波数に対応します。Secondary microseisms の振幅の方か大きい事は直感に反しますが、 これは、励起メカニズムとして非線形効果か支配的であるために、倍音か卓越する事に起因します (Longuet-Higgins メカニズム: Longuet-Higgins, 1950[8]) として知られています。Secondary microseisms の振幅の方が桁で大きく、海から遠くはなれた大陸の中央でも、脈動ははっきりと観測されます。

特に台風が通過するときには波高が高くなるため顕著に観測されます。図 4.9 にその一例として、2004 年の台風 18 号通過時の例を示します。おおよそ一日半分の南大東島でも記録からランニングスペクトル[注 8)]を計算し

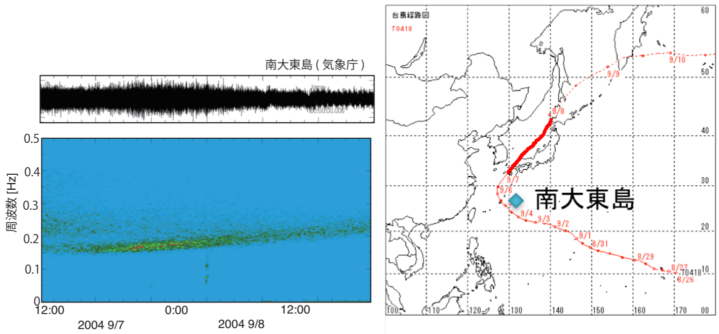


図 4.9　図左: 南大東島での台風時の上下動記録から計算したランニングスペクトル。縦軸が周期を表し、横軸が時刻を表しています。図右: 台風の進路を表します。濃い赤い線が、左図でプロットした期間に相当します。

注 8) ランニング・スペクトルとは、パワースペクトルの時間変化を表した図です。周波数の時間変化を調べる

ました。台風の勢力が
弱まり、観測点から遠
ざかるにつれて、振幅が弱くなっている様子がみてとれます。また、卓越周期は勢力が弱まるに連れて短くなっている様子を見て取れます。図 4.9 に 1 本うっすらと縦の筋を確認できます。これは遠くで起こった地震波であす。このように地震観の信号を脈動は隠してしまいます。脈動は地震観測をする上では、主要なノイズとなっています。

4.8.1 脈動の励起メカニズム: Longuet-Higgins メカニズム

この節では脈動の励起メカニズムを、Longuet-Higgins [1950][(8)注 9)] を元に解説していきます[注 10)]。水面の波については??節を参照してください。

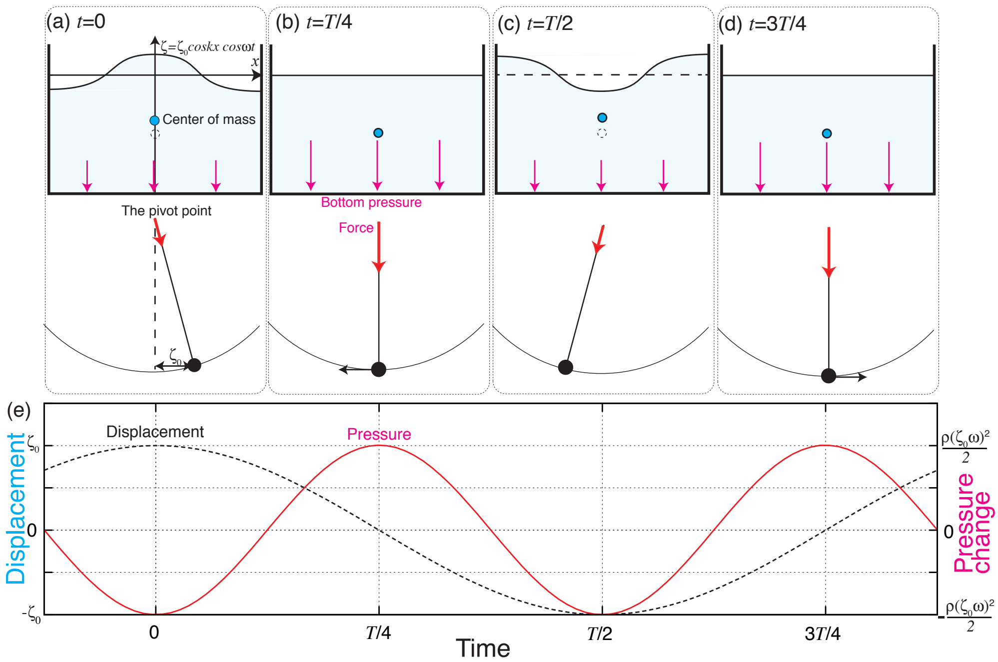


図 4.10　図上: 単純化したモデルと (a-d)、振り子のアナロジー。図上左では定在波を考えているので波は伝播しない。Nishida (2017)[(11)] からの引用。

図 4.10 右のように、振り子をアナロジーとして考えてみましょう (Longuet-Higgins, 1953[(9)])。図左では定在波を考えているため、波は伝播せず上下方向に移動します。その

ための図です。具体的に計算するためには、(1) まず元データから時間をずらしながらデータを切り出し、(2) 切り出したデータごとにパワースペクトルを計算しまし、(3) 計算したパワースペクトルを時間方向に順番に並べます。

注 9) Longuet-Higgins は応用数学者・海洋物理学者で、海洋波の統計理論や海洋の波に関する様々な研究を精力的に行ってきましたた。

注 10) 非線形項の取り扱いが ad hok な感じを否めませんが、ここでは単純化しています。詳細は Longuet-Higgins (1950)、Hasselemann 1963)[(4)注 11)]Kedar *et al.* (2008)[(7)] を参照してください。

ため、それぞれの瞬間重心の位置を考えると、(a) と (c) では (b) と (d) より高いことが分かります。重心の上下変動を起こすためには周波数 2ω の圧力変動が必要になります。これは図右側の振り子を元に考えてみると理解しやすいと思います。振り子の位置が重心の位置を表し、支点での力が海底面での圧力に対応し、振り子の水平変位が海水の重心の深さに対応します。振り子が振れることが、水が移動することに対応します (図 4.10 下の流線も参照)。支点での力の変動を考えると、2ω で圧力が変動することがわかると思います。簡単な計算から、圧力変動は波の振幅の自乗に比例することも分かります。つまり、この圧力変動は 2 次の項 (非線形効果) であることも分かります。

次に定在波でなく、進行波を考えてみます。進行波の場合には、形を保存しながら一定速度で移動するだけなので、重心の変化は生じません。つまり、圧力変動は生じないことが分かります。Longeut-Higgins のメカニズムは、定在波に対してだけ有効で、進行波に対しては有効でないことが分かります。言い換えると、Longuet-Higgins のメカニズムで脈動を励起するためには、順方向・逆方向進行する少なくとも一組の海洋波浪が必要であることが分かります。海岸での波浪の反射や複数の波源の存在が、脈動の励起には欠かせないことが推測されます。

4.9 参考文献

[1] George Backus and Marjorie Mulcahy. Moment tensors and other phenomenological Discontinuous descriptions of seismic sources - I. displacements. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, Vol. 46, No. 2, pp. 341–361, 1976.

[2] F.A. Dahlen and J. Tromp. *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, Princeton, 1998.

[3] Göran Ekström, Meredith Nettles, and Geoffrey A Abers. Glacial earthquakes. *Science*, Vol. 302, No. 5645, pp. 622–624, October 2003.

[4] K. Hasselmann. A statistical analysis of the generation of miceoseisms. *Rev. Geophys.*, Vol. 1, pp. 177–210, 1963.

[5] Bruce R. Julian, Angus D. Miller, and G. R. Foulger. Non-double-couple earthquakes 1. Theory. *Rev. Geophys.*, Vol. 36, No. 4, p. 525, 1998.

[6] Hitoshi Kawakatsu. Centroid single force inversion of seismic waves generated by landslides. *J. Geophys. Res.*, Vol. 94, No. B9, p. 12363, 1989.

[7] S. Kedar, M. Longuet-Higgins, F. Webb, N. Graham, R. Clayton, and C. Jones. The origin of deep ocean microseisms in the northern atlantic ocean. *Proc. R. Soc. A*, Vol. 464, pp. 777–793, 2008.

[8] M. Longuet-Higgens. A theory of the origin of microseisms. *Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London*, Vol. 243, pp. 1–35, 1950.

[9] M. S. Longuet-Higgins. Can sea waves cause microseisms? *Proc. Symposium on Microseisms, Harriman 1952*, No. 306, pp. 74–93, 1953.

[10] Meredith Nettles and Göran Ekström. Glacial earthquakes in greenland and antarctica. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, Vol. 38, No. 1, pp. 467–491, April 2010.

[11] Kiwamu Nishida. Ambient seismic wave field. *Proc. Jpn. Acad. Ser. B Phys. Biol. Sci.*, Vol. 93, No. 7, pp. 423–448, 2017.

[12] Yasuko Takei and Mineo Kumazawa. Why have the single force and torque been excluded from seismic source models? *Geophys. J. Int.*, Vol. 118, No. 1, pp. 20–30, jul 1994.

[13] Yasuko Takei and Mineo Kumazawa. Phenomenological representation and kinematics of general seismic sources including the seismic vector modes. *Geophys. J. Int.*, Vol. 121, No. 3, pp. 641–662, jun 1995.

[14] 川勝均. 地震の大きさと多様性. 地震 第 2 輯, Vol. 44, No. Supplement, pp. 265–277, 1991.

半無限媒質での地震波伝播

第 5 章

前章では無限媒質中のについて解説しました。しかし現実の地球は均質ではなく複雑な構造をしており、波動の伝播は複雑になります。数 Hz より長周期で全球的な弾性波動の伝播を見るとき、水方向にのみ弾性波速度構造が変化するという (水平成層、もしくはシンプルに 1 次元構造と呼びます) 近似は十分に良い事が知られています。鉛直方向にしか弾性は速度構造が変化しない場合にも、波動場は複雑な様相を呈します。十分に震源から離れると、波面が平面で近似できる様子も見て取れると思います。

この章では波動の伝播を理解するために、一番重要な不連続面である地表の効果について見ていきます。まず遠地の波動場を平面波に分解できることを解説していきます。続いて、地表面での振る舞い: 地震波の反射・変換について解説していきます。

5.1 地震波の伝搬のおさらい: 実体波と表面波・境界波

自然界には波があふれています。例えば水面を眺めると、風が吹くと波紋が広がる様子を見て取ることができます。媒質に何らかの復元力が働く時、形を保ちつつある速度で伝搬してきます ($f(x-ct)$ (x は位置、c は伝播速度, t は時間) と書くことができます)。音波について具体的に考えてみましょう。

1. 気体が動いて密度が変わる
2. 密度の変化が圧力の変化を生む
3. 圧力勾配が気体の動きを生む

というサイクルを繰り返し音波は伝搬してきます。固体内でも同様なサイクルで、地震波

が伝搬していきます (詳細は次章以降を参照のこと)。波の振幅が十分に小さい場合には線形となるため、重ね合わせの原理が成り立ちます。つまり、注目する波を取り出して理解できれば、単純にその重ね合わせとして全体を理解することができます。

5.2 平面波

自由表面を考えると、弾性波動の伝播は複雑になります。例えばを評価しようとした場合にも、力源が地表にあるなど限られた場合にだけ解析的に表現することができます (例えば 5.7 章)。全無限媒質のの場合ですら、近地項の形は複雑になります。全無限弾性体のを考える場合、近地項は震源からの距離に依存して形を変えます。一方遠地項は形を保ったまま伝搬します[注 1)]。そこで、この章では遠地項にのみ注目していきます。

まずは単純化のため 3 次元スカラーの場合を考えてみましょう。震源で $\delta(\boldsymbol{x})$ という外力が働いた場合を考えましょう。以前学んだように、この場合 Green 関数は

$$G^{\phi}(r,\omega) = -\frac{1}{4\pi\kappa}\frac{e^{-ikr}}{r}, \tag{5.1}$$

と書けます[注 2)]。e^{-ikr} の位相が一定である面を定義でき、一般に”波面”と呼びます。また波面に直交する軌跡を波線 (ray) とよびます (詳細は第 7 章参照)。r が十分に遠い領域では波面の曲率を無視することが[注 3)]でき、e^{-ikr} という平面波として取り扱うことが出来ます。

ここで一度波動方程式に戻って考えてみましょう。G^{ϕ} は周波数領域では

$$-\rho_0\omega^2 G^{\phi} - \kappa\nabla^2 G^{\phi} = -\delta(\boldsymbol{x}) \tag{5.2}$$

を満たします。空間についても Fourier 変換し、もう一度 Fourier 逆変換すると

$$G^{\phi} = -\frac{1}{\kappa}\iiint \frac{\alpha^2 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}}{\alpha^2(k_x^2+k_y^2+k_z^2)-\omega^2} dk_x dk_y dk_z \tag{5.3}$$

と書けることが分かります。この式は、が平面波の重ね合わせで表現できることを示しています。

半無限媒質のを考える場合に、$e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ という”要素”の自由境界表面なでての振る舞いを理解すれば、その重ね合わせ (周波数領域でフーリエ逆変換) すれば、全体の振る舞いを理解することができます。言い換えると平面波 $e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ の自由表面での振る舞いを理解することが、半無限媒質での弾性波動の伝播の理解への鍵となります。

注 1) 波線理論の章で解説するように、速度構造の典型的な空間スケールが注目している波長より長い時に遠地項は形を保ちつつ伝搬します。散乱を考えると波形が複雑となるので、この限りではありません。

注 2) 3 次元の場合同様に 2 次元の場合も、は遠方で e^{-ikr} と近似 3.B.3 する事ができます

注 3) 平面波の近似にはより厳密な条件が必要です。より厳密には、(i) 波面の曲率半径に比べてべて十分に短い空間スケールの波動伝搬に注目する場合には波面の曲率を無視することがます。(ii) 震源付近では曲率半径が小さくなるので、平面波で近似できなくなります。簡単な見積もりから、おおよそ $r > 1/k$ の領域で平面波として取り扱える事が分かります。

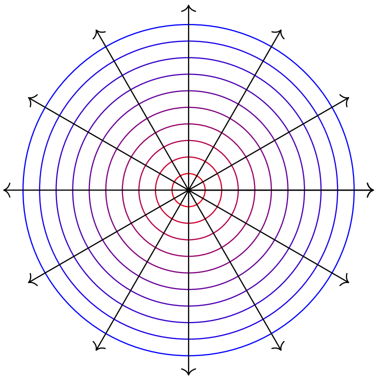


図 5.1　3 次元グリーン関数に対する波線と波面。

平面波のまとめ

震源から十分に遠く離れている場合には波面の曲率は無視でき、平面波と近似できます。まずは平面波について基本的な事をおさらいしていきましょう。平面波とは

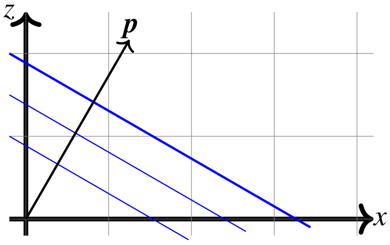
1. 波の形を保ちつつ
2. 平面状の波面をもち
3. 波面にす直行する方向に進行する波です。

単純化のためスカラーで考えると、圧力が $\phi(t - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x})$ のように $t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}$ のみの関数で書くことが出来ます。$\boldsymbol{p}$ はスローネスと呼ばれる量で $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}/\alpha$(音波の場合) で定義されます。

今 x 軸方向に進む波を考えます。$p_x > 1/\alpha$ の場合、p_z も実数となるため z 方向に伝播します。Slowness ベクトルに沿って速度 α で伝播することは明らかです。地表面 ($z = 0$) では波の伝播がどのように見えるでしょうか? $t = 0$ では $x = z = 0$ を通り、$t = \tau$ では $(\tau/p_x, 0, \tau/p_z)$ を通ります。$z = 0$ が地面だとすると、波は見かけ速度 $1/p_x$ で伝播します。地震計は地表に設置されているため実際に観測できるのは水平方向の見かけ速度 $1/p_x$ です。

5.2.1 弾性波の場合の平面波

ここまではスカラー量について平面波を考えてきました。この節では弾性波について考えてきます。



次は弾性波について考えてみましょう。角周波数 ω, 波数ベクトル $\boldsymbol{p}$ の平面波を考えます。弾性体を表すポテンシャルとして、スカラーポテンシャル ϕ, ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ を

$$\phi = \frac{A_\alpha}{\omega i} e^{i(\boldsymbol{k}_\alpha \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)} = i\frac{A_\alpha}{\omega i} e^{i\omega(\boldsymbol{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{x} - t)} \tag{5.4}$$

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{\boldsymbol{A}_\beta}{\omega i} e^{i(\boldsymbol{k}_\beta \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)} = \frac{\boldsymbol{A}_\beta}{\omega i} e^{i\omega(\boldsymbol{p}_\beta \cdot \boldsymbol{x} - t)} \tag{5.5}$$

を考えます[注 4)]。P 波の変位 $\boldsymbol{s}_\alpha$ はスカラーポテンシャルの勾配 ($\nabla\phi$、S 波の変位 $\boldsymbol{s}_\beta$) はベクトルポテンシャルの回転 ($\nabla \times \boldsymbol{\psi}$) であるため、

$$\boldsymbol{s}_\alpha(\boldsymbol{x}, t) = \omega^{-1} A_\alpha \boldsymbol{k}_\alpha e^{i(\boldsymbol{k}_\alpha \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)} = \boldsymbol{p}_\alpha A_\alpha e^{i\omega(\boldsymbol{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{x} - t)} \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{s}_\beta(\boldsymbol{x}, t) = \omega^{-1} \boldsymbol{k}_\beta \times \boldsymbol{A}_\beta e^{i(\boldsymbol{k}_\beta \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)} = \boldsymbol{p}_\beta \times \boldsymbol{A}_\beta e^{i\omega(\boldsymbol{p}_\beta \cdot \boldsymbol{x} - t)} \tag{5.7}$$

となります。P 波は進行方向 $\boldsymbol{p}_\alpha$ と平行に振動し、S 波は直交することが分かります。S 波の振動方向 (polarization) には不確定性があることに注意しましょう。また、便宜上変位を $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t}$ という表示にしましたが、物理量としては実部のみ意味を持つことに注意します。

$\boldsymbol{p}$ は **Slowness** で $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}/\omega$ で定義されます。次元は速度の逆数で、波の進行方向と平行なベクトルです。例えば P 波に対しては

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{1}{\alpha^2} \tag{5.8}$$

となります。

このように、一般的に弾性体の場合にはは $e^{i\omega(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - t)}$ のフーリエ逆変換を考えればよく、p 波は $\boldsymbol{s}_\alpha(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{p}_\alpha f(t - \boldsymbol{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{x})$、S 波は $\boldsymbol{s}_\beta(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{p}_\beta \times \boldsymbol{A}_\beta f(t - \boldsymbol{p}_\beta \cdot \boldsymbol{x})$ の形の波形が伝播していくと言えます。

5.2.2 実体波と不均質波

$p^2 > 1/\alpha^2$ の場合には p_z は実数となり、地球内部を自由に伝わる波・と対応します。P 波や S 波がその一例です。

$p^2 > 1/\alpha^2$ の場合には p_z が虚数となります。$p_z = \xi i$ と定義すると

$$\phi = A_\alpha e^{i\omega(p_x x - \omega t)} e^{-\omega\xi z} \tag{5.9}$$

注 4) 地震学では波動の伝播を考える場合には ω にかかる符号をマイナスに取ることが多く、フーリエ変換の定義も変わることが多いです。これは進行波を正と取り扱うためで Aki and Richards (2002) や斎藤 (2009) で採用されている符号のとりかたです。地震学でも Dahlen and Tromp (1998) では符号の取り方が逆になっており、自分は今どの定義に従っているのか注意が必要です。

となり z 方向に指数関数的に変化することが分かります。z 方向に振幅が変化するために () と呼ばれます[注 5)]。無限媒質中では値が発散するために物理的に意味のある解にはなりえません。しかし、境界がある場合には境界に寄りかかる形で存在しえます。後で詳しく述べますが、鉛直方向には指数関数的に振幅が減衰するために、エネルギーを水平方向にしか運ぶことができません。

つぎに観測された波形例から、地震波にはどういった種類の波が存在するのか見ていきましょう。図 5.2 は地震波干渉法 (仮想的な地震に対する地震波形だと思ってください。詳細は 10 参照) によって、全休的に伝播する地震波を抽出したものです。それぞれ横軸が伝播した距離、縦軸が走時[注 6)]を表しています。観測された地震波は大きく分けると、地球内部を伝わる実体波、地表面に沿ってのみ伝わる表面波に分類されます (図 5.2 左)。表面波は不均質波の一種と考えることができます。

この章では、これらの地震波の伝わり方を簡単に解説していきます。

[注 5)] 分野によっては、エバネッセント波、外部波とも呼ばれ事もあります。詳細は 9 章参照のこと。
[注 6)] 走時 (travel time) は仮想的な地震が起こってから地震波が到着するまでにかかった時間を表す。

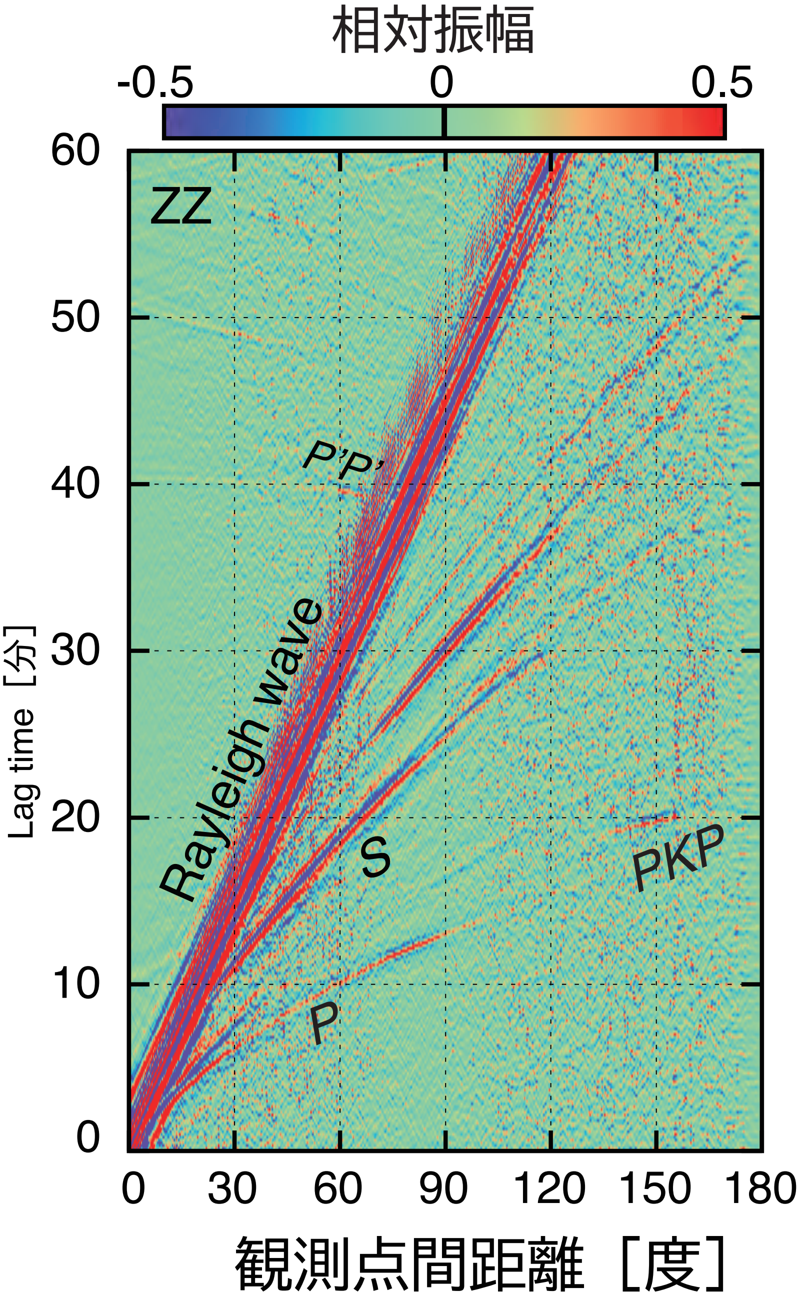


図 5.2　表面波・実体波の伝播。脈動記録の相互相関解析 (地震波干渉法) による擬似的な地震波形記録 [3]。地震波干渉法の詳細は 10 を参照。

実体波

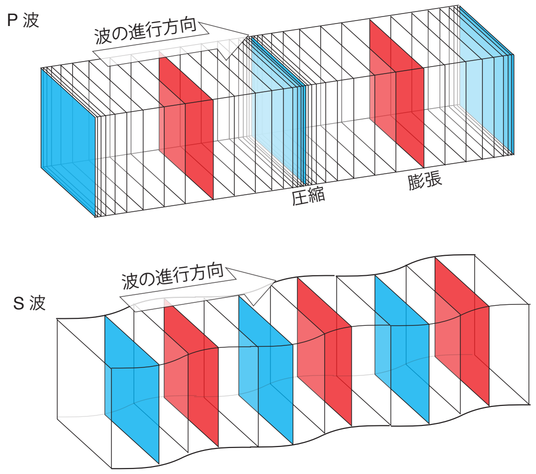


図 5.3　P 波 S 波の伝播の模式図。

実体波は大きく分けると、波の伝播方向と平行に振動する P 波と、直交する方向に振動する S 波に分類できます (図 5.3)。名前は最初に到着する波 (Primary wave) と、二番目に到着する波 (Secondary wave) に由来します。P 波は圧縮膨張を交互に繰り返す波で、S 波はずりの変形をともなう波です[注 7)]。また固体の物質は一般に冷たくなると固くなるために、温度が低下すると P 波速度・S 波速度は速くなります。

P 波は S 波よりも速く伝播することは皆さんよく知っていると思います。P 波と S 波の到達時刻の差から震源までの距離を求める大森公式[注 8)]も耳にしたことがあるのではないかと思います。緊急地震速報では、速く伝わる P 波から地震の位置を推定して、大きな揺れ (S 波) の到着を予想しています。

不均質波: 表面波・境界波

表面波は体積変化を伴うると、水平方向に振動するに分類されます。

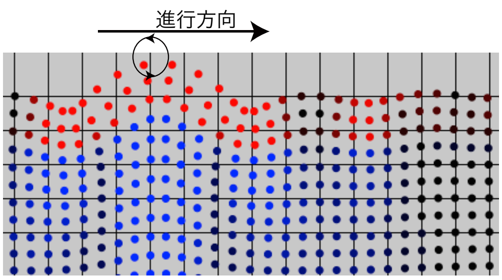


図 5.4　Rayleigh 波伝播の模式図。赤色の領域では retrograde に、青色の領域では prograde な振動をする。

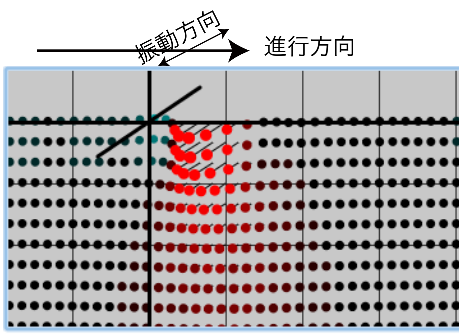


図 5.5　Love 波伝播の模式図。

まずは[注 9)]を見ていきます。まず無限媒質を S 波が鉛直方向に振動しながら右方向に伝播する状況を考えます。そこで真ん中でスパっときり半無限媒質にします。そうすると

注 7) Web に実体波伝播のデモを作りました。http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/knishida/Seismology/body_wave.html

注 8) 論文 (4) は http://hdl.handle.net/2261/32677 から読むことが出来ます。

注 9) デモ http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/knishida/Seismology/Rayleigh_wave.html を参考のこと。2020 年に少しでもをアップデートしました。

自由境界表面で応力ゼロの境界条件を満たすために、圧縮している部分が膨らみます (体積ひずみが大きい部分)。その分大きく変形してしまい、S 波より伝播速度が遅くなります (S 波速度の 9 割程度)。浅い部分で体積変形をして自由境界表面の境界条件をみたします。その際、体積変形は S 波と比べて位相が 90 度ずれるので、結果として粒子軌跡は楕円になります。深さ方向に振幅は指数関数的に小さくなってきます。地表では振動の方向は自転車の車輪の回転と逆向きで (retrograde) す。一方深い領域では (図中青) 自転車の車輪の回転と同じ向き (prograde) になります。5.6 節で、弾性体の半無限媒質 (自由境界表面) で Rayleigh 波と呼ばれる不均質波が存在できることを解説していきます。

次に見ていきます[注 10)]。ここでは 2 層構造を考えます。右側に水平方向に伝播する S 波を考えます。このような波は反射を繰り返し、遠くまで効率的に伝播します。図 5.5 では Love 波の伝播を図示しています。エネルギーが第 1 層に集中していて、深い方向に向かって指数関数的に減衰している様子がわかります。この波は、臨界角で入射した SH 波の多重反射に対応します。6.4.1 節で詳しく見ていきます。

5.2.3 波線: エネルギーの流れ

より一般的に、形を保ちながら伝搬するスカラー波を考えましょう。振幅を $A(\boldsymbol{x})$ と定義し、スカラー波 ϕ は

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = A(\boldsymbol{x}) f(t - T(\boldsymbol{x})) \tag{5.10}$$

と書けるとします。$T(\boldsymbol{x})$ が一定である面 (波面) を定義でます。A が波長に比べて十分ゆっくり変動する場合には、

$$\nabla\phi = -A\nabla f = -A\frac{df}{dt}\nabla T \tag{5.11}$$

と書け A の空間微分を無視することが出来ます。波面に直交する軌跡を波線 (ray) とよびます (詳細は第 7 章参照)。波線の方向は $\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \beta\nabla T$ で定義することが出来ます。ここで ∇T は局所的に定義された slowness vector です。

波線は物理的にはエネルギーフラックスと解釈できます。まずはエネルギーについて考えていきましょう。弾性体のもつ単位体積あたりの全エネルギー $\mathcal{U}$ は運動エネルギー $\mathcal{U}^k$ と歪エネルギー $\mathcal{U}^p$ の和で

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^k + \mathcal{U}^p \tag{5.12}$$

と書くことが出来ます。波線に垂直な単位面積を通して流れるエネルギーフラックス K[(1)] は

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{T} \cdot \partial_t \boldsymbol{s} \tag{5.13}$$

で定義されます。運動エネルギーと歪エネルギーが等しいことから、全エネルギー $\mathcal{E}$ は

$$\mathcal{U} = \rho \left|\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t}\right|^2 \tag{5.14}$$

注 10) デモ http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/knishida/Seismology/Love_wave.html を参照のこと。

で表すことが出来ます。ここで A は波の振幅です。具体的に P 波 S 波それぞれの場合に

$$\boldsymbol{K} = \begin{cases} \alpha \hat{\boldsymbol{n}} \mathcal{U} & \text{P 波} \\ \beta \hat{\boldsymbol{n}} \mathcal{U} & \text{S 波} \end{cases} \tag{5.15}$$

ここで $\hat{\boldsymbol{n}}$ は波の進行方向です。エネルギー保存則は

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{K} = 0, \tag{5.16}$$

となります。

エネルギーフラックスと波線の対応は、流体力学で言うところの粒子速度と流線に対応します。またエネルギーフラックスは波線密度とも対応します。波線の密度が高いほどエネルギーフラックスは大きく、振幅が大きくなります。図 5.1 と 3 次元グリーン関数の対応を考えると分かりやすいと思います。

問題 5.1

1. 平面波 (P 波) の場合に、運動エネルギーとひずみエネルギーが等しいことを示せ。
$$\frac{1}{2} T_{ij} E_{ij} = \frac{1}{2} \rho \left| \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t} \right|^2 \tag{5.17}$$
2. P 波 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{p} f(t - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x})$ を考える。式 5.13 からエネルギーフラックスを計算せよ。
3. 以下の不均質 P 波 ($z < 0$ での伝播を仮定) が伝播するときにエネルギーフラックスを計算せよ。ここで不均質 P 波はポテンシャル $\phi = \sin(\omega t - kx) \exp(\xi z)$ で表現でき、変位は
$$s_x = -k \cos(\omega t - kx) \exp(\xi z) \tag{5.18}$$
$$s_z = \xi \sin(\omega t - kx) \exp(\xi z), \tag{5.19}$$
と書けるとする。

5.3 P-SV 波と SH 波

次に一番重要な不連続面である自由表面 (地表に対応) を考えてみましょう。$z < 0$ に一様な物質が満たされており、$z = 0$ で自由表面 (T_{iz} が 0) となる場合を考えてみましょう (図 5.7)。このシンプルなモデルは、地表面の効果を考える上で重要です。地表を導入したことから、S 波は 2 種類に分類できます。図 5.6 を見てみましょう。鉛直平面内 (xz 平面) で振動する SV 波と、水平面 (xy 面) 内で振動する SH 波に分類できます。地球は多くの場合水平成層構造をしているため、SV 波 SH 波の分類は有用です。この章では、まず SH 波のち表面での反射を考え、次に SV 波、P 波の地表での反射変換について考えていきましょう。

5.3.1 運動方程式とフック則

ここでは簡単のために図 5.6 にあるように波面内に y 軸をとり、運動が y 方向には依存しない 2 次元問題を考えます。この場合

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \tag{5.20}$$

となりります。この場合運動方程式とフック則を書き下してみましょう。

運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \tag{5.21}$$

$$\rho \frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \tag{5.22}$$

$$\rho \frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \tag{5.23}$$

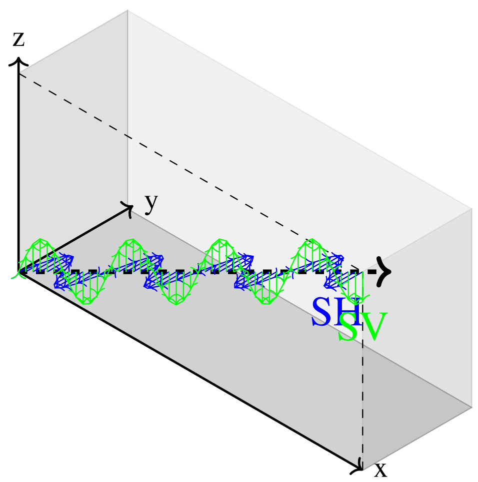


図 5.6　SH 波と SV 波の伝播とその振動方向。

と書くことができ、フック則は

$$T_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial s_x}{\partial x} + \lambda \cancel{\frac{\partial s_y}{\partial y}} + \lambda \frac{\partial s_z}{\partial z} \tag{5.24}$$

$$T_{xz} = \mu\left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x}\right) \tag{5.25}$$

$$T_{yx} = \mu\left(\frac{\partial s_y}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial s_x}{\partial y}}\right) \tag{5.26}$$

$$T_{yz} = \mu\left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \cancel{\frac{\partial s_z}{\partial y}}\right) \tag{5.27}$$

$$T_{zz} = \lambda\frac{\partial s_x}{\partial x} + \lambda \cancel{\frac{\partial s_y}{\partial y}} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial s_z}{\partial z} \tag{5.28}$$

となります。

応力の項を落として落として整理すると

$$\rho\frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_z}{\partial z}\right) \qquad + \mu\left(\frac{\partial^2 s_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_x}{\partial z^2}\right) \tag{5.29}$$

$$\rho\frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2} = \qquad + \mu\left(\frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_y}{\partial z^2}\right) \tag{5.30}$$

$$\rho\frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_z}{\partial z}\right) \qquad + \mu\left(\frac{\partial^2 s_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_z}{\partial z^2}\right) \tag{5.31}$$

と書くことができます。変位の x 成分と z 成分はカップルする一方、s_y は他の 2 つの成分とでカップルしていることが分かります。s_y は水平面内に振動する S 波を表すため SH 波と呼び、s_x と s_z は P 波と垂直面内で振動する S 波からなるため P-SV 波と呼びます。後ほどの章で述べるように、地球が水平性層構造の場合にも一般的に、P-SV 波と SH 波は運動方程式を分離出来ます。そのため地震波形を解析する際には、水平動を transverse 成分と radial 成分に回転すると便利です。radial 成分は震源と観測点を結んだ方向に平行な成分で P-SV 波に対応し、transverse 成分は水平動のうち radial 成分に直交する成分です。

5.3.2 P-SV 波と SH 波の場合の平面波: ベクトルポテンシャルのとり方

地震波動場を考える場合には、3.4.1 節で説明したように、ポテンシャルを導入することが有効です。次節で考えるように P-SV の場合の平面波を考える際には特に便利です。既に述べたようにベクトルポテンシャルに自由度 1 つ分の自由度があります。直交座標で水平多層構造での波動伝播を考える場合

$$
\boldsymbol{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi \end{pmatrix}}_{SH} \qquad + \nabla \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}}_{SV} \tag{5.32}
$$

ととると、SV と SH を分離出来見通しが良くなります [6]。ベクトルポテンシャルのとり方には任意性があるために、問題に対して便利なとり方を取ることができます。今後の計算のため 2 次元 xz 平面に沿って伝播する場合について書き下しておきます。今ポテンシャルは y に依存しないとすると、y に関する偏微分は消えてシンプルな形となります。以下書き下していない成分は 0 となります。

P 波

$$
s_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad s_y = 0, \qquad s_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{5.33}
$$

$$
E_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad E_{xz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \qquad E_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{5.34}
$$

$$
T_{xx} = E\frac{(1-\nu)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad T_{xz} = \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \quad T_{zz} = E\frac{(1-\nu)\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \nu\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{5.35}
$$

SV 波

$$
s_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \qquad s_y = 0, \qquad s_z = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{5.36}
$$

$$
E_{xx} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z}, \qquad E_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}\right), \qquad E_{zz} = -E_{xx} \tag{5.37}
$$

$$
T_{xx} = -E\frac{(2\nu-1)\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z}}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad T_{xz} = \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}\right), \quad T_{zz} = -T_{xx} \tag{5.38}
$$

SH 波

$$
s_x = 0, \qquad s_y = -\frac{\partial \chi}{\partial x}, \qquad s_z = 0 \tag{5.39}
$$

$$
E_{xx} = 0, \qquad E_{xy} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \qquad E_{yz} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}, \tag{5.40}
$$

$$
T_{xx} = 0, \qquad T_{xz} = -\frac{E}{1+\nu}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \qquad T_{yz} = -\frac{E}{1+\nu}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z} \tag{5.41}
$$

以下平面波の振幅を変数 (例えば A, B, C) とします。次節では、

$$\phi = \frac{A}{\omega i} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} \tag{5.42}$$

$$\psi = -\frac{B}{p_x \omega^2} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} \tag{5.43}$$

$$\chi = \frac{C}{\omega i} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} \tag{5.44}$$

というポテンシャルを考え、対応する振幅を議論していきます。

5.4 自由表面での SH 波の反射

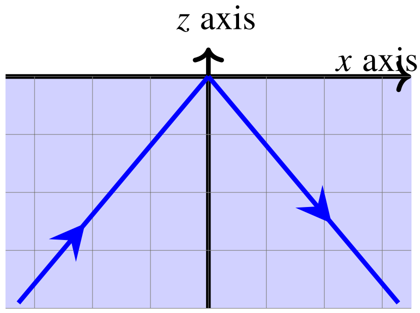


図 5.7

まず SH 波から見ていきましょう。$z <= 0$ に弾性体があり、$z = 0$ で自由表面であるとすると、SH 波が自由表面に入射角 φ で入射した場合の式 5.30 の一般解は

$$s_y = Ae^{-i\omega(t-p_x x-p_z z)} + Be^{-i\omega(t-p_x x+p_z z)} \tag{5.45}$$

と書くことが出来ます。A, B は積分定数で、第 1 項は入射波で第 2 項は反射波を表しています。自由表面での境界条件は

$$T_{zy} = -\mu\frac{\partial s_y}{\partial z} = 0 \tag{5.46}$$

と書けることから $A = B$ となり、反射波が入射はと同位相であることが分かります。地表での変位は

$$s_y = 2Ae^{-i\omega(t-px)} \tag{5.47}$$

と 2 倍の振幅になります。

この結果は鏡像法として解釈することが出来ます。入射波 $Ae^{-i\omega(t-p_x x-p_z z)}$ を考えると境界条件を満たすためには鏡像である $Ae^{-i\omega(t-p_x x+p_z z)}$ を考えると、自由表面で応力が 0 になります。

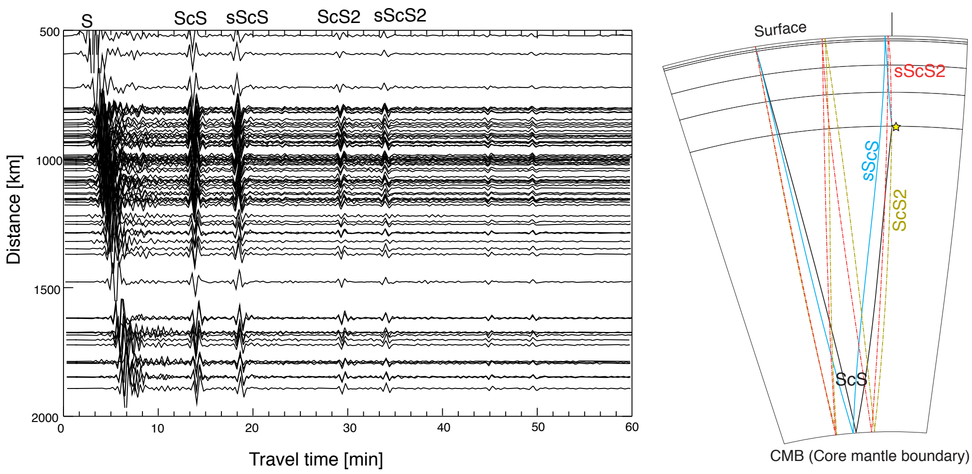


図 5.8　左: ScS の多重反射の例。小笠原の深発地震 (2015/5/30) を日本の F-net で観測した記録。周期 30-200 秒でバンドパスフィルターをかけている。右: ScS, sScS, ScS2, sScS2 の波線のプロット。

SH の反射として ScS の多重反射の例 (図 5.8) を見ていきましょう。地表は応力がゼロの境界条件で表現できます。外殻は流体のため S 波が存在できず、応力 0 の境界条件を満

たします。図中見かけ速度が速い波が地表と外殻の間を多重反射する波です[注 11)]。1 回反射の波形 (ScS) と 2 回反射 (ScS2) の波形が同位相であることも見て取れます。

5.5 自由表面での P-SV 波の反射

今ある周波数 ω で、入射 P 波 ($\boldsymbol{p}_\alpha^{in}$) と入射 SV 波 ($\boldsymbol{p}_\beta^{in}$) を考え、その反射 P 波 ($\boldsymbol{p}_\alpha^{out}$) と反射 SV 波 ($\boldsymbol{p}_\beta^{out}$) を考えると

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{A}_\alpha^{in} e^{i\omega(\boldsymbol{p}_\alpha^{in}\cdot\boldsymbol{x}-t)} + \boldsymbol{A}_\alpha^{out} e^{i\omega(\boldsymbol{p}_\alpha^{out}\cdot\boldsymbol{x}-t)} + \boldsymbol{A}_\beta^{in} e^{i\omega(\boldsymbol{p}_\beta^{in}\cdot\boldsymbol{x}-t)} + \boldsymbol{A}_\beta^{out} e^{i\omega(\boldsymbol{p}_\beta^{out}\cdot\boldsymbol{x}-t)} \tag{5.48}$$

変位を $\boldsymbol{s}$ を書くことが出来ます。ここで A は波の振幅と振動方向を表します。見通しを良くするために y 方向に伝播する波を xz 平面で考え、以下式を書き下していきます。

入射波と反射波の slowness ベクトルは

$$\boldsymbol{p}_\alpha^{in} = \begin{pmatrix} p \\ \xi \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_\alpha^{out} = \begin{pmatrix} p \\ -\xi \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_\beta^{in} = \begin{pmatrix} p \\ \eta \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_\beta^{out} = \begin{pmatrix} p \\ -\eta \end{pmatrix}, \tag{5.49}$$

と書けます。また振幅と振動方向を表す $\boldsymbol{A}$[注 12)]は

$$\boldsymbol{A}_\alpha^{in} = A\begin{pmatrix} p \\ \xi \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_\alpha^{out} = B\begin{pmatrix} p \\ -\xi \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_\beta^{in} = C\begin{pmatrix} \eta \\ -p \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_\beta^{out} = D\begin{pmatrix} \eta \\ p \end{pmatrix}, \tag{5.50}$$

となります。以上まとまると、

$$s_x(x,z)e^{i\omega(t-px)} = p(Ae^{i\omega\xi z} + Be^{-i\omega\xi z}) + \eta(Ce^{i\omega\eta z} + De^{-i\omega\eta z}) \tag{5.51}$$

$$s_z(x.z)e^{i\omega(t-px)} = \xi(Ae^{i\omega\xi z} - Be^{-i\omega\xi z}) + p(-Ce^{i\omega\eta z} + De^{-i\omega\eta z}) \tag{5.52}$$

と書くことが出来ます。

以後、入射 P 波 ($C = 0$)、入射 SV 波 ($A = 0$) の場合について、境界条件 $T_{zx}(0) = 0$, $T_{zz}(0) = 0$[注 13)]

$$2p\xi(A-B) + (\eta^2 - p^2)(C-D) = 0, \tag{5.54}$$

$$(\eta^2 - p^2)(A+B) - 2p\eta(C+D) = 0, \tag{5.55}$$

という関係を満たす必要があります。

注 11) 振幅が徐々に小さくなっているのは減衰の影響です。マントルの減衰構造を推定する際の情報になります

注 12) S 波の振動方向分かりづらいので注意。入射角が 90° に近づくと定義上、$\boldsymbol{A}_\beta^{in}$ と $\boldsymbol{A}_\beta^{out}$ は逆符号になる。

注 13) 少し計算がめんどくさいが、

$$p^2\lambda^2 + \xi^2(\lambda+2\mu) = (p^2+\xi^2)(\lambda+2\mu) - 2p^2\mu = \rho(1-2p^2\beta^2) = \mu(\eta^2-p^2) \tag{5.53}$$

から、導出できます。

ここで振動方向 (polarization vector) を

$$\hat{\boldsymbol{n}}_\alpha^{in} = \begin{pmatrix} p \\ \xi \end{pmatrix} \alpha, \qquad \hat{\boldsymbol{n}}_\alpha^{out} = \begin{pmatrix} p \\ -\xi \end{pmatrix} \alpha, \tag{5.56}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}_\beta^{in} = \begin{pmatrix} \eta \\ -p \end{pmatrix} \beta, \qquad \hat{\boldsymbol{n}}_\beta^{out} = \begin{pmatrix} \eta \\ p \end{pmatrix} \beta \tag{5.57}$$

と定義するし振幅 $\boldsymbol{s}$ と内積をとり、その大きさを評価していきます。ここで注意する点はSV 波の振動です。振動方向は x 成分が正となるように取っています。水平方向に伝播する SV 波を考える場合には、$\hat{\boldsymbol{n}}_\beta^{in}$ と、$\hat{\boldsymbol{n}}_\beta^{out}$ が逆方向を向いてしまうことに注意が必要です (図 5.10 参照)。

5.5.1 P 波入射の場合

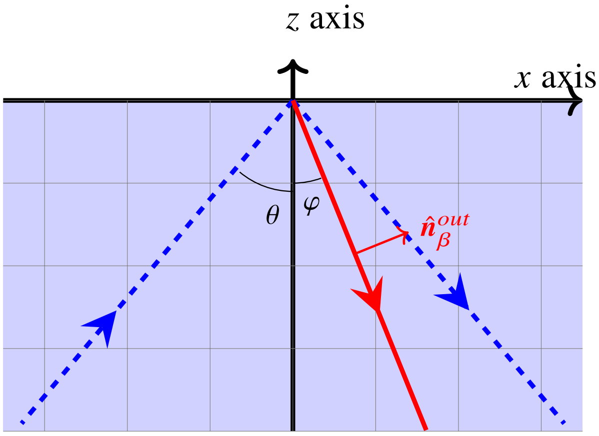


図 5.9　P 入射の場合。青の点線が入射 P 波を表し、赤の実線が変換 S 波を表す。SV 波の振動方向正の向きも赤矢印で図示している。

P 波入射の場合は、S 波入射が無いと $(C = 0)$ 言い換えることが出来ます。P 波から P 波への反射係数 $R_{PP} = (B/\alpha)/(A/\alpha)$ は

$$R_{PP} = -\frac{(\eta^2 - p^2)^2 - 4p^2\xi\eta}{(\eta^2 - p^2)^2 + 4p^2\xi\eta}, \tag{5.58}$$

と書けます。

P 波から S 波への反射係数 $R_{PS} = (D/\beta)/(A/\alpha)$ は

$$R_{PS} = \frac{4p\xi(\eta^2 - p^2)}{(\eta^2 - p^2)^2 + 4p^2\xi\eta}\frac{\alpha}{\beta}, \tag{5.59}$$

と書くことが出来ます。図 5.12 に入射角 θ に対して反射係数 R_{pp} と R_{PS} をプロットしました。入射角 0° と 90° で S 波への変換が、境界条件を満たすために 0 となっていることが分かります。また境界条件を満たすために、反射 P 波の係数が-1 となり、入射 P 波と打ち消しあっている事も分かります。特に 90° の場合には入射 P 波と反射 P 波が完全に相殺するために、波動場全体がゼロになることが分かります (5.6.1 節も参照)。

スネルの法則

既に示したように、境界条件を満たすためには入射波・反射波ともに e^{-px} の依存性を持たなくてはなりません p[注 14)]。p が保存量であるためには、

$$\frac{\sin\varphi}{\beta} = \frac{\sin\theta}{\alpha}. \tag{5.60}$$

を満たす必要があり、これはスネルの法則に他なりません。

エネルギー保存則

地表を含む薄い板上の領域でエネルギーの収支を考えてみましょう。鉛直方向のエネルギーフラックスは入射と反射で釣り合う必要があります。エネルギー保存則は

$$\alpha\cos\theta = \beta\cos\varphi|R_{PS}|^2 + \alpha\cos\theta|R_{PP}|^2, \tag{5.61}$$

と書くことが出来ます。

問題 5.2

1. 式 5.58 を導出しなさい。
2. 式 5.59 を導出しなさい

注 14) 第 7 章の波線理論で解説しますが、p は運動量と対応づけることの出来る量のために p という文字を使いました。

5.5.2 SV 波入射の場合

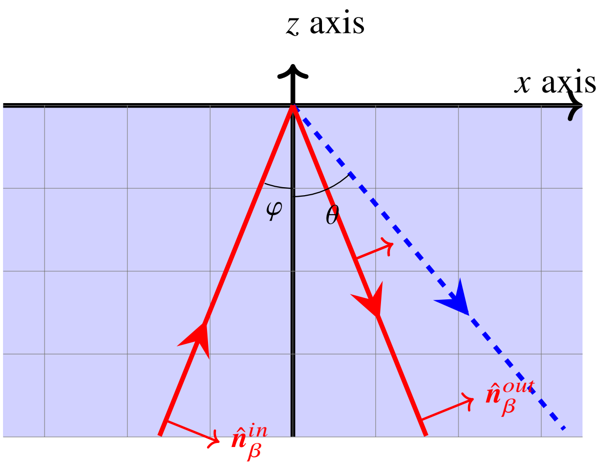


図 5.10　SV 入射の場合。赤の実線が入射 SV 波を表し、青の点線が変換 P 波を表す。SV 波の振動方向正の向きも赤矢印で図示している

単位振幅 ($C = 1$) をもつ SV 波が入射角 (図 5.10 中の φ) が 25° で入射した場合について考えてみます。図 5.11 をみると、入射 SV 波、反射 SV 波、反射 P 波の波面を見て取れます。それぞれの波が作る地表での応力 T_{zz} を見てみましょう。それぞれ 0 以外の値を取っていることが分かります。境界条件を満たすためには、和をとったときに応力が 0 にならなくてはいけなく、実際全波動場を見た時に地表で応力 T_{zz} が 0 になっていることが分かります。境界条件は $T_{zz} = T_{xz} = 0$ を満たすような B, D の値をもとめれば良いことが分かります。未知数の和と境界条件の数が等しいので、B と D を求めることができます。

このように、S 波から S 波への反射係数 $R_{ss} = (D/\beta)/(C/\beta)$ は

$$R_{SS} = \frac{(\eta^2 - p^2)^2 - 4p^2\xi\eta}{(\eta^2 - p^2)^2 + 4p^2\xi\eta}, \tag{5.62}$$

と求まります。ここで $p = \frac{\sin\theta}{\alpha} = \frac{\sin\varphi}{\beta}, \xi = \frac{\cos\theta}{\alpha}, \eta = \frac{\cos\varphi}{\beta}$ です。

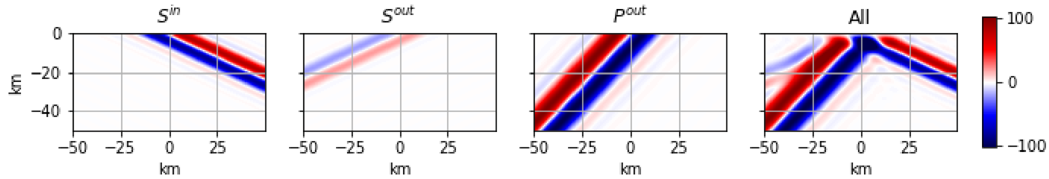


図 5.11　SV 波が入射角 (φ) が 25° で入射した場合の、反射 SV 波と反射 P 波それぞれの作る応力 T_{zz}。全波動場に対する応力は地表で 0 になっている様子が分かります。

S 波から P 波への反射係数 $R_{SP} = (B/\alpha)/(C/\beta)$ は

$$R_{SP} = \frac{4p\eta(\eta^2 - p^2)}{(\eta^2 - p^2)^2 + 4p^2\xi\eta} \frac{\beta}{\alpha}, \tag{5.63}$$

と書くことが出来ます。

図 5.12 に反射係数をプロットしました[注 15)]。入射角 0° と 90° で S 波への変換が、境界条件を満たすために 0 となっていることが分かります。

スネルの法則

同様に境界での変位・応力の連続性から、スネルの法則が成り立つことが分かります。P 波入射同様に p が保存することと、スネルの法則

$$\frac{\sin\varphi}{\beta} = \frac{\sin\theta}{\alpha}. \tag{5.64}$$

は等価です。

臨界角

φ_c

$$\varphi_c = \sin^{-1}\frac{\beta}{\alpha} \tag{5.65}$$

を越えると全反射が起きます。この時、変換 P 波の slowness の z 成分は虚数となり、鉛直方向にネットでエネルギーを運べなくなります (不均質波)。地表付近に張り付いた不均質 P 波の影響で、S 波の位相はずれてしまいます。[注 16)]

不均質 P 波

SV 波が入射角 (φ) が臨界角を越えて、75° で入射した場合についての応力 T_{zz} を見てみましょう。入射 SV 波と反射 SV 波が見て取れます (図 5.13)。また反射 SV 波の位相が 90 度程度ずれている (入射 SV 波が sin 関数半周期分のような形をしている一方、反射 SV 波は cos 関数一周期分の形をしている) 様子も見て取れます。反射 SV の位相がずれてしまったため、境界条件を満たすように不均質 P 波が存在している様子も分かります。不均質 P 波は反射点に局在化しており、$T_{zz} = 0$ となるように辻褄を合わせている様子が分かります。

注 15) 図ではポアソン物質の場合を計算しました。$\varphi = 30°$ のときに一度 R_{SS} が 0 になっています。これは定性的に言うと、反射 P 波の振動方向と入射 S 波の振動方向が近いために R_{SR} が大きくなったためと考えられます。ポアソン物質の場合には、たまたま $\varphi = 30°$ で厳密に反射 P 波の振動方向と入射 S 波の振動方向が一致しますが、一般に厳密に成り立つわけではありません。

注 16) 問題 5.1 で求めたように、不均質波は局所的に見た時エネルギーを上下に運びますが、ネットでは 0 となります。臨界角を超えると不均質 P 波は S 波に地表でピッタリと張り付き、S 波から鉛直方向にエネルギを受け取り、少し時間が遅れてエネルギーを戻します。不均質 P 波が一時エネルギーをもつために、S 波の位相はずれてしまいます。

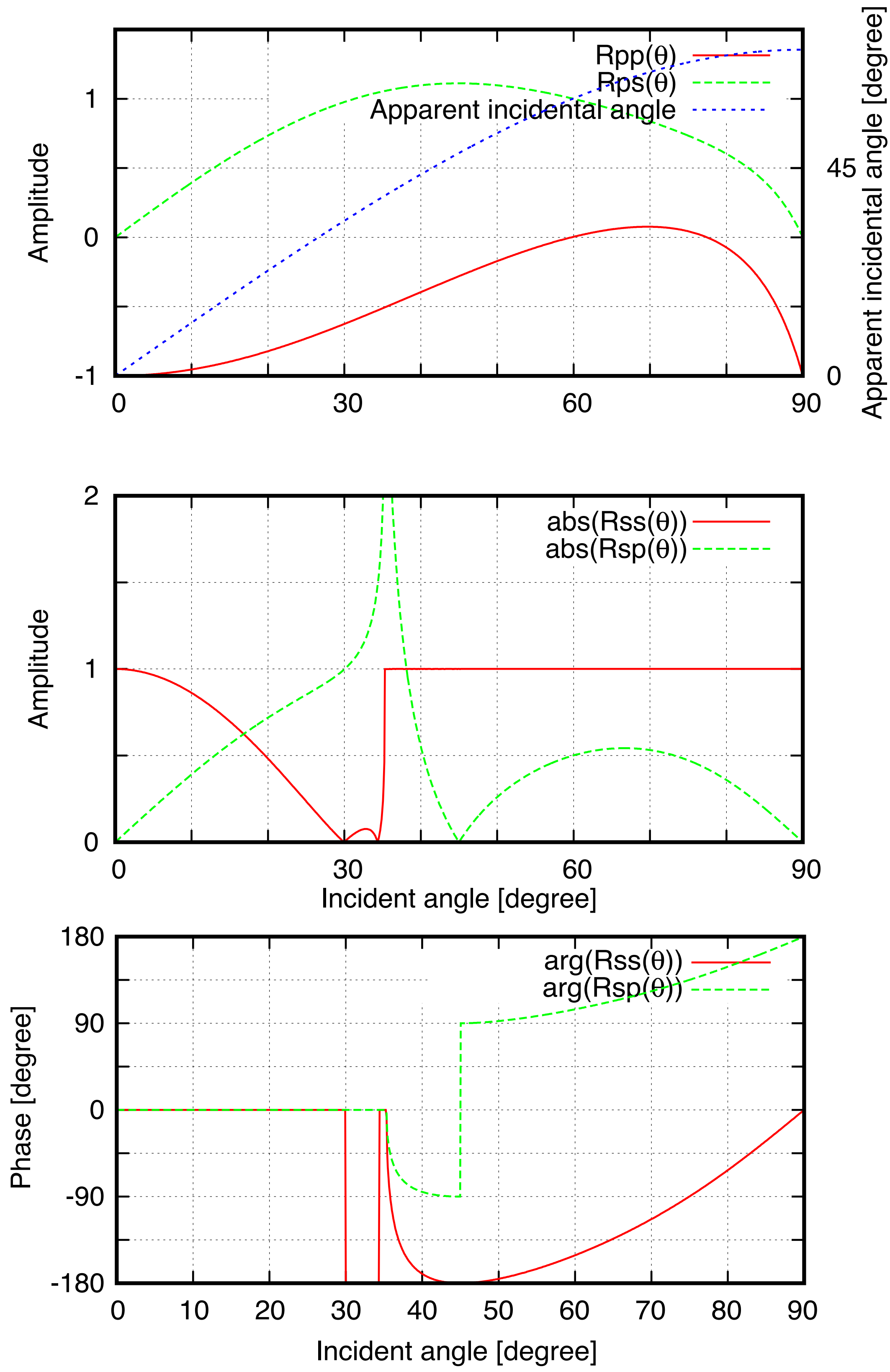


図 5.12　自由境界表面での反射・変換係数。R_{sp} は発散するわけではなく有限の大きさを持つ。

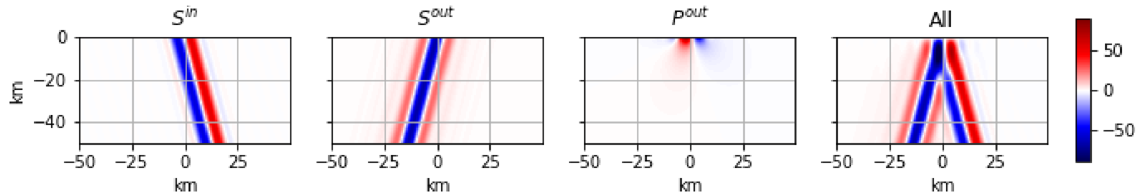


図 5.13　SV 波が入射角 (φ) が 75° で入射した場合の、反射 SV 波と反射 P 波がそれぞれの作る応力 T_{zz}。 全波動場に対する応力は地表で 0 になっている様子が分かります。

エネルギー保存則

地表を含む薄い板上の領域でエネルギーの収支を考えてみましょう。鉛直方向のエネルギーフラックスは入射と反射で釣り合う必要があります。臨界角に至るまで、エネルギー保存則は

$$\beta \cos\varphi = \beta \cos\varphi |R_{SS}|^2 + \alpha \cos\theta |R_{SP}|^2, \tag{5.66}$$

と書くことが出来ます。臨界角を超えると反射波が不均質波となり、上下方向にネットでエネルギーを運べなくなるため、

$$1 = |R_{SS}|^2, \tag{5.67}$$

となります。

問題 5.3

1. 式 5.62 を導出しなさい。
2. 式 5.63 を導出しなさい

SH 波と P 波の類似性と違い

SH 波と P 波はともに一変数で記述出来、スカラーの波動波動方程式を満たすために振る舞いは非常に似ています。しかし、境界条件の現れ方が違うために、見かけ上反射係数が変わってしまいます。ここでは、この点に注目してみましょう。

ここで xz 平面内を伝播する音波と SH 波を考えます。支配方程式はそれぞれ、

$$\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \tag{5.68}$$

$$\rho \frac{\partial^2 s_y}{\partial t^2} = \mu \left(\frac{\partial^2 s_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_y}{\partial y^2} \right) \tag{5.69}$$

と書くことが出来ます。ともに 2 次元スカラーの波動方程式で記述出来ることが分かります。例えば音速と SH 波速度が同じ場合には、p と s_y は同じ解を持つことが分かります。

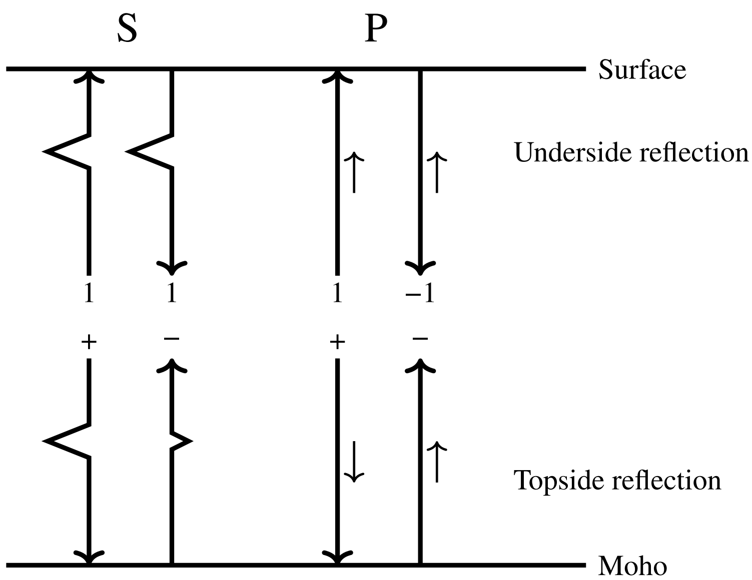


図 5.14　P 波と S 波の鉛直入射を考えた場合の反射係数と、その振動方向。

ただ一点注意すべき点があります。音波は圧力を変数に取っており、SH 波は変位を変数に取っている点です。自由表面を考えると大きな違いが出てきます。音波を考える場合には $p = 0$ が自由表面での境界条件となります。一方 $z = 0$ に自由表面を考えると (例えば図 6.3)、SH 波の自由表面での境界条件は

$$-\rho \frac{\partial s_y}{\partial z} = 0 \tag{5.70}$$

と書けます。これは音波の場合に当てはめると剛体壁の境界条件に対応します。つまり P 波での圧力に関する地表での反射係数は-1 ですが、SH 波での地表での反射係数は 1 となります。応力を変数と取るか、変位を変数と取るかの違いで、ともに地表での応力は 0 と

なります。音波とのアナロジーは有効ですが、応力を変数に取っている点に注意するようにしましょう。

この違いは平面波の反射係数に顕著に表れます。単純な場合として、P 波と S 波の鉛直入射を考えてみましょう (図 5.14)。P 波の振動方向は自由表面の反射で反転しますが、S 波は反転しません。下方に高速度層があった場合の P の反射波 (次章参照) の極性は反転しません。反射波の極性には十分注意しましょう。

問題 5.4

1. 半無限媒質 (3 次元) に満たされいている流体中を P 波が伝搬する問題を考える。P 波の平面波入射を考え、入射角に対して反射係数を求めなさい。
2. 得られた結果を、SH 波の反射係数と比較し物理的に考察しなさい。
3. P-SV 問題での P 波の反射の結果と比較しなさい。特に入射角が 0° と 90° の場合について考察すること。

5.5.3 P-SV 波の見かけの入射角

地震の観測波形を解析するさいに粒子軌跡 (particle motion) は重要な手がかりを示してくれます。例えば図 5.5.3 を見てみましょう。先ほど例としてプロットした小笠原の深発地震を広帯域地震計で捉えた例です。P 波部分の上下動と水平動 (radial 成分) をそれぞれ縦軸・横軸に取ってプロットした図です。斜めに振動している様子がわかると思います。振動方向が鉛直軸となす角はおおよそ入射角と対応することが知られています。以下具体的に見ていきましょう。

まずは P が入射している場合を考えましょう。鉛直成分 s_z と水平成分 s_x の振幅比を計算すると

$$\frac{s_x}{s_z} = \frac{p(A+B)+\eta D}{\xi(A-B)+pD} = \frac{2p\eta}{\eta^2-p^2} = \tan 2\varphi \tag{5.71}$$

となります。P 波の振動方向を θ' とすると

$$\theta' = 2\varphi, \tag{5.72}$$

と書くことが出来ます。図 5.12 に θ と θ' の関係をプロットしました。入射角が十分に小さく、ポアソン物質 ($\alpha = \sqrt{3}\beta$) を伝播している場合にはさらに単純化出来、

$$\theta' = 2\varphi \sim \frac{2\beta}{\alpha}\theta \sim 1.15\theta \tag{5.73}$$

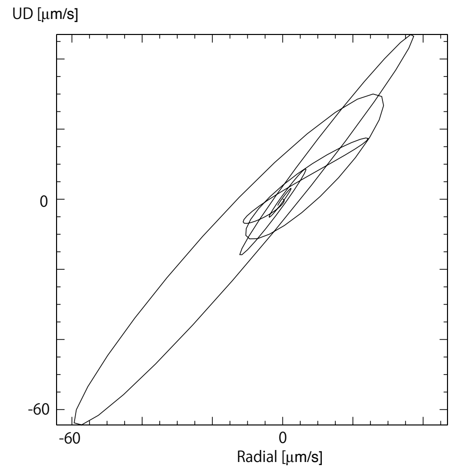


図 5.15　P 波の粒子軌跡の一例。F-net 観測点 福江 (五島列島)

となり、振動方向を入射角とする近似はそれほど悪くないことが分かります。

S 波入射に対しては $A=0$ を考えれば良く、同様に簡単な計算から、s_x/s_z は

$$\frac{s_x}{s_z} = \frac{pB+\eta(C+D)}{-\xi B+p(-C+D)} = -\frac{\eta^2-p^2}{2p\xi} \tag{5.74}$$

と計算することが出来ます。S 波の入射角が臨界角より十分に小さな角で入射する場合には (遠地の地震の場合にはこの条件を満たします)

$$\varphi' = 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\varphi = 2\frac{\beta}{\alpha}\varphi \tag{5.75}$$

と書く事が出来ます。臨界角よりも浅い角度で入射した場合には不均質 P 波の影響で位相がずれてしまい、結果として粒子粒子が直線から外れてしまい、入射角との単純な比較は出来なくなります。

P 波の振動方向が入射方向と一致することは何となく直感的と感じるかもしれませんが、決して自明な事ではありません。例えば流体に近い媒質を想定し、$\beta \to 0$ という極限を考えてみましょう。この場合には振動方向は 0 度となります。これは流体の場合を考え

てみましょう。図 5.16 では、地中に圧力ソースを考えています。水面での境界条件を満たすために、逆符号の圧力ソースを鏡面対称の位置に考えます。この場合地表での粒子軌跡を考えると、上下動になります。この関係はいつでも成り立つために、水面での粒子軌跡は入射角によらずいつでも鉛直となります。

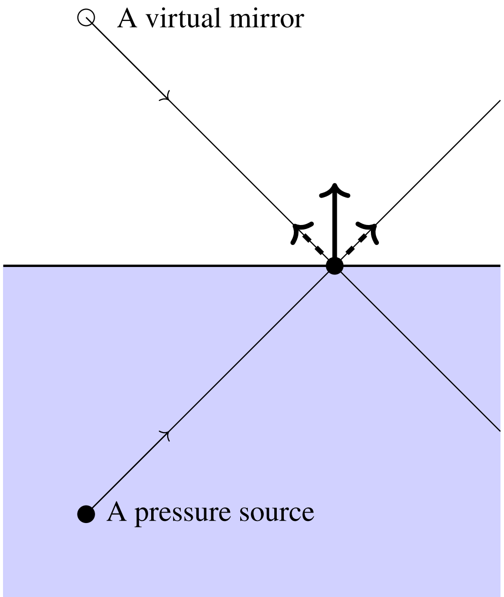


図 5.16　流体媒質中での自由表面付近での粒子軌跡。

問題 5.5
1. 式 5.71 を導出しなさい。 2. 式 5.74 を導出しなさい。

5.6 Rayleigh 波

これまで見てきた波は鉛直方向に自由に伝播出来る実体波でした。不均質波は臨界角を超えた SV の入射に際し副次的に存在するものでした。不均質波は単独で存在できるのでしょうか？ 自由表面が存在する場合には、[5] と呼ばれる不均質波が存在することが知られてきます。は地表付近にエネルギーを持ち、水平方向に伝播することが知られています。図 5.17 は 2014 年チリ地震時の観測記録です。周期 100 秒より長周期の波束が全球的に伝播している様子が見て取れます。R1、R2 とラベルされている波がで、おおよそ一定の速度で伝播している様子が分かります。チリ地震は震源の深さが 35 km と今考えている波の波長よりも十分に短いために、良く励起されていることが分かります。まずこの波がどういった性質のものなのか、定性的に考えてみましょう。

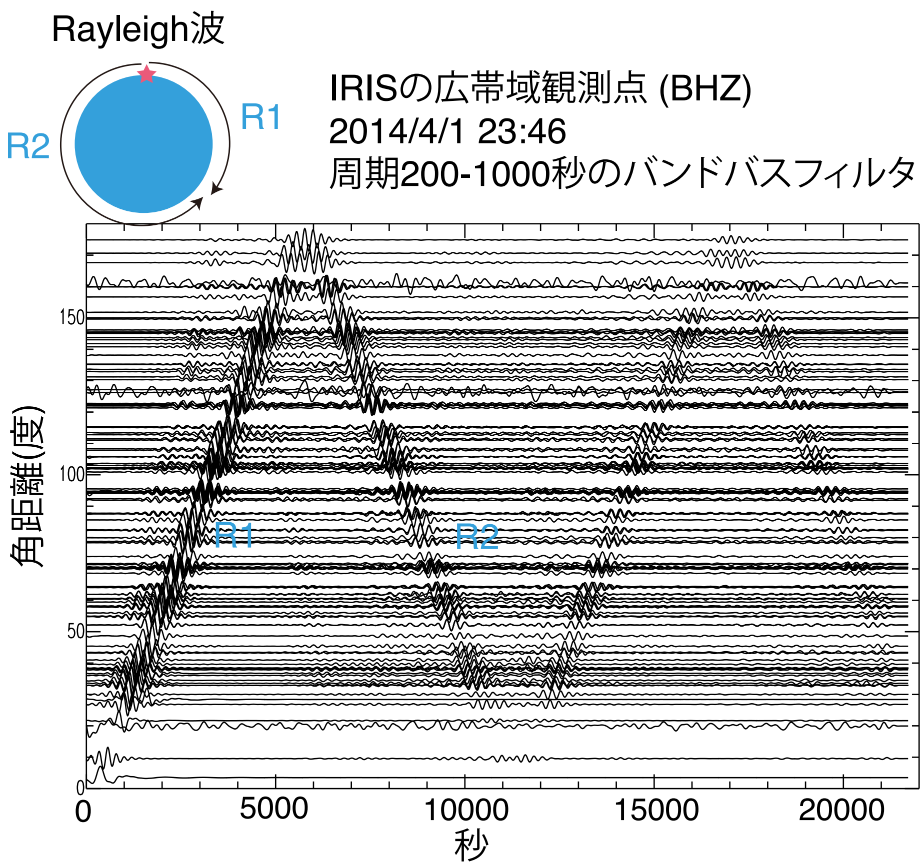


図 5.17　2014 年 4/1 のチリで起きた地震の際に記録された上下動記録。

音波や SH 波の半無限媒質中の伝搬を考える場合には、自由表面で境界条件を満たすことが出来ないため、不均質波は存在することが出来ません。一方 P-SV 問題を考える場合には存在できることが知られています。それは、P 波的な変形と、S 波的な変形が同時に存在できるため、地表で互いに寄りかかりながら自由表面の条件を満たすことが出来るた

めです。このような不均質波はとして知られています。は地表付近にエネルギーが集中するため、浅く大きな地震が起こると、全球的に伝播が観測されます (図 5.18)。まずはその性質を定性的に考えるために、まずは[注 17)]を見てみましょう。

無限媒質を S 波が鉛直方向に振動しながら右方向に伝播する状況を考えます。そこで真ん中でスパっと半無限媒質を切り出します。そうすると自由境界表面で応力ゼロの境界条件を満たすために、応力の大きな部分が膨らみます (体積ひずみが大きい部分)。その分大きく変形してしまい結果として実効的な弾性定数が小さくなります。そのため、は S 波より伝播速度が遅くなります (S 波速度の 9 割程度)。自由境界表面の境界条件をみたすために浅い部分で体積変形をするわけですが、体積変形は S 波と比べて位相が 90 度ずれるため、粒子軌跡は楕円になります。また、水平方向の伝播速度は S 波速度・P 波速度より遅く、不均質波としてしか存在できないため、深さ方向に振幅は指数関数的に小さくなってきます。地表では振動の方向は自転車の車輪の回転と逆向きで (retrograde) す。一方深い領域では (図中青) 自転車の車輪の回転と同じ向き (prograde) になります。

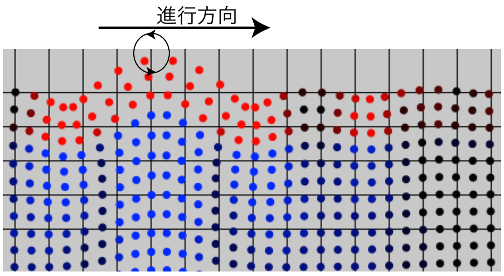


図 5.18　Rayleigh 波伝播の模式図。赤色の領域では retrograde に、青色の領域では prograde な振動をする。

5.6.1 地表に沿った波は存在できるのか?

少し定量的に考えるために、ここで問題を整理しましょう。自由平面での P-SV 波の反射・変換を考えた場合と同様に、xz 平面内での伝播を考え、y 方向には変化しないとしましょう。今満たすべき境界条件は地表で $T_{zz} = T_{zx} = 0$ という境界条件です。まず始めに、単純に音波や SH 波は半無限媒質中で水平に伝播できる考えてみましょう。

図 5.16 を思い出してもらえれば分かりますが、音波の自由表面での反射係数は-1 となります。入射波と反射波が打ち消しあうために、自由表面付近に励起源がある場合には音波は励起されません。図 5.16 で鏡像は符号が反転するために、ごく浅い圧力源の場合、逆符号である鏡像の圧力と打ち消し会うために波が励起され無いとも解釈することが出来ます。水面付近に爆発源が存在したときに音波を励起できない事実は一見物理的直感と一致しないかもしれませんが、自由境界表面の影響で弾性エネルギーがゼロとなる (4.6 節も参照のこと) を考えると、物理的に理解できると思います。

一方 SH 波の場合には 1 となるために、SH 波の場合には振幅は地表で 2 倍となり増幅されます。つまり、SH 波の場合には水平方向に伝播する波は存在します。この違いは、

注 17) デモ http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/knishida/Seismology/Rayleigh_wave.html を参考のこと

境界条件の違いによるものです。以前にも述べたように、音波に関しては圧力がスカラーの波動方程式を満たす一方、SH の場合には s_y が満たすために、変位と応力の差が効いてきています。ならば SV 波では可能でしょうか？ SV 波は水平方向に伝播する場合には境界条件を満たさないために不可能です。

5.6.2 反射係数が 0 となる場合

そこで境界条件の数に立ち返ってみましょう。$P-SV$ 問題を考える場合には、$T_{zz}=0, T_{zx}=0$ という 2 つの境界条件が必要です。今任意の入射波を考えたときに、この 2 つを消去するためには、2 つの独立な解を足し合わせる必要があります。これはまさに、前節で考えた自由表面での入射波に対する反射・変換波に対応しています。つまり、3 つの波の組み合わせが必要である事を示しています。そこで図 5.12 の SV 入射を見て見ましょう。R_{SS} を見ると、S 反射の振幅が 0 になる箇所が 2 カ所、R_{SP} を見ると P 反射が 0 になる点が 1 カ所あります。これは上手い周波数を探すと、2 つの波を組み合わせて境界条件を満たすことが可能である事を示しています。このような、つじつま合わせが可能であるか考えてみましょう。

以下で、不均質 P 波の作る T^{p}_{zx}, T^{p}_{zz} と、不均質 SV 波の作る T^{S}_{zx}, T^{S}_{zz} を考えます。このそれぞれの応力の比 T_{zx}/T_{zz} が等しくなる位相速度 p を見つければ、2 つの解を規格化して差を取ることによって境界条件をみたすことが出来ます。それでは、それぞれ応力比も見ていきましょう。

不均質 P 波

ここで不均質 P 波に対するスカラーポテンシャルを

$$\phi = e^{i\omega px}e^{-\omega\xi z}e^{-i\omega t} \tag{5.76}$$

と定義します。P 波速度を α とし、$\alpha^{-2}=p^2-\xi^2$ の関係をみたすとします。5.3.2 節の結果から、T_{zz} と T_{zx} の比は

$$\frac{T_{zx}}{T_{zz}} = -i\frac{(1-2\nu)\xi p}{(1-\nu)\xi^2-\nu p^2} \tag{5.77}$$

となることが分かります。さらにポアソン物質 $\nu=1/4$ を考え、ξ を消去し整理すると

$$\frac{T_{zx}}{T_{zz}} = -i\frac{2\sqrt{p^2-\alpha^{-2}}\,p}{2p^2-3\alpha^{-2}} \tag{5.78}$$

となります。

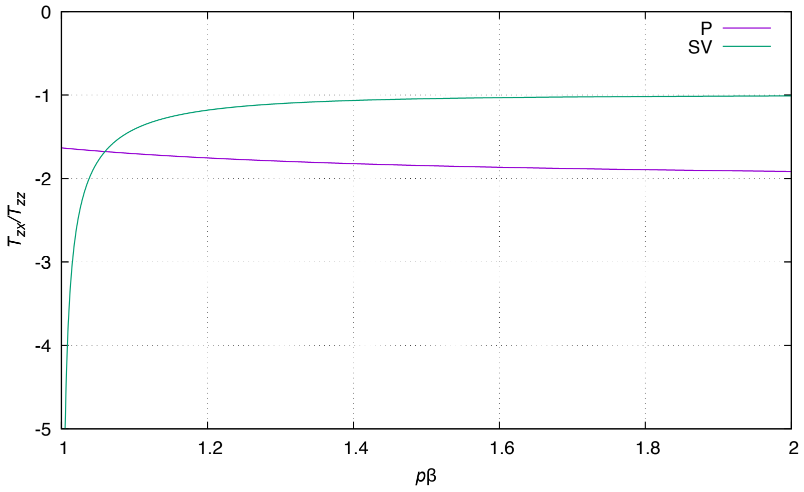


図 5.19　スローネス p に対する地表での応力比 T_{zx}/T_{zz}。ポアソン物質を考えており、スローネスは S 波速度で規格化している。$p\beta < 1$ の場合には鉛直波数が純虚数になるため (鉛直方向に伝播できるため実体波を表します) プロットしていない。

不均質 SV 波

ここで不均質 SV 波に対するベクトルポテンシャルの成分を

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = e^{i\omega px} e^{-\omega \eta z} e^{-i\omega t} \tag{5.79}$$

と定義します。ここで S 波速度を β とし、$\beta^{-2} = p^2 - \eta^2$ の関係をみたすとします。5.3.2 節の結果から、T_{zz} と T_{zx} の比は

$$\frac{T_{zx}}{T_{zz}} = -i\frac{(\eta^2 - p^2)}{2p\eta} \tag{5.80}$$

となることが分かります。η を消去し整理すると

$$\frac{T_{zx}}{T_{zz}} = -i\frac{2p^2 - \beta^{-2}}{2p\sqrt{p^2 - \beta^{-2}}} \tag{5.81}$$

となります。

ここではポアソン物質を考えて $\alpha = \sqrt{3}\beta$ と仮定します。

2 つの応力比を比較してみましょう。図 5.19 を見てみましょう。p が β^{-1} よりわずかに大きいときに 2 つの曲線が交差しており、不均質波が単独で存在できる条件を表しています。これがに対応しています。地表での応力比が一定になる条件をもう少し詳しく考えてみましょう。応力比が等しくなるという条件は

$$(\eta^2 - p^2)^2 + 4p^2\xi\eta = 0 \tag{5.82}$$

と整理することが出来ます。式の見通しを良くするために、$X \equiv p^2\beta^2$、$\gamma^2 \equiv \alpha^{-2}/\beta^{-2}$ を定義します。不均質 P 波と不均質 S 波の応力比をそれぞれ自乗して整理すると、

$$16(1-\gamma^2)X^3 - (24 - 16\gamma^2)X^2 + 8X - 1 = 0 \tag{5.83}$$

と式を変形できます。ポアソン物質の場合には

$$32X^3 - 56X^2 - 24X - 3 = 0 \tag{5.84}$$

となり、解は

$$X = \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \tag{5.85}$$

と求まります。最後の 1 つのみが $p > \beta^{-1}$ の条件を満たし、図 5.19 で求めた解と対応します。残りの 2 つの解の物理的実体は何なのでしょうか？ p から入射角に焼き直すと 30° と 34.3° に対応します。この 2 つの角度はまさに、図 5.12 でみた R_{SS} が 0 となる、つまり入射 S 波が全て反射 P 波に変換した場合と対応します。このことからも期待していた解である事が分かります。つまり入射 S 波を考え反射 S 波が 0 になる条件を探す問題を、不均質 S 波入射波のに対して変換波として不均質 P 波のみが存在する条件を探す問題に拡張したと言い換えることが出来ます。

ここで変位について整理すると

$$s_x(x,z,t) = ipB\left[e^{\omega\xi z} + \frac{1-2p\beta}{2p\beta}e^{\omega\eta z}\right]e^{i\omega(t-px)} \tag{5.86}$$

$$s_z(x,z,t) = \xi B\left[e^{\omega\xi z} + \frac{2p\beta}{1-2p\beta}e^{\omega\eta z}\right]e^{i\omega(t-px)}, \tag{5.87}$$

と書くことが出来ます。$\xi = \sqrt{p^2-\alpha^{-2}}, \xi = \sqrt{p^2-\beta^{-2}}$ ここで B は積分定数です。また物理的に意味のある解 ($z = -\infty$ で発散しない) を選ぶため,$\mathrm{Im}\,\eta < 0, \mathrm{Im}\,\xi < 0$ となるように符号を選んでいます。

図 5.20(a) はの振幅の深さ方向の分布 (s_x と s_z) を表しています。深くなるにつれて指数関数的に減少している様子がわかります。実体波と大きく異る点は、水平動と上下動で位相がずれる点です。図 5.20(b) に地表点での粒子の動きをプロットしてみました。s_x と s_z の実部を取ると $s_x \propto -sin\omega t, s_z = cos\omega t$ となるため、図の矢印の方向に回転することがわかります。今は図の左から右に向かって進んでいるため、逆方向の回転 (retrograde) していると呼びます[注 18)]。また $z = -0.25$ 付近で s_x の符号が逆転するために、これより深い点では回転方向が逆になります。この方向を順方向 (prograde) と呼びます。

なかなか言葉では説明しづらいので、web にのデモページを作りました[注 19)]。適宜参照してみてください。

は地表付近にのみエネルギーを持つために 2 次元的な波となります。そのために振る舞いは 2 次元のグリーン関数と似ています。特に振幅が $r^{1/2}$ に比例するため[注 20)]、震央距離

注 18) 自転車の車輪の回転の向きを思い浮かべると分かりやすいです。

注 19) https://www.eri.u-tokyo.ac.jp/people/knishida/Seismology/Rayleigh_wave.html

注 20) 大雑把にいうと、震央距離 r、振幅が A、伝播速度を c_R とするとエネルギーフラックスは $c_r\rho\omega A^2$ と書け、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{K} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(Kr) = 0 \tag{5.88}$$

から $A \sim r^{1/2}$ となります。

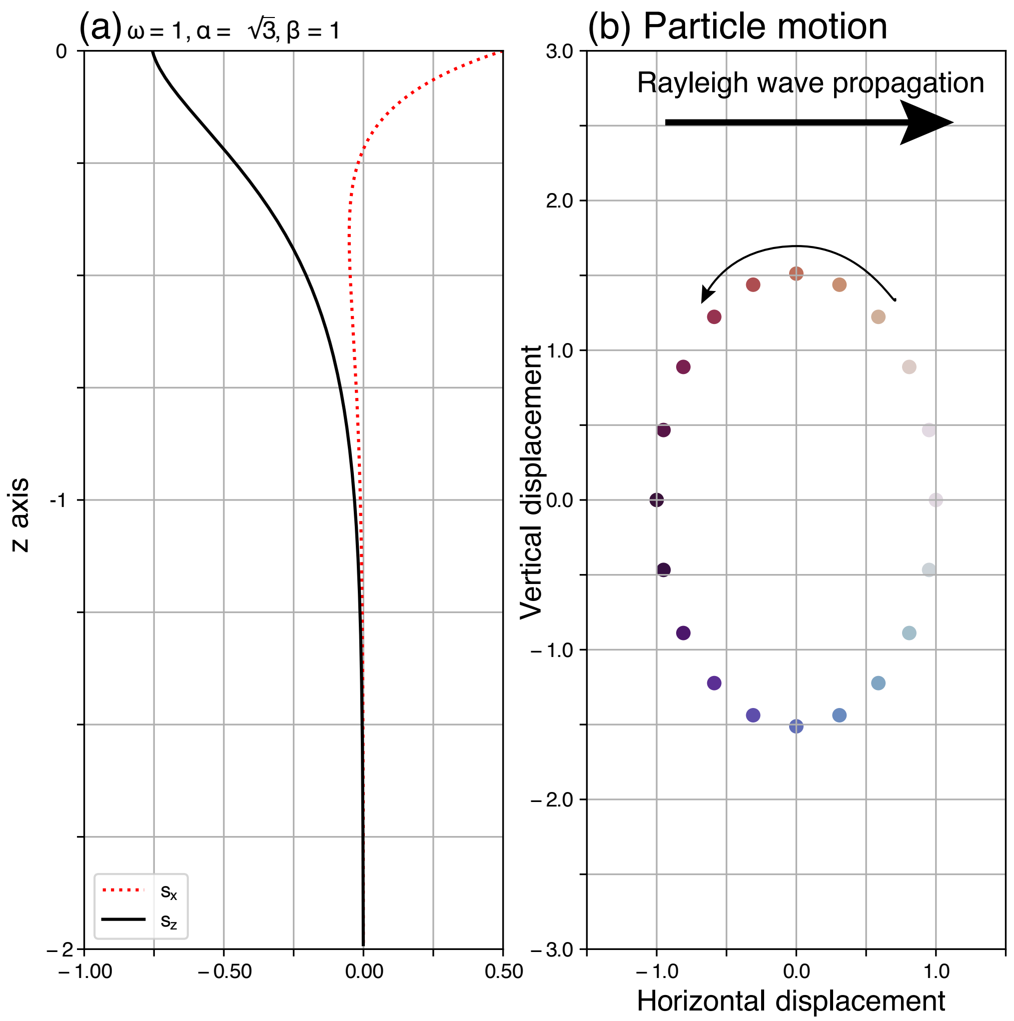


図 5.20 (a) Rayleigh 波の深さ方向の振幅分布。(b) 地表での粒子軌跡。

が遠い場合には、実体波よりも表面波が大きくなります[注 21)]。また、震源が波長よりも深い場合には効率的に表面波は励起されません (深さ方向には指数関数的に減衰するため)。

5.6.3 不均質 S 波入射の問題として捉える

ここで、は P-SV 不均質波の反射・透過の問題として解釈してみましょう。横軸に水平方向のスローネスをとり、S 波のスローネスよりも大きな値でも反射・変換係数を計算してみます (図 5.21)。ここで 5.5.2 節と同じ定式化を考えます。この場合、入射 SV 波が不均質波だとして、鉛直下向きに指数関数的に減衰する解を選ぶとします。そうすると、反

注 21) グリーン関数の遠地項を思い出すと、実体波は r^{-1} に比例することが分かります。表面波同様エネルギー保存を考えることからも導くことが出来ます。

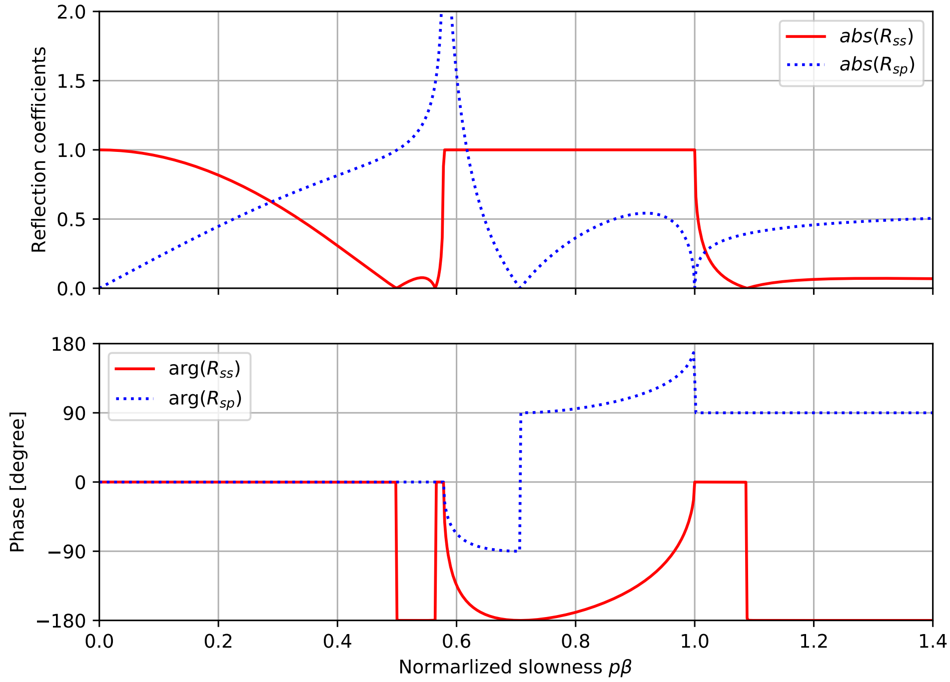


図 5.21　不均質波入射にたいする反射透過係数。Slowness が $1/\beta$ よりわずかに大きい点で R_{ss} がゼロとなっている様子が見て取れます。またと対応する変換係数 R_{sp} の定義は $(D/\alpha)/(C/\beta)$ である事 (5.5.2 節参照) から、地表での粒子軌跡と結びつけることが出来ます。。

射不均質 SV 波は深さに伴って振幅が発散してしまう解を選ばなくてはいけなくなります。一見物理的には不可能に見えますが、ここで表現定理を思い出してみましょう。入射 SV 波の振幅が十分に小さくなる深さに境界面を置き、境界面で応力・変位の境界条件を与えることで深さ方向に振幅が増加する不均質 SV 波を取り扱うことができます。つまり半無限媒質ではなくて媒質に底を考えることで実現可能です[注 22)]。

図 5.21 を見て見ましょう。入射角が 90° と対応する $p\beta = 1$ より左側では、図 5.12 と一致している事が分かります。$p\beta$ が 1 より大きくなると入射 SV 波も不均質波となります。$p\beta = 1$ が 1 より少し大きな点で R_{ss} が 0 となる点が存在します。これはまさに、反射 S 波が存在しない点です。対応する不均質 P 波と不均質 SV 波はそれぞれ下向きに減衰する解を取ることが出来ます。このように SV 波の反射・変換の問題を一般化した問題としても捉えることが出来ます。

ToDO: Rayleigh 波の励起 Polar phase shift

[注 22)] 表現定理は、このように仮想的な操作を簡単に考えることができるので強力です。

問題 5.6

1. 式 5.83 はどのような弾性定数に対しても、$p = 1/\beta$ より大きいスローネスを持つ解がある事を示せ。
2. $\beta = 1$ としたときに、Rayleigh 波速度をポアソン比に対して図示せよ。またその傾向について物理的に考察せよ。
3. 地表での粒子軌跡の扁平率についても同様に計算し、物理的に考察せよ。

5.7 Lamb の解

この章では半無限媒質での地震波の伝播について解説してきました。一歩踏み込んで、全無限の場合同様、半無限媒質にたいするグリーン関数を解析的に導出することは出来るのでしょうか?一般的にはそのような表式は知られていませんが、地表に力源を置いた場合には解析解が得られています。この問題は Lamb の問題として知られています。

ここでは Lamb の解の最終的な結果を見ていきましょう。ここでは、Kausel (2014)(2) によって整理された解析解を紹介します。ここで、r は距離, θ は方位角, μ は剛性率, ρ は密度, ν はポアソン比, C_R は Rayleigh 波速度, C_s は S 波速度, C_P は P 波速度, t は時刻, a は C_S/C_P, κ_j は Rayleigh の特性方程式の 3 つの無次元化された解 ($= C_S/C_j$), $\gamma \equiv \kappa_1 = C_S/C_R$ は Rayleigh 根, τ は無次元化された時刻 tC_S/r を表します.

ここで Rayleigh の特性方程式は

$$16(1-a^2)\kappa^6 - 8(3-2a^2)\kappa^4 + 8\kappa^2 - 1 = 0. \tag{5.89}$$

と書くことが出来ます。Lamb の解を表すため、A, B, C, D を

$$\begin{gathered} A_j = \frac{\left(\kappa_j^2-\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{a^2-\kappa_j^2}}{D_j}, \quad B_j = \frac{\left(1-2\kappa_j^2\right)\left(1-\kappa_j^2\right)}{D_j}, \quad C_j = \frac{\left(1-\kappa_j^2\right)\sqrt{a^2-\kappa_j^2}}{D_j} \\ D_j = \left(\kappa_j^2-\kappa_i^2\right)\left(\kappa_j^2-\kappa_k^2\right), \quad i \neq j \neq k \end{gathered} \tag{5.90}$$

と定義します。

原点に x, y, z 方向に、時間方向には Heaviside の階段関数で表現出来る力を加えた場合に、あるポイントでの変位 u (r, θ, z 方向) は

$$u_{zz}(r,\tau) = \frac{(1-\nu)}{2\pi\mu r}\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1-\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\frac{A_j}{\sqrt{\tau^2-\kappa_j^2}}\right), & a<\tau<1 \\ 1-\dfrac{A_1}{\sqrt{\tau^2-\gamma^2}}, & 1\le\tau<\gamma \\ 1, & \tau\ge\gamma \end{cases} \tag{5.91}$$

$$u_{rx} = \frac{(\cos\theta)}{2\pi\mu r}\begin{cases} \dfrac{1}{2}(1-\nu)\tau^2\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\frac{C_j}{\sqrt{\tau^2-\kappa_j^2}}, & a<\tau<1 \\ 1+(1-\nu)\tau^2\dfrac{C_1}{\sqrt{\tau^2-r^2}}, & 1\le\tau<\gamma \\ 1, & \tau\ge\gamma \end{cases} \tag{5.92}$$

$$u_{\theta x} = \frac{(1-\nu)(-\sin\theta)}{2\pi\mu r}\begin{cases} \frac{1}{2}\left[1-\displaystyle\sum_{j=1}^{3}C_j\sqrt{\tau^2-\kappa_j^2}\right], & a<\tau<1 \\ 1-C_1\sqrt{\tau^2-\gamma^2}, & 1\le\tau<\gamma \\ 1, & \tau\ge\gamma \end{cases} \tag{5.93}$$

と書くことが出来ます。

5.8 参考文献

[1] F.A. Dahlen and J. Tromp. *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, Princeton, 1998.

[2] Eduardo Kausel. Lamb's problem at its simplest. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, Vol. 469, No. 2149, pp. 20120462–20120462, nov 2012.

[3] K Nishida. Global propagation of body waves revealed by cross-correlation analysis of seismic hum. *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 40, No. 9, pp. 1691–1696, May 2013.

[4] F. Omori. Note on the preliminary tremor of earthquake motion. The journal of the College of Science, Imperial University of Tokyo, Japan = 東京帝國大學紀要. 理科, Vol. 11, No. 3, pp. 147–159, 1899.

[5] John William Strutt Rayleigh. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. s1-17, No. 1, pp. 4–11, November 1885.

[6] 斎藤正徳. 地震波動論. 東京大学出版会, 2009.

2層構造での波動伝播

第 6 章

1909 年 10 月 8 日に Kulpa Valley で大きな地震が起こり、大きな被害がもたらされました。クロアチアの地震学者・気象学者の Andrija Mohorovičić はヨーロパに散らばる波形を集め、図で示した走時曲線をプロットしました (図 6.1)。走時曲線から、地殻の厚さが 54km (P 波速度 5.68 km/s) であること、マントル (P 波速度 7.75 km/s) との間に P 波速の不連続が存在することを発見しました。現在 Mohorovičić 不連続面 (Moho 面) として知られる不連続面です [2]。これまで学んできた道具立てで、モホ面での地震波の振る舞い、地震波の走時 (travel time) からいかに構造を推定したか見ていきましょう。

前章では、平面波の伝播とその反射・透過をについて学んできました。これは以下の式で示すように、波動場は平面波の重ねあわせで理解出来るため、その振る舞いは波動場を理解する基本となるためです。この章ではこれらの道具立てを基本として、無限媒質でのグリーン関数の知見を合わせて、2 層構造の媒質中を地震波動の伝播する場合を考えていきましょう。単純化のため 2 層構造を伝播する SH 波 (もしくは音波) を考えていきます。

まずは復習として、全無限媒質での 3 次元 Green 関数を考えてみましょう。単純化のため音波を考えます。Green 関数 G^{3D} は周波数領域では

$$\frac{\omega^2}{\kappa}G^{3D} + +\frac{1}{\rho_0}\nabla^2 G^{\phi} = \delta(\boldsymbol{x}) \tag{6.1}$$

を満たします。空間についても Fourier 変換し、もう一度 Fourier 逆変換すると

$$G^{3D} = -\frac{1}{\kappa}\iiint \frac{\kappa e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}}{\alpha^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) - \omega^2} dk_x dk_y dk_z \tag{6.2}$$

と書けることが分かります。この式は、Green 関数が平面波の重ね合わせで表現できることを示しています。

この章では z 軸方向に弾性波速度の違う層が 2 層積み重なっている媒質を考えます[注 1)]。z 方向には弾性波速度が変わるため上の k_z に関する積分は一筋縄では行かなくなります。

注 1) 一般に水平方向には均質で、深さ方向 (z 軸方向) に弾性波速度が変化する場合にも、以下と同様の取り扱いができます。

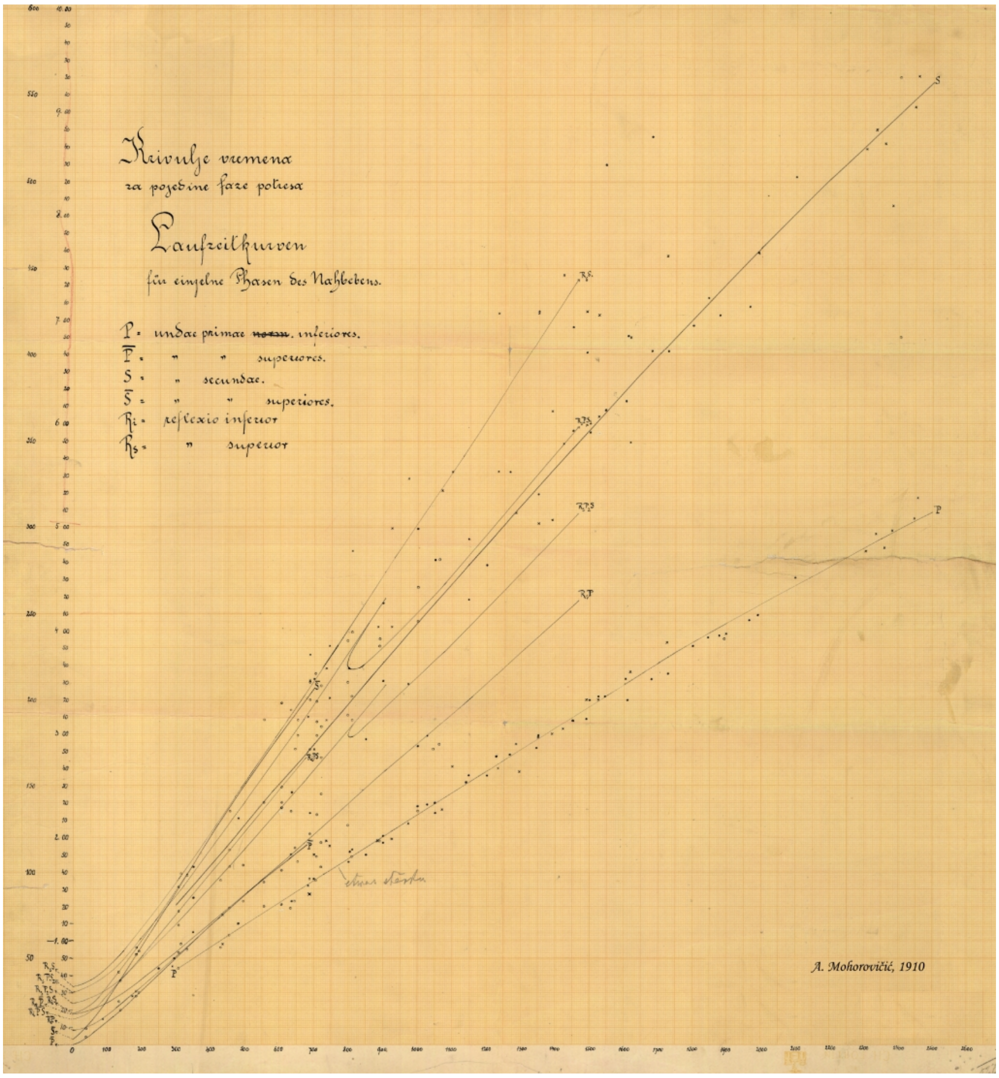


図 6.1　1909 年に起こった地震の観測された走時曲線。Mohorovičiè (1910) のクロアチア語からの英訳 [4] された論文から引用。

そこで z のみ Fourier 変換しない式を考えてみます。

$$\left(-\frac{1}{\rho_0}(k_x^2+k_y^2)+\frac{\omega^2}{\kappa}\right)G^{3D}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 G^{3D}}{\partial z^2}=\delta(z) \tag{6.3}$$

と書くことができます。これは k_x,k_y を定数とみななし、k_z を

$$k_z \equiv \sqrt{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2-k_x^2-k_y^2} \tag{6.4}$$

と定義すると、z に関する 1 次元波動方程式に関する Green 関数 (式 (2)) と同じ形をしています。

$$G^{3D}(k_x,k_y,\omega)=\frac{\rho_0 i}{2k_z}e^{-ik_z|z|}, \tag{6.5}$$

と書くことができます。k_x と k_z に関して 2 次元逆 Fourier 変換をすると

$$G^{3D}(x,y,z,\omega) = \frac{\rho_0 i}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \frac{e^{i(k_x x + k_y y - k_z|z|)}}{k_z}, \tag{6.6}$$

と書けます。全無限媒質の場合の 3 次元 Green 関数 (式 (3)) と比較すると

$$-\frac{\rho_0 i}{4\pi}\frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{\rho_0}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \frac{e^{i(k_x x + k_y y - k_z|z|)}}{k_z}. \tag{6.7}$$

この式は Weyl の積分表示とも呼ばれ、3 次元全無限 Green 関数を平面波の重ね合わせで表す事ができることを表します。さらに k_x と k_y は実数で有ることを案に想定していますが、z を分離したことに寄って、z 軸方向には自然に不均質波に拡張することができます。そのため、平面波の境界面での反射透過を考えることで、自然に 2 層媒質の波動伝搬に拡張することができます。より一般的に、層状構造を地震波動が伝播するための基本的な道具立てとして重要です。次節では、内部境界での反射・透過・屈折について見ていきましょう。

6.1 内部境界での反射・透過・屈折

6.1.1 SH 波の場合

次に SH 波の境界面での反射・屈折を考えていきましょう (図 6.2)。$z < 0$ に媒質 2 が、$z > 0$ に媒質 1 が満たされているとして、SH の平面波が上方から入射しているとします。媒質 1,2 における平面波解は

$$z > 0 : s_y = A_1 e^{-i\omega(t - p_{1x}x - p_{1z}z)} + B_1 e^{-i\omega(t - p_{1x}x + p_{1z}z)} \tag{6.8}$$

$$z < 0 : s_y = A_2 e^{-i\omega(t - p_{2x}x - p_{2z}z)} \tag{6.9}$$

と書くことが出来ます。s_y ($z > 0$) の第 1 項は入射波を表し第 2 項は反射波を s_y ($z < 0$) は屈折はを表しています。変位連続の境界条件を満たすためには $p_{1x} = p_{2x}$ である必要があります。

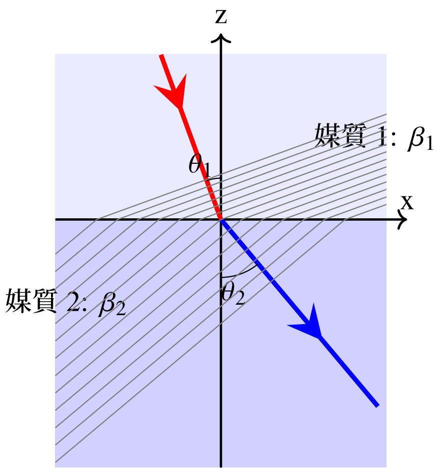


図 6.2　SH 波の内部境界での屈折

境界面での連続性を考えると、

$$\frac{\sin\theta_1}{\beta_1} = \frac{\sin\theta_2}{\beta_2} \tag{6.10}$$

と Snell の法則に従わなくては行けないことがわかります。

$z = 0$ での変位の連続性から、$A_1 + B_1 = A_2$ である必要があります。また応力の連続性から、$\mu_1 p_{1z}(A_1 - B_1) = \mu_2 p_{2z} A_2$ である必要があります。以上の関係から、反射係数 R_{12} と透過係数 T_{12} は

$$R_{12} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\mu_1 p_{1z} - \mu_2 p_{2z}}{\mu_1 p_{1z} + \mu_2 p_{2z}} = \frac{\rho_1\beta_1\cos\theta_1 - \rho_2\beta_2\cos\theta_2}{\rho_1\beta_1\cos\theta_1 + \rho_2\beta_2\cos\theta_2} \tag{6.11}$$

$$T_{12} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2\mu_1 p_{1z}}{\mu_1 p_{1z} + \mu_2 p_{2z}} = \frac{2\rho_1\beta_1\cos\theta_1}{\rho_1\beta_1\cos\theta_1 + \rho_2\beta_2\cos\theta_2} \tag{6.12}$$

と計算できます。図 6.3(上) に反射・透過係数の絶対値を入射角の関数として表示しました。反射。透過係数ともに、臨界角付近で急激に係数が大きく (傾きが無限大となっています) なっている様子を見て取れます。下図は実部と虚部を表しており、臨界角を超えると位相がずれてきている様子が分かります。

また、境界面での変位の連続性から、$1 + R_{12} = T_{12}$ を満たすことが分かります。

SH のみを考えた場合にも、反射・透過係数の振る舞いは複雑です。特に付近の振る舞いは分かりづらいため、反射・透過波のデモ用の web アプリを作成しました。色々なパラメータに対して、波動伝播の様子を確かめ理解を深めてください。https://www.eri.u-tokyo.ac.jp/people/knishida/Seismology/wave_coe.html。

エネルギー保存則

$z = 0$ の単位面積あたりに入射するフラックスは $K_{in}\cos\theta_1$ で表され、反射エネルギーフラックス $K_{反射}\cos\theta_1$ と透過エネルギーフラックス $K_{透過}\cos\theta_2$ と等しくなる必要があります。式を整理すると

$$\rho_1\beta_1\cos\theta_1 = \rho_1\beta_1\cos\theta_1|R_{12}|^2 + \rho_2\beta_2\cos\theta_2|T_{12}|^2 \tag{6.13}$$

となります[注 2)]。

全反射

$\theta_2 > \theta_1$ の時には入射角が

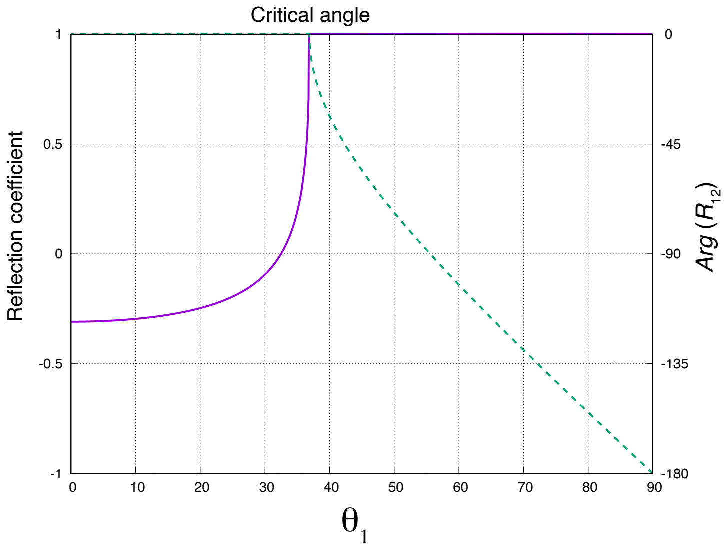
$$\theta_c = \sin^{-1}\frac{\beta_1}{\beta_2} \tag{6.14}$$

を越えると全反射が起きます。この時 p_{2z} は虚数となり、媒質 2 では z 方向には伝播せず指数関数的に減少します。そのため $z = 0$ から下方へエネルギーを運ぶことは出来ません。

一方反射係数 R_{12} を考えてみましょう。分子が分母の複素共役の形になっているため、

$$|R_{12}| = 1, \tag{6.15}$$

注 2) エネルギー保存則と、変位の連続から、反射透過係数を決めることも出来ます。



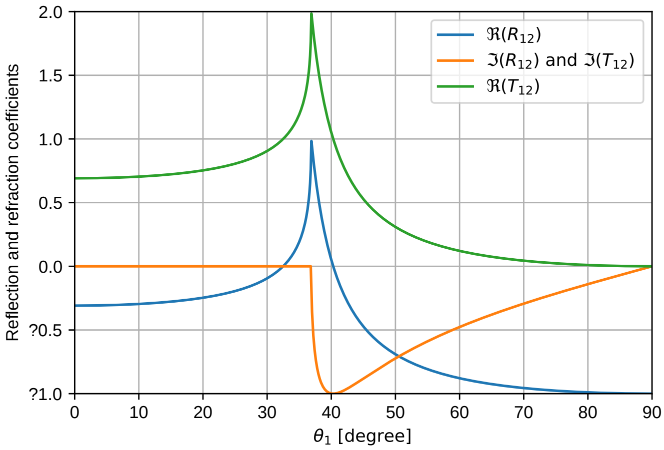


図 6.3　(上)SH 波の内部境界面での反射係数 R_{12}。臨界角前では実数で、臨界角を超えると複素数となる。実線は反射係数を、破線は位相をそれぞれ示している。(下)SH 波の内部境界面での反射係数 R_{12} と等価係数 T_{12}。実部と虚部をそれぞれ表示している。反射係数と透過係数の虚部は共通の値を取る。$\rho_1 = 2.2 \times 10^3$ [kg/m^3], $\rho_2 = 2.5 \times 10^3$ [kg/m^3], $\beta_1 = 3$ [km/s], $\beta_2 = 5$ [km/s].

と絶対値が 1 であることが分かります。エネルギー保存則を表し、式 6.13 で言うと、右辺第 1 項が 1 で第 2 項が 0 であることに対応します。また臨界角を越えると、反射波の位相が進みます。R_{12} の位相角は具体的には

$$arg R_{12} = -2\tan^{-1}\frac{\mu_2 i p_{2z}}{\mu_1 p_{1z}} = -2\tan^{-1}\frac{\mu_2\sqrt{p^2-\beta_2^{-2}}}{\mu_1\sqrt{\beta_1^{-2}-p^2}} \tag{6.16}$$

となります。これは媒質 2 が媒質 1 より固いためその影響が出ているためとも解釈できます。μ_2 が無限大になると反射係数 $R_{12} = -1$ となり、剛体壁での固定端反射と対応して

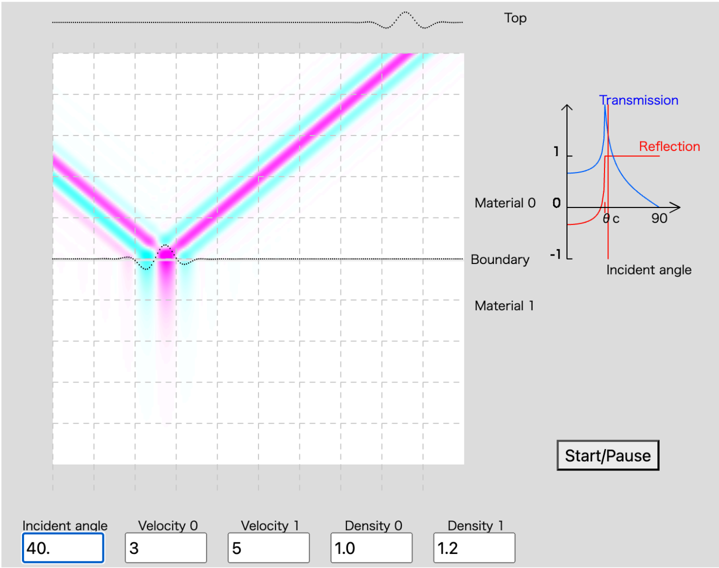


図 6.4　全反射時の反射・透過係数と波動伝播の対応。上方から下方に SH 波が入射し (図右上)、反射波 (図左) と透過波 (図下) が生成されている様子を見て取れる。

います。

音響インピーダンス

単純化のため鉛直入射の場合にに式 6.11 を書き換えてみましょう。

$$R_{12} = \frac{\rho_1\beta_1 - \rho_2\beta_2}{\rho_1\beta_1 + \rho_2\beta_2} \tag{6.17}$$

$$T_{12} = \frac{2\rho_1\beta_1}{\rho_1\beta_1 + \rho_2\beta_2} \tag{6.18}$$

となります。$\rho\beta$ は音響インピーダンスと呼ばれる量で反射・透過を決める、波の入りづらさを表す量です。応力と粒子速度の比 (電気回路での抵抗のアナロジー) で定義されます。

$\rho_2\beta_2$ が大きくなと媒質 2 に入るづらくなり、透過波はゼロになり剛体壁での反射に対応します。$\rho_1\beta_1 = \rho_2\beta_2$ の場合には、反射波が全く出ません。弾性波速度が媒質間で同じでも密度が異なると、反射波が生じるとも解釈できます。つまり反射波と透過波の振幅は密度変化の情報を含んでいます。地球内部の不連続面での反射波の振幅は、密度変化を見積もる上で重要な観測量です。

6.1.2 P-SV 波の場合

計算が煩雑になるので、ここでは結果のみを示します[注 3)]

注 3) 詳細は Aki and Richards (2002) や斎藤 (2009) を参照

$$a = \rho_2 - 2(\mu_2 - \mu_1)p^2 \qquad K = a\xi_1 + b\xi_2 \qquad N = a\eta_1 + b\eta_2 \tag{6.19}$$
$$b = \rho_1 + 2(\mu_2 - \mu_1)p^2 \qquad L = d - 2(\mu_2 - \mu_1)\xi_1\eta_2 \qquad M = d - 2(\mu_2 - \mu_1)\xi_2\eta_1 \tag{6.20}$$
$$d = \rho_2 - \rho_1 - 2(\mu_2 - \mu_1)p^2 \qquad D = KN + p^2 LM \tag{6.21}$$

SV 入射

$$R_{SS} = \frac{1}{\Delta}\{-(a\eta_1 - b\eta_2)K + p^2[d + 2(\mu_2 - \mu_1)\xi_2\eta_1]L\} \tag{6.22}$$
$$R_{SP} = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{2p\eta_1}{\Delta}[ad + 2(\mu_2 - \mu_1)b\xi_2\eta_2] \tag{6.23}$$
$$T_{SS} = \frac{\beta_1}{\beta_2}\frac{2\rho_1\eta_1 K}{\Delta} \tag{6.24}$$
$$T_{SP} = \frac{\beta_1}{\beta_2}\frac{2\rho_1 p\eta_1 L}{\Delta} \tag{6.25}$$

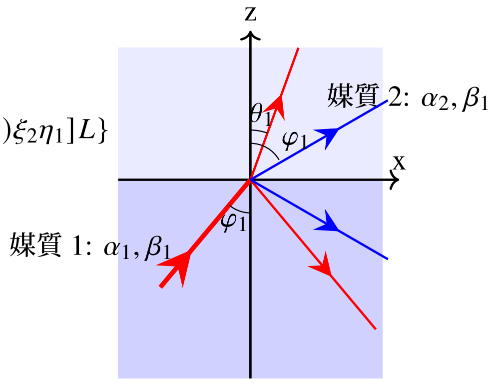


図 6.5

ここで

$$p = \frac{\sin\theta_1}{\alpha_1} = \frac{\sin\theta_2}{\alpha_2} = \frac{\sin\varphi_1}{\beta_1} = \frac{\sin\varphi_2}{\beta_2} \tag{6.26}$$

$$\xi_i^2 = \frac{1}{\alpha_i^2} - p^2, \eta_i^2 = \frac{1}{\beta_i^2} - p^2, \gamma_i^2 = 2\beta_i^2 p^2. \tag{6.27}$$

P 入射

$$R_{PP} = \frac{1}{\Delta}\{(a\xi_1 - b\xi_2)N - p^2[d + 2(\mu_2 - \mu_1)\xi_1\eta_2]M\} \tag{6.28}$$
$$R_{PS} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{2p\xi_1}{\Delta}[ad + 2(\mu_2 - \mu_1)b\xi_2\eta_2] \tag{6.29}$$
$$T_{PP} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{2\rho_1\xi_1 N}{\Delta} \tag{6.30}$$
$$T_{PS} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{2\rho_1 p\xi_1 M}{\Delta} \tag{6.31}$$

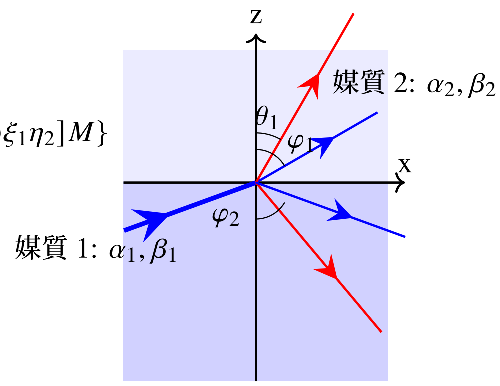


図 6.6

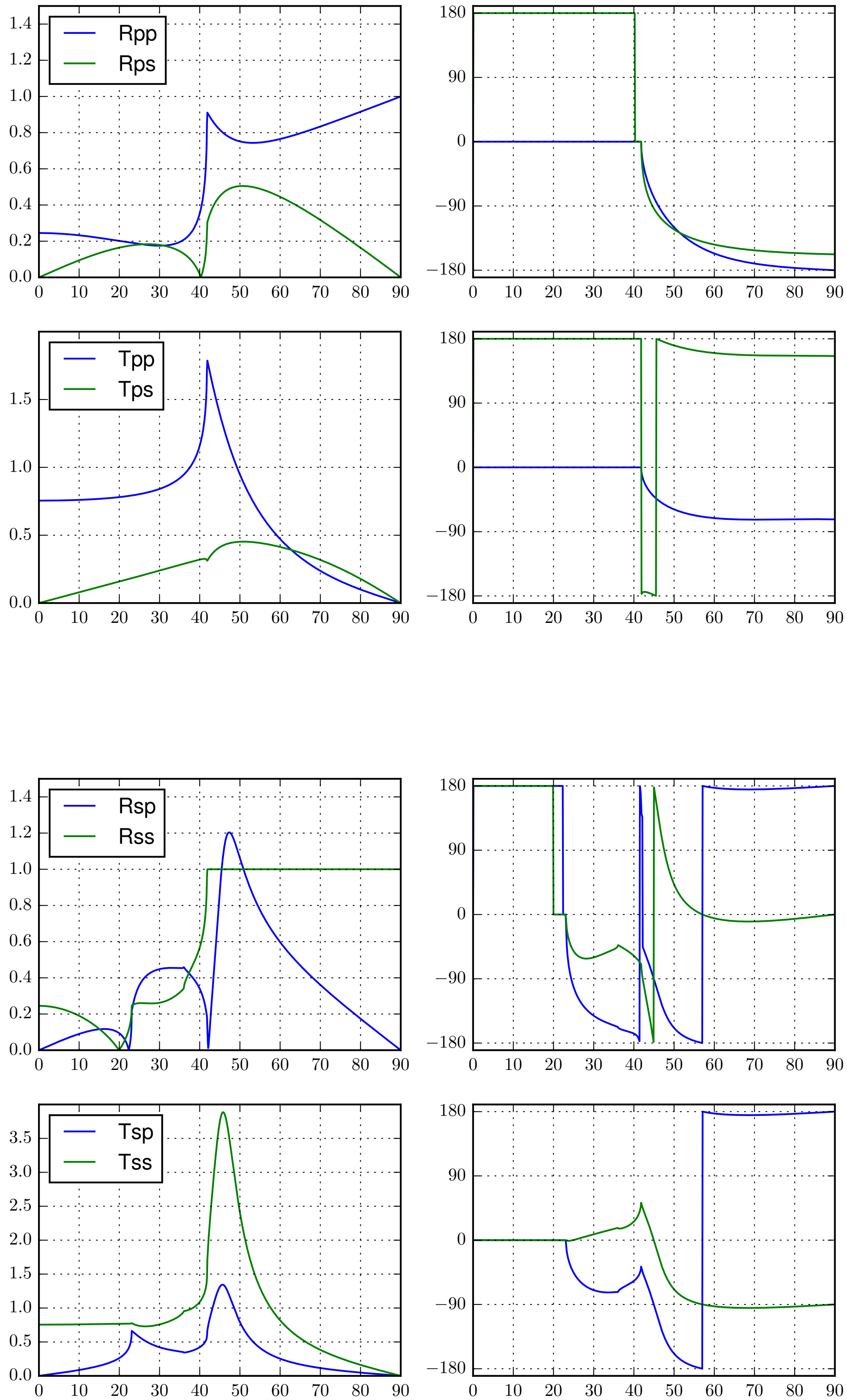


図 6.7　境界面での P-SV 波の反射透過係数。

6.1.3 垂直入射に近い場合

一般の場合、反射透過係数は煩雑になるため、垂直入射に近い (p が非常に小さい場合) 場合を書き下す。ここで p の自乗より高次の項は無視している。

P 波入射

$$R_{PP} = \frac{\rho_2\alpha_2 - \rho_1\alpha_1}{\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1} \tag{6.32}$$

$$R_{PS} = -\frac{2\alpha_1 p[\rho_2(\rho_2 - \rho_1)\alpha_2\beta_2 + 2\rho_1(\mu_2 - \mu_1)]}{(\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1)(\rho_2\beta_2 + \rho_1\beta_1)} \tag{6.33}$$

$$T_{PP} = \frac{2\rho_1\alpha_1}{\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1} \tag{6.34}$$

$$T_{PS} = \frac{2\rho_1\alpha_1 p[(\rho_2 - \rho_1)\alpha_2\beta_1 - 2(\mu_2 - \mu_1)]}{(\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1)(\rho_2\beta_2 + \rho_1\beta_1)}. \tag{6.35}$$

S 波入射

$$R_{SS} = \frac{\rho_2\beta_2 - \rho_1\beta_1}{\rho_2\beta_2 + \rho_1\beta_1} \tag{6.36}$$

$$R_{SP} = -\frac{2\beta_1 p[\rho_2(\rho_2 - \rho_1)\alpha_2\beta_2 + 2\rho_1(\mu_2 - \mu_1)]}{(\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1)(\rho_2\beta_2 + \rho_1\beta_1)} \tag{6.37}$$

$$T_{SS} = \frac{2\rho_1\beta_1}{\rho_2\beta_2 + \rho_1\beta_1} \tag{6.38}$$

$$T_{SP} = \frac{2\rho_1\beta_1 p[(\rho_2 - \rho_1)\alpha_2\beta_1 - 2(\mu_2 - \mu_1)]}{(\rho_2\alpha_2 + \rho_1\alpha_1)(\rho_2\beta_2 + \rho_1\beta_1)}. \tag{6.39}$$

R_{PP} や R_{SS} は SH 波の垂直入射と同様、インピーダンスのみで決まっていることが分かります。また興味深いことに、PS・SP 変換波の反射透過係数は密度変化と S 波速度変化に感度があります。図 6.7 を見ると分かるように、p が小さい範囲 (入射角が小さい範囲) では p の 1 次近似がかなり広い範囲で成り立つことが分かります。

6.2 点震源からの地震波の放射: 波面と波線

この章では、z 軸に垂直な不連続面を考えています。このような場合には P-SV 波と SH 波に分離できることを前の章で説明しました。ここでは比較的単純な SH 波を例にとって SH 波の放射を考えていきます。

5.3.2 節で説明したように、ポテンシャルとして χ を導入すると便利です。式 3.62 に χ を代入して整理するとスカラの形の波動方程式、

$$\rho \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 \chi = \Psi_z, \tag{6.40}$$

と書くことができます。ここで外力のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\Psi} = (0, 0, \Psi_z)$ と書けると仮定しました。爆発震源の例 (3.4.2 節) を思い出してみましょう。式の形は弾性定数と密度を除き同じため、原点に撃力が働いた場合に、グリーン関数 G^χ は

$$G^\chi(r, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = -\frac{1}{4\pi\mu r}\delta\left(t - \tau - \frac{r}{\beta}\right) \tag{6.41}$$

と書けることが分かります。この場合対応する力は $\nabla \times (0, 0, \delta(x))$ となり、あるポイントに対して水平面内にかかるトルクであることが分かります[注 4)]。SH 波は音波同様に取り扱えることが分かります[注 5)]。変位は $\nabla \times \chi$ となります。グリーン関数は r にのみに依存するため、SH 波は進行方向と直交しかつ水平面内に振動することが分かります[注 6)]。また r^{-1} の r 微分は近地項を表すため、ここでは考えないことにします。

今 $f(t)$ という波束が伝播することを考えます。波束の到達時刻を $T(\boldsymbol{x})$ と定義して、振幅を $A(\boldsymbol{x})$ と定義すると、振幅 s_y は

$$s_y(\boldsymbol{x}, t) = A(\boldsymbol{x}) f(t - T(\boldsymbol{x})) \tag{6.42}$$

と書くことが出来ます。$T(\boldsymbol{x})$ が一定である面を定義でき、一般に”波面”と呼びます。また波面に直交する軌跡を波線 (ray) とよびます。波線の方向は $\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \beta \nabla T$ で提起することが出来ます。平面波との対応を考えると ∇T が slowness ベクトルと対応していることがわかると思います。

波面の例を図 6.8 に示しました。波面は水面に石を投げ込んだ時の波紋をイメージすればよく、直感的に分かりやすい量です。

注 4) 等価体積力の説明で出てきた、モーメントテンソルと似た形になっています。ただし、モーメントテンソルとは違い、反対称行列で表現することができます

注 5) ただ音波は圧力を独立変数に、SH 波は変位を独立変数にとっています。そのために境界条件の表現が異なることに注意。反射・透過係数なども音波と SH 波では異なるので注意が必要です。

注 6) 地震学では水平動のうち、震源と観測点を結んだ線に直交する成分を Transverse component と呼びます。平行な成分を radial component と呼びます。radial は半径方向という意味のため、分野によっては鉛直方向を示すこともあるので注意が必要です。

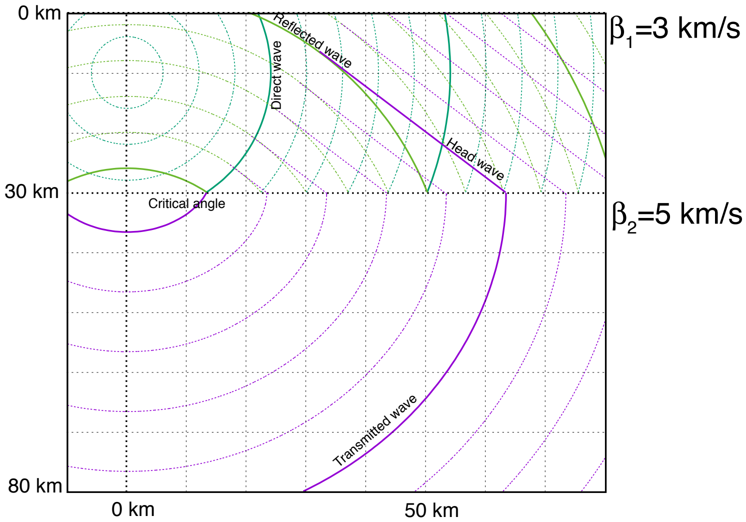


図 6.8

一方波線をイメージするためには、物理的な解釈が有効です。A が波長に比べて十分ゆっくり変動する場合には、

$$\nabla s_y = -A\nabla f = -A\frac{df}{dt}\nabla T \tag{6.43}$$

と書け A の空間微分を無視することが出来ます。平面波のアナロジーから、エネルギーフラックス $\boldsymbol{K}$ は

$$\boldsymbol{K} = \beta\hat{\boldsymbol{n}}\rho\dot{f}^2A^2 \tag{6.44}$$

と書けることが容易に導けます。波線に沿ったエネルギー保存を考えることによって、振幅を議論することが出来ます。図 6.9 に波線の例を示しました。

図 6.8 の波面と図 6.9 を比較すると、臨界角に達するまでは対応を理解し易いと思います。しかし、臨界角付近で波面は振る舞いが複雑になります。臨界角に達すると全反射す

るため、透過波と反射波の波面が分裂してしまいます。以下この”ちぎれ”をキーワードに詳しく見ていきましょう。

6.3 震源から放射された地震波の不連続面での振る舞い

前章では平面波の振る舞いを見てきました。これらの知見を元に、震源から放射された波 (グリーン関数) が不連続面でどのように振る舞うかを、4 つの波 (・・・) に注目して見ていきましょう。比較的な単純な SH 波を例に見ていきます。

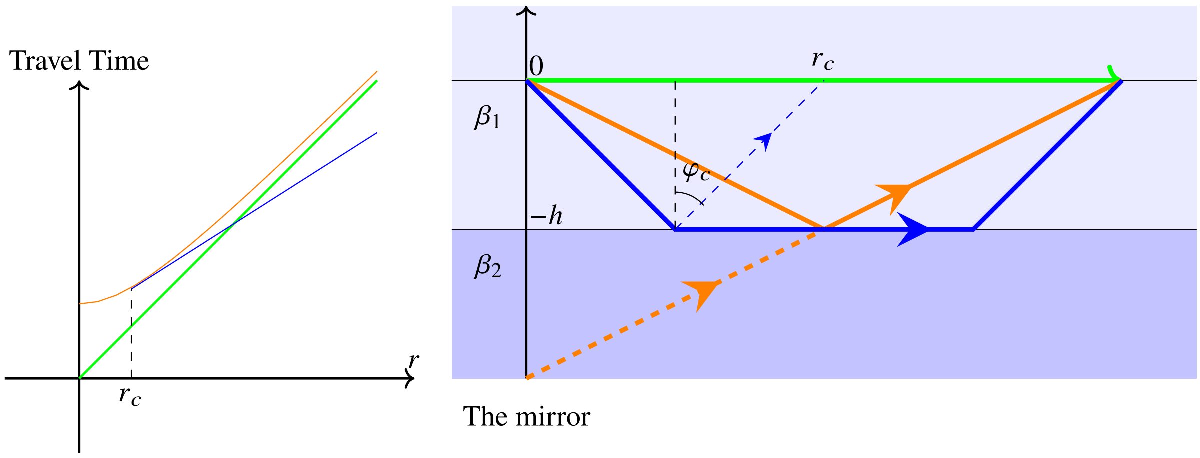


図 6.9

6.3.1 直接波

まず最初にから見ていきましょう。SH 波の等方的な励起を考えるために、震源としては原点にトルクがかかるとします。この力は

$$H(t)\nabla \times (0, 0, \delta(\boldsymbol{x})), \tag{6.45}$$

と、トルクがステップ状時刻 $t = 0$ にかかることを考えます。遠地項のみを考えています。

今単純化のため地表を考えていません。図 6.9 の緑の線に対応しています。境界の影響がないため、SH 波の伝播は無限媒質の場合と同様の式で書くことが出来ます。当然のことながら走時 T は震源からの距離に比例し

$$T(r) = r/\beta_1 \tag{6.46}$$

と書くことが出来ます。ここで r は震源から観測点までの距離とし、ともに $z = 0$ の平面内に存在するとします。

振幅 A_d は

$$A_d \sim \frac{1}{4\pi r \mu_1 \beta_1} e^{ik_{\beta_1} r}, \tag{6.47}$$

と書くことが出来ます。ここで波数 k_{β_1} は ω/β_1 と定義します。3 次元媒質で、点震源からの波動の伝播を考える場合には振幅は $1/r$ に比例します。これは球面上でのエネルギーフラックスが保存するためです。

6.3.2 反射波

次にについて見ていきましょう。図中オレンジの線で示されています。$z = -h$ の直線に対して震源と対称な鏡像を考えると理解しやすい。

$$T = 2\sqrt{h^2 + (r/2)^2}/\beta_1 \tag{6.48}$$

となり、振幅は

$$A_r \sim \frac{1}{4\pi R_0 \mu_1 \beta_1} R_{12}(\boldsymbol{p}) e^{ik_{\beta_1} R_0} \tag{6.49}$$

と書けます。ここで重要な点は反射係数がかかっているところです。臨界角より小さな角度で入射する場合には位相はずれません。しかし、臨界角を越えると全反射し位相がずれてしまいます、反射係数は 1 となります。(post critical reflection, wide angle reflection) とも呼ばれます。

次節の先駆波の解説で詳しく述べますが、臨界角を越える点で、反射・透過の振る舞いが大きく変わります。波束が分裂するに際して位相がずれるとも解釈できます。

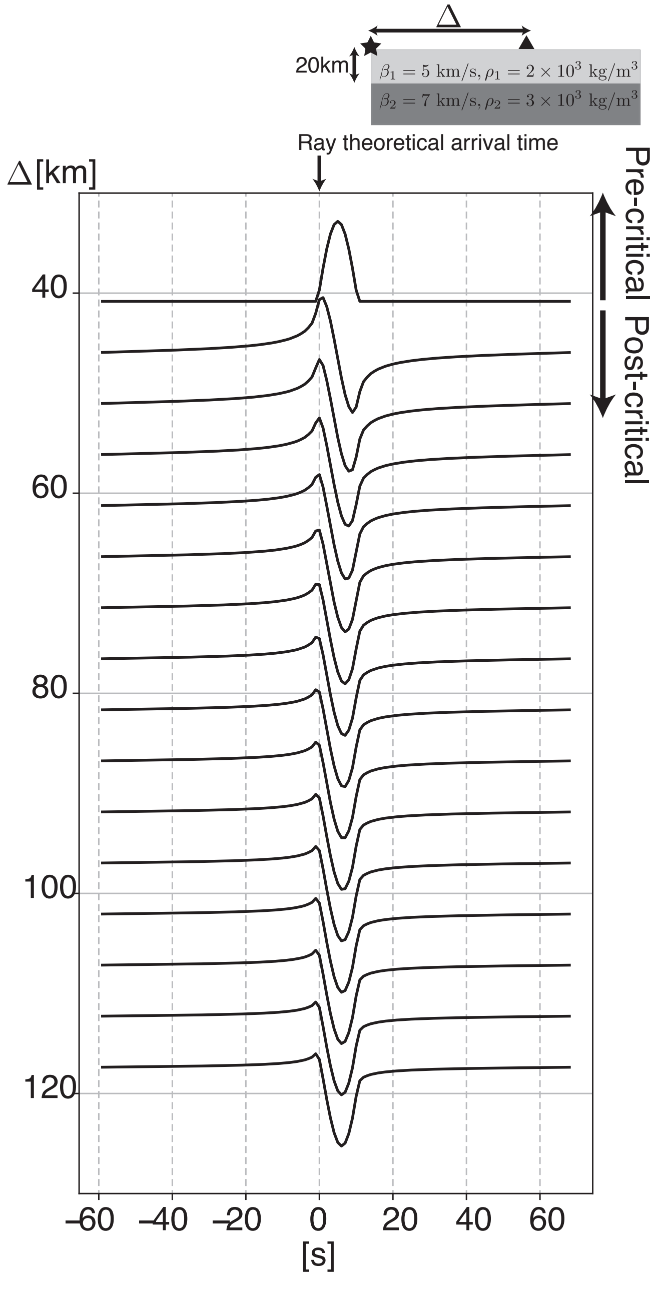


図 6.10　広角反射波の例。位相がずれたせいで，波線理論より早く到達している様子がわかる。

6.3.3 透過波

最後にを考えていきましょう。地表には戻ってこないため、地表での走時は当然計算できません。

$$A_t \sim \frac{1}{4\pi\sqrt{r}\mu_1\beta_1}T_{12}(\boldsymbol{p})\left(r_1 + r_2\frac{\beta_2\cos^2\varphi_1}{\beta_1\cos^2\varphi_2}\right)^{-1/2} e^{i(k_{\beta_1}r_1 + k_{\beta_2}r_2)} \tag{6.50}$$

ここで線分 OA の長さを r_1、線分 AB の長さを r_2 と定義します、線分 OB の長さを r と定義します。震源からの波が不連続面に入射角 φ_1 で入射し、不連続面で屈折 (射出角 φ_2) するとし、点 B での振幅を考えます。図 6.11 は OB で 3 次元媒質を切った断面図を表しています。点 B で波線に直行する長さ δl とします。簡単な計算から

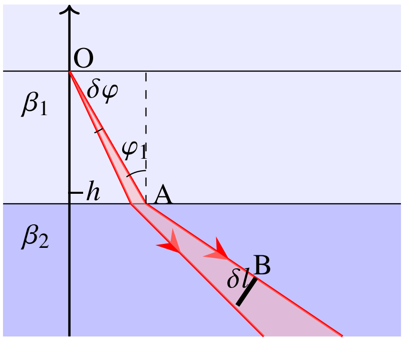


図 6.11

$$\delta l = \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}\left(r_1 + r_2\frac{\beta_2\cos^2\varphi_1}{\beta_1\cos^2\varphi_2}\right)\delta\varphi \tag{6.51}$$

と計算することが出来ます。

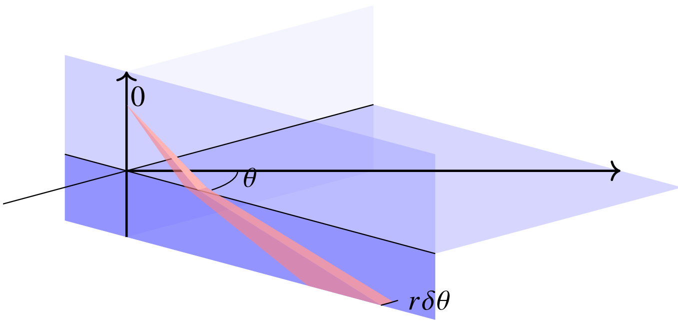


図 6.12　不連続面への入射を 3 次元でプロットしたず。動径方向には屈折するが、接線方向には屈折しない。

断面ではなく 3 次元で見ると図 6.12 のようになります。動径方向 (rz 平面内) で屈折しますが、接線方向 (図 θ が増減する方向) には屈折しません。そのため原点から r_0 だけ離れた点で波線を横切る断面積が $\delta r_0^2\delta\theta\delta\varphi$ とかけ、点 B での断面積は $r\delta\theta\delta l$ と書けます。原点 0 から r_0 長さだけ離れた点 (媒質 1 中) での振幅を A_i だとすると、エネルギー保存から、

$$\left(\frac{\rho_2\beta_2\cos\varphi_2}{\rho_1\beta_1\cos\varphi_1}|T_{12}|^2\right)\rho_1 A_i^2\omega^2\beta_1\delta\varphi\delta\theta = \rho_2 A_t^2\omega^2\beta_2\delta l r\delta\theta \tag{6.52}$$

式を導けます。ここで注意する点は透過係数の項に $\frac{\rho_2\beta_2\cos\varphi_2}{\rho_1\beta_1\cos\varphi_1}$ が掛かっている点です。少し詳しく考えてみましょう。

エネルギー規格化した反射透過係数

前の章で反射透過係数を解説しました。その際に注目したのは振幅でした。しかし、本章では、波線に沿ったエネルギー保存を基本に考えています。そのためエネルギーフラックスを基本に考えたほうが統一的な取り扱いが出来ます。

ここで反射・透過波のエネルギー保存則式 (式 6.53) に立ち返ってみましょう。

$$\rho_1\beta_1 \cos\varphi_1 = \rho_1\beta_1 \cos\varphi_1 |R_{12}|^2 + \rho_2\beta_2 \cos\varphi_2 |T_{12}|^2 \tag{6.53}$$

と書けました。両辺を $\rho_1\beta_1\varphi_1$ で割ると

$$1 = |R_{12}|^2 + \frac{\rho_2\beta_2 \cos\varphi_2}{\rho_1\beta_1 \cos\varphi_1} |T_{12}|^2 \tag{6.54}$$

書き換えることが出来ます。エネルギ規格化された透過係数 T_{12}^{norm} を

$$T_{12}^{norm} = \sqrt{\frac{\rho_2\beta_2 \cos\varphi_2}{\rho_1\beta_1 \cos\varphi_1}} T_{12} \tag{6.55}$$

と定義することが出来ます[注 7)]。

以上この節では 2 層モデルに対して、グリーン関数が (震源から出た波) がどう振る舞うか見てきました。次章では、より現実的な多層モデルをどう取り扱っていくか波線理論について解説していきます。

注 7) この辺りの議論や波線理論に関しては、Shearer の教科書 [7] が分かりやすいです。

臨界角付近の振る舞い

まずは透過波振幅について見ていきましょう。図 6.13 は水平位置・境界面からの深さに対する透過波振幅を表しています。臨界角と対応するのは 22.5 km 地点です。臨界角の背後では振幅が小さくなっていることが分かります。急激に振幅が小さくなる、領域で所謂回折現象が起きていると理解する事も出来ます。

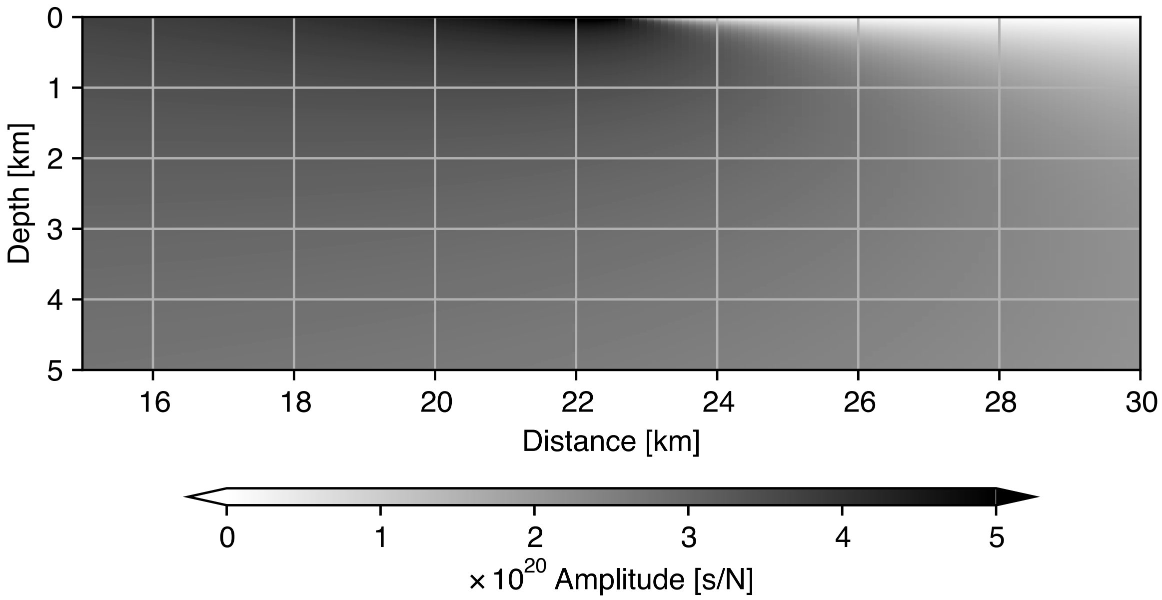


図 6.13　透過波のフーリエ振幅の空間分布。臨界角で入射する S 波と対応するのは、22.5 km の地点。$\rho_1 = 2$ [kg/m^2], $\rho_2 = 2.2$ [kg/m^2], $\beta_1 = 3.0$ [km/s], $\beta_2 = 5$ [km/s].

次に透過波振幅の臨界角付近の振る舞いを見ていきましょう。ここでは境界面での透過は振幅を，見ていきます。臨界角前、地表では $r_2 = 0$ となるため、

$$At \sim \frac{1}{4\pi\sqrt{r}\mu_1\beta_1} T_{12}(\boldsymbol{p}) r_1^{-1/2} \tag{6.56}$$

となります。臨界角を超えると、r_2 が有限な値をとり、$\cos\varphi_2 = 0$ となるため、$A_t \sim 0$ となります (図 6.14)。透過係数 T_{12} を考慮しない場合、A_t おおよそ距離 r に反比例するために、振幅の変化は小さくなります (図 6.14)。透過係数は臨界角付近で大きく変化するために、透過波振幅は、臨界角付近 (水平距離が $r_c/2 = 22.5$ km となる地点) でとがります。

次に、このとがり具合を評価してみましょう。$r_c/2$ からの水平距離を l と定義します。入射角が臨界角から微小な角度 $\delta\varphi_2$ 小さい場合を考えます。屈折角 $\varphi_2 = \pi/2 - \delta\varphi_2$ と置くと、スネルの法則から

$$\frac{\tan\varphi_2 \delta\varphi_2^2}{2} \sim \delta\varphi_1, \tag{6.57}$$

という関係が得られます。また幾何学的な性質から

$$l \sim \frac{h}{\cos^2\varphi_c}\delta\varphi_1, \tag{6.58}$$

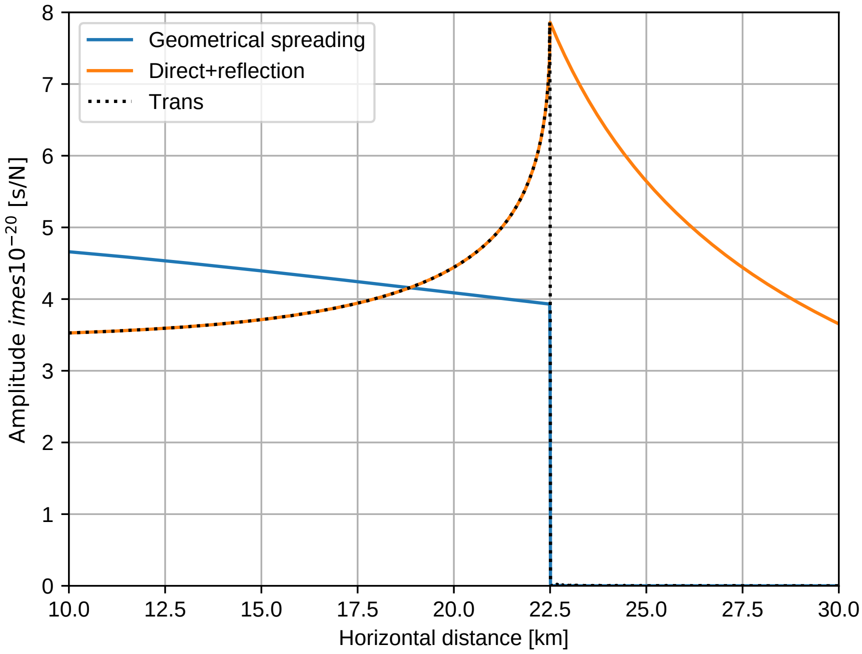


図 6.14　境界面上での、透過波 (黒)・直接波 + 反射波の振幅 (赤)。青は透過係数の効果を考慮せずに評価した振幅を表す。$\rho_1 = 2$ [kg/m^2], $\rho_2 = 2.2$ [kg/m^2], $\beta_1 = 3.0$ [km/s], $\beta_2 = 5$ [km/s].

という関係が得られます。これらの関係式を使って、

$$T_{12} \sim \frac{2}{1 + \frac{\rho_2\beta_2}{\rho_1\beta_1}\sqrt{\frac{2l}{h}\frac{\cos\varphi_c}{\sin\varphi_c}}} \tag{6.59}$$

ピークの特徴的な幅 l_d は

$$l_d \sim \frac{(\rho_1\beta_1)^2}{(\rho_2\beta_2)^2}\frac{\sin\varphi_c}{\cos\varphi_c}\frac{h}{2} = \frac{\rho_1^2\beta_1^3}{\rho_2^2\beta_2^3\cos\varphi_c}\frac{h}{2}, \tag{6.60}$$

となります。l_d の長さに比例して、先駆波が大きくなると予想されます。

6.3.4 先駆波 Head wave

3 番目は () は屈折波とも呼ばれる波です。第 2 層に臨界角で入射し、第 2 層最上部を水平に伝播します (図 6.9)。走時は

$$T_H(r) = \frac{r - r_c}{\beta_2} + \frac{r_c}{\sin\varphi_c \beta_1} \qquad (6.61)$$

と書けます。一方振幅は

$$A_{head} \sim \frac{i}{2\pi\omega\mu_1\beta_1} \frac{\rho_1\beta_1^2}{\rho_2\beta_2(1-\beta_1^2/\beta_2^2)} \frac{1}{\sqrt{r}D^{3/2}} e^{i\omega t_h} \qquad (6.62)$$

と書くことができます。厳密な導出は難しいですが[注 8)]、以下直感的な説明を試みます[注 9)]。

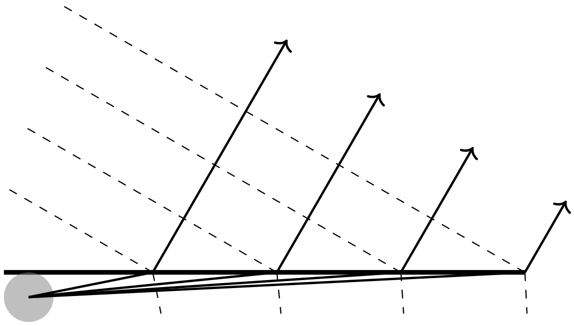


図 6.15　先駆波発生のメカニズム。臨界角付近 (グレーの円) で回折が起き、2 次的に波が発生していると考えると分かりやすい。回折が起きている地点では、入射波・反射波・透過波が先駆波と屈折波のペアに分離することにも対応しています。

まずは、図 6.8 の波面をじっと見てみましょう。に達する前には、入射・反射・透過波が一組になっている様子が見て取れると思います。臨界角を越えると、入射波・反射波 (正確には境界付近に不均質波も存在します) のペアと、先駆波・透過波のペアにちぎれます。臨界角を超えると透過波が不均質波としてしか存在できなくなり、媒質 1 から媒質の方向にエネルギーを伝える事ができなくなります。境界面にスリットを置かれたような状況となるため、その端で回折のような現象が起こります。

臨界角で波束が分かれる際に起こる現象を考えていきましょう。分裂する際に一番大きな変化は、透過出来なくなる点です。透過波から不均質波に遷移する際に、r_c 付近に 2 次的な励起源を考えます。大体波長程度のスケールの変形が媒質 2 に存在するとします。そうすると、ホイヘンスの原理から、二次的に波が放射されます。先駆波の波線は境界をまっすぐに水平に進んでいる様に見えますが、透過波がほんの少しだけ (波長の分だけ) 下から上へと入射するために、上方にだけ変換波が発生する様子がわかると思います。先駆波が水平に伝播した距離を D とすると、入射角は 90 度から $\sim D/\lambda$ だけずれます。透過係数は

$$T_{21} = \frac{2\rho_2\beta_2\cos\varphi_2}{\rho_1\beta_1\cos\varphi_1 + \rho_2\beta_2\cos\varphi_2} \sim \frac{2\rho_2\beta_2\lambda/D}{\rho_1\beta_1\cos\varphi_c} = \frac{4\pi\rho_2\beta_2^2}{\rho_1\beta_1}\frac{1}{\cos\varphi_c D\omega} \qquad (6.63)$$

と見積もることが出来ます。振幅は $r^{-1/2}D^{-1}D^{-1/2}$ で減衰しますが、(1) $r^{-1/2}$ は xy 平面での波面の広がりを表し、(2) $D^{-1/2}$ は xz 平面での波面の広がりを表し、(3) D^{-1} は透過

注 8) より厳密な導出は、Aki and Richards の教科書 [(1)] や齊藤さんの教科書 [(9)] を参照してください。

注 9) 式 (6) を見ると、$k_z = 0$ が特異点になっています。特異点となるのは $k = \omega/\beta_2$ となる領域で、先駆波が生じる箇所と対応しています。

係数の寄与を表します。また振幅の式の分母に ω が現れるのは、入射角 φ_1 が波長に反比例して変化するためです。そのため長周期がより強調されます。

また位相は 90 度ずれています。これは、ちぎれた際に位相がずれるためです。今 3 次元問題を考えているために、波束の分離が起きる場所は、円環状に分布しています。そのために、2 次元 Green 関数をアナロジーとして考えます。2 次元 Green 関数は、原点で位相が $\pi/4$ ずれることを学びました (そのためが出てきました)。波が発散する場合には、位相が $\pi/4$ ずれますが、今回は収束発散が起こっているために $\pi/4\times 2$ と 2 倍位相がずれるため、$\pi/2$ だけ位相がずれることになります[注 10)]。位相が 90 度ずれ、かつ ω^{-1} の依存性があるために、式としては直達波を 1 回積分する形になっています[注 11)]。観測例 (図 6.20) を見ると、先駆波の卓越周期が長いことが見て取れると思います。

先駆波は回折波の一種と考えることで、振幅を見積もることが出来ます。式 6.60 で評価したように、先駆波を長さ l_d から漏れてくる波と仮定しましょう。この場合振幅は l_d に比例するはずで、振幅は $T_{12}l_d$ と比例するはずです。この場合

$$A_t \propto \frac{\rho_1\beta_1^2}{\rho_2\beta_2\cos\varphi_c^2} = \frac{\rho_1\beta_1^2}{\rho_2\beta_2(1-\beta_1^2/\beta_2^2)} \tag{6.64}$$

となり、振幅の、密度や地震波速度に対する依存性を説明出来る事が分かります。

実際の地球は 2 層構造ではなくより複雑な構造をしています。そのため先駆波は不連続直下の波線を通る波と解釈できます。2 層の場合よりもイメージしやすいかもしれません。詳しくは次章波線理論で解説していきます[注 12)]。

問題 6.1

式 6.51 を導け。単純な幾何学的な問題です。

注 10) 7.5 節で説明する Caustic とも強く関わっています。直感的には、波がある点で収束・発散する際には特異点となるために、解の接続を考えると座標系が裏返ると解釈することもできま s う。

注 11) 数学的により厳密な議論は Aki and Richards による教科書 [1] や斎藤による教科書や [9](8 章、10 章) 参照のこと。複素積分を評価している。本章は数学的な厳密さは犠牲にして、物理的な直感で式の形を説明することを試みました。

注 12) 例えば、Stein and Wysession[8] による教科書の 3.2.3 章参照のこと

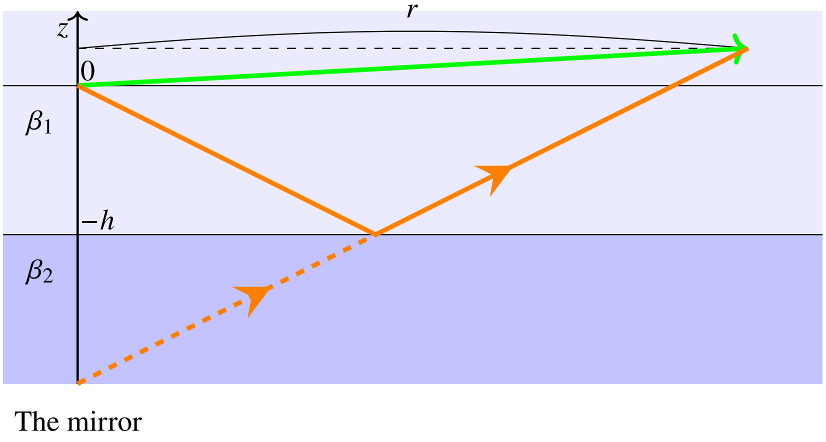


図 6.16

6.3.5 積分の評価: 停留値法

前節では、直達波・反射波・透過波・先駆波を、物理的に解釈してました。今度はもう少し定量的に考えてみましょう。

章の最初に述べたように、2 層媒質中の波の伝搬は、平面波に分解し、それぞれの平面波に対して反射透過係数をかけ波数積分することによって、厳密に評価できます。この表式は円筒波 () にも自然に拡張でき、直達波を表すポテンシャル χ_d は

$$\chi_d = \frac{\omega}{4\pi\mu_1}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\omega pr)\frac{e^{i\omega\xi_1|z|}}{-2i\xi_1}pdp, \tag{6.65}$$

と slowness の積分で評価できます。ここで、ξ_1 が虚数となる場合に $p \longrightarrow \infty$ で χ_d が物理的に意味があるように (発散しないように)

$$\xi_1 = \begin{cases} \sqrt{\beta_1^{-2} - p^2} & |p| \le 1/\beta_1 \\ \sqrt{p^2 - \beta_1^{-2}}\,i & |p| > 1/\beta_1 \end{cases} \tag{6.66}$$

と符号を定義します。

反射波、透過波を表すポテンシャル χ_r, χ_t も

$$\chi_r = \frac{\omega}{4\pi\mu_1}\int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(p)H_0^{(1)}(\omega pr)\frac{e^{i\omega\xi_1|z+2h|}}{-2i\xi_1}pdp, \tag{6.67}$$

$$\chi_t = \frac{\omega}{4\pi\mu_1}\int_{-\infty}^{\infty} T_{12}(p)H_0^{(1)}(\omega pr)\frac{e^{i\omega(\xi_1 h-\xi_2(z+h))}}{-2i\xi_1}pdp, \tag{6.68}$$

と表現できます。ここで注意するのは、反射ポテンシャル χ_r は、反射波、先駆波の両方を表現している点です。

この積分を数値的に評価したのが図 6.17 です[注 13)]。直達波はパルス状の形をしており、形を変えずに伝搬している様子が分かります。先駆波は 60 km あたりからはっきりと見

注 13) 少し積分を眺めると分かりますが、この積分は ξ_1 が特異点を持っています。数値積分では特異点を避け

て取ることができ、長周期が卓越 (のっぺりとしている) ことも分かります。震源から近い (20 km 程度まで) 観測点では反射波はパルス状ですが、臨界角を超えると広角反射波となり、段々と位相がずれてくる様子が分かります。

数値積分の結果を見ると、確かにこの積分 (Weyl の表式) は正しそうです。この積分を大づかみに理解するために、その近似的な振る舞いを考えてみましょう。ここでは一番簡単な直達波について考えます。

まずは伝搬する距離が波長に比べて十分に大きいとして、を

$$H_0^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-\pi/4)} \tag{6.69}$$

と近似します。すると、χ_d は

$$\chi_d \sim \frac{1}{4\pi\mu_1}\sqrt{\frac{2\omega}{\pi r}} e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(pr+\xi_1|z|)}}{-2i\xi_1}\sqrt{p}dp, \tag{6.70}$$

と近似できます。ここで z=20 km, r = 30 km, f = $2\pi 5$ [Hz], β = 3 km/s の場合の被積分関数

$$\frac{e^{i\omega(pr+\xi_1|z|)}}{-2i\xi_1}\sqrt{p} \tag{6.71}$$

を図 6.18 にプロットしました。大部分の場所で激しく振動していますが、$p\beta_1 = 0.8$ 付近で振動が止まっていることが分かります。積分すると、この付近の寄与が大きくなります。

ここで停留値法を用いて積分の大きさを評価をしてみましょう。振動がゆっくりしている部分は位相の変化が小さい箇所なので

$$\frac{d\omega(pr-\xi_1|z|)}{dp} = 0 \tag{6.72}$$

となります。

$$\frac{d(pr-\xi_1|z|)}{dp} = r - |z|\frac{\xi_1}{dp} = r - \frac{|z|p}{\xi_1} = 0, \tag{6.73}$$

すなわち

$$p_0 = \sqrt{\frac{r^2}{\beta_1^2 d^2}} \tag{6.74}$$

を満たす p(停留点と呼びます) 付近の積分の寄与が大きことがわかります。ただし、d は距離 $\sqrt{r^2+z^2}$ です。

るために、弾性定数にごく僅かな虚部を与えました。これは物理的には弱い減衰を与えたことに対応します。

少し計算が煩雑になりますが[注 14)]、停留点で 2 次までテーラー展開すると振幅も評価することができます。1 次の項は停留点となる条件から消えるため、位相の 2 次までの項は

$$\omega(pr - \xi_1|z|) = \omega\left(\frac{d}{\beta_1} - \frac{d^3\beta_1}{|z|^2}\frac{(p-p_0)^2}{2}\right), \tag{6.75}$$

と書くことができます。ここで ξ_1 と p は停留点付近での変化は小さいとみなし、積分 χ_d をテーラ展開の 2 次の項までで近似すると

$$\chi_d \sim \frac{1}{4\pi\mu_1}\sqrt{\frac{2\omega}{\pi r}}e^{-i\pi/4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\left(\frac{d}{\beta_1}-\frac{d^3\beta_1}{|z|^2}\frac{(p-p_0)^2}{2}\right)}}{-2i\frac{|z|}{d\beta_1}}\sqrt{p_0}dp, \tag{6.76}$$

と計算することができます。ここで

$$\xi_1|_{p=p_0} = \frac{|z|}{d\beta_1} \tag{6.77}$$

であることを用いました。この積分はフレネル積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ia^2x^2}dx = \frac{1}{|a|}\sqrt{\pi}e^{-i\pi/4}, \tag{6.78}$$

を用いると計算することができます。計算は煩雑になりますが、ポテンシャル χ_d は

$$\chi_d \sim \frac{1}{4\pi\mu_1}\sqrt{\frac{2\omega}{\pi r}}e^{i\left(\omega\frac{d}{\beta_1}+\frac{\pi}{4}\right)}\frac{d\beta_1\sqrt{p_0}}{2|z|}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\left(\frac{d^3\beta_1}{2|z|^2}p^2\right)}dp \tag{6.79}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu_1}\sqrt{\frac{2\omega}{\pi r}}e^{i\left(\omega\frac{d}{\beta_1}+\frac{\pi}{4}\right)}\frac{d\beta_1\sqrt{p_0}}{2|z|}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\left(\frac{d^3\beta_1}{2|z|^2}p^2\right)}dp \tag{6.80}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu_1}\sqrt{\frac{2\omega}{\pi r}}e^{i\left(\omega\frac{d}{\beta_1}\right)}\frac{\sqrt{r\pi}}{2d\sqrt{\omega}} \tag{6.81}$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu_1 d}e^{i\omega\frac{d}{\beta_1}} \tag{6.82}$$

と計算することができます。外力として

$$H(t)\nabla\times(0,0,\delta(\boldsymbol{x})), \tag{6.83}$$

を考えて、ポテンシャル χ_d から変位に直すと

$$A_d = \frac{1}{4\pi\mu_1\beta_1 d}e^{i\omega\frac{d}{\beta_1}} \tag{6.84}$$

となり、たまたま解析解と厳密に一致します。

次に反射波・先駆波 (χ_r, χ_t) を見ていきましょう。反射波は直達は同様に、停留位相の寄与が大きくなります。次に包絡線を見てみましょう。$p\beta_2 = 1$ 付近ではかくんと形が変

注 14) 計算の方針自体は単純なのですが、計算が煩雑なので、以下の振幅の評価は読み飛ばして構いません。停留値法の説明のつもりで書いたので、こういった計算で評価できるんだなとくらいに考えてもらえればと思います。

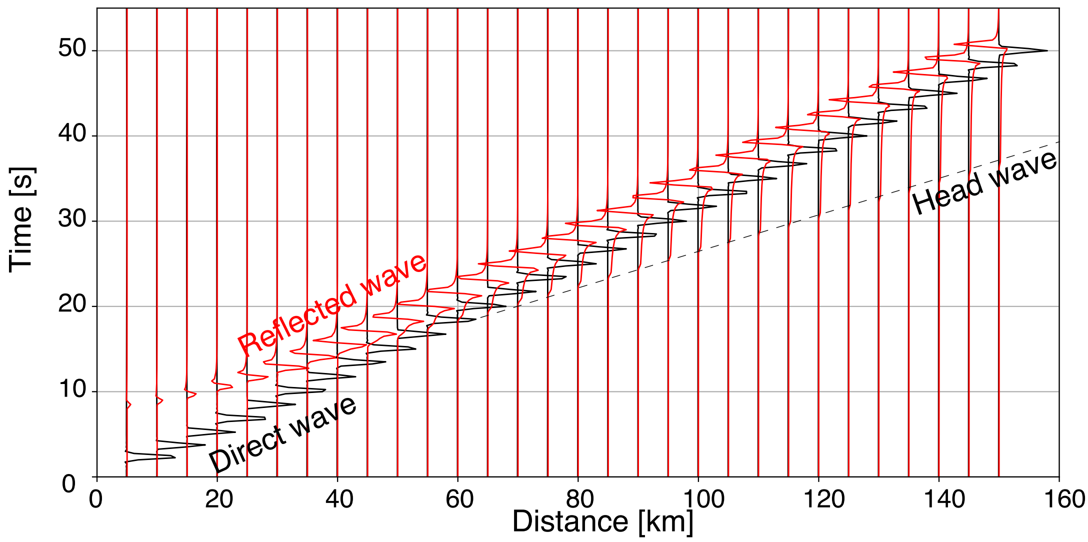


図 6.17　数値的に計算した例。$\beta_1 = 3$ [km/s], $\beta_2 = 5$ km/s, $\rho_1 = \rho_2$, 震源は $z = 10$ km, 観測点は $z = 15$ km であるとして計算した。

わっている様子が分かります。これは反射係数 R_{13}, T_{12} が、臨界角前後で大きく変わるためです。そのため、停留位相を適応するための、振幅がゆっくりと変わるという条件を満たしていないことが分かります。そのため、停留点以外で激しく振動していても $p\beta_1$ 付近の積分の寄与は打ち消し合うことはありません。この寄与が先駆波と対応します。

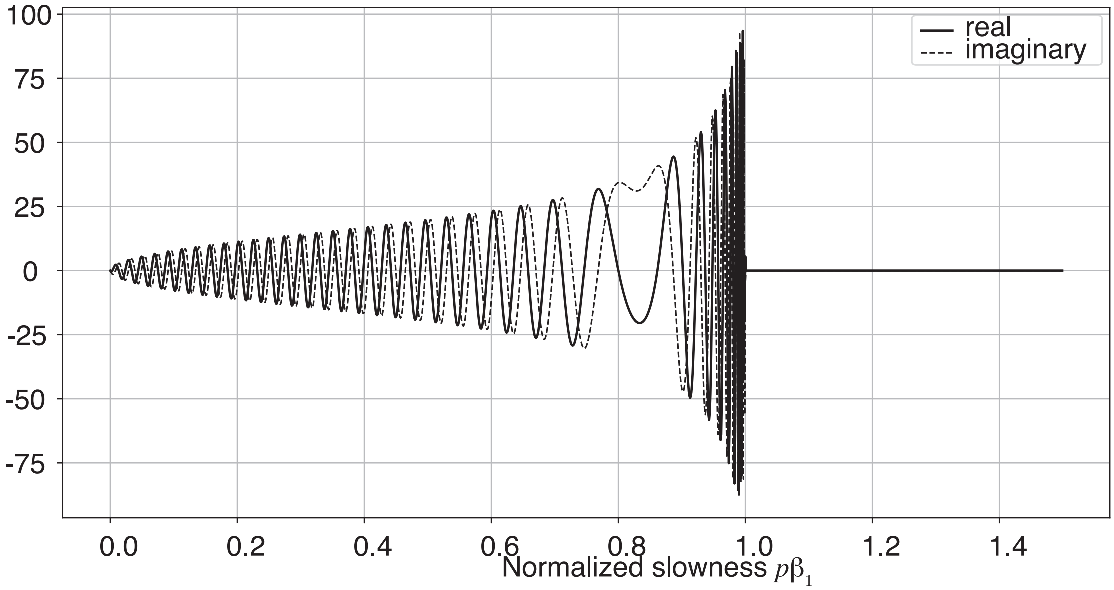


図 6.18　z=20 km, r = 30 km, f = 5 Hz, β = 3 km/s の場合の直達波に対応する被積分関数。激しく振動している様子がわかる。

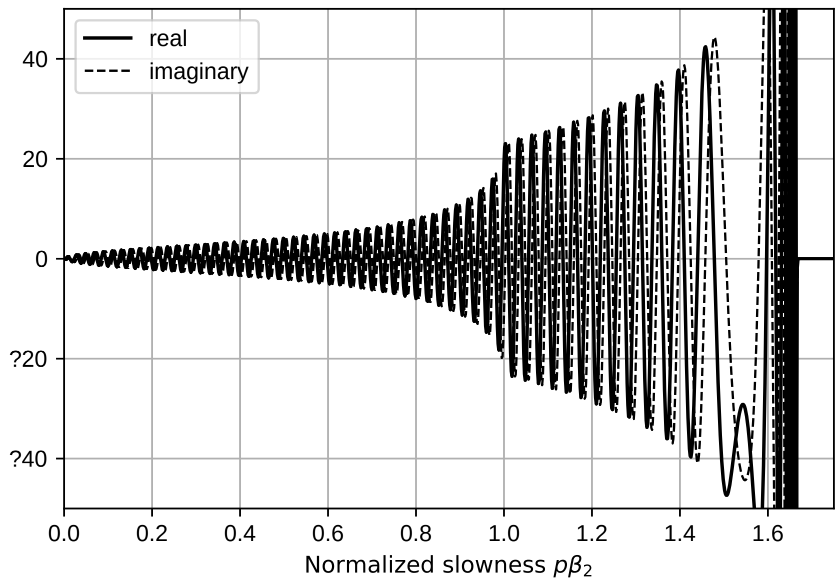


図 6.19　z=20 km, r = 30 km, f = 5 Hz, β = 3 km/s の場合の反射波・先駆波に対応する被積分関数。激しく振動している様子がわかる。

6.3.6 実際の波形例

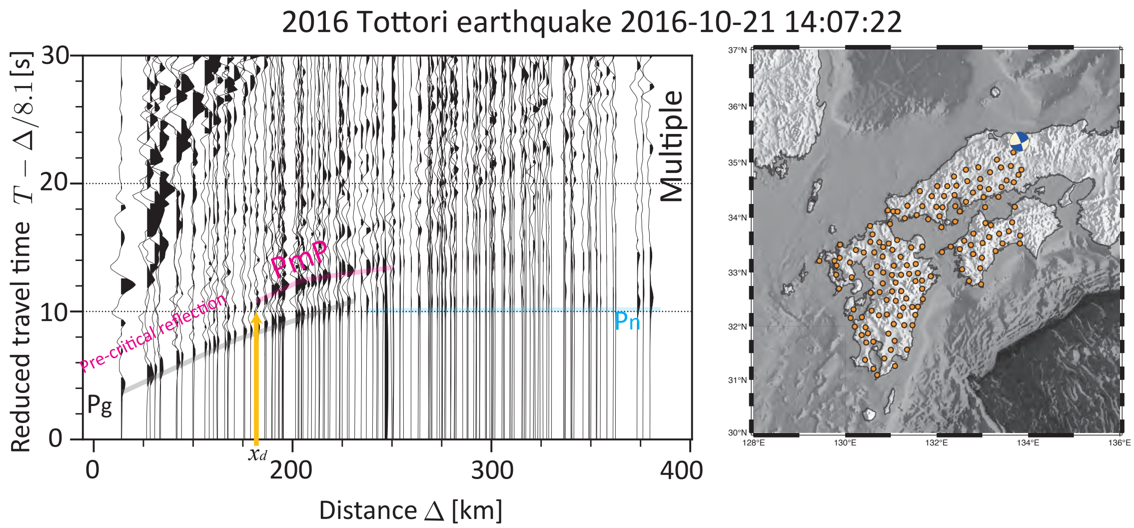


図 6.20　図左: 鳥取で 2016 年 10 月 21 日に深さ 10 km で起きた Mj 6.2 の地震時に記録された波形例。Hi-net 上下動記録の機器特性を補正したあと、 0.02-1 Hz のバンドパスフィルターをかけた波形です。初動の立ち上がりは明瞭に読み取れますが、後続波の振る舞いは複雑です。地殻内の少スケールの不均質構造によって散乱された影響でしょう (中国地方の地殻は、日本の中では不均質構造の大きさは小さいですが)。図右には地震のメカニズムと、解析に使用した観測点を表示しています。大雑把には、P 波の初動の極性が同じと期待されている観測点を選びました。

実際の波形例を見ていきましょう。2016 年 10 月 21 日に鳥取で起きた M w 6.2 の地震です。170km 離れた観測点までは Pg (地殻内を伝播する直接波) が最初に到達している様子が分かります。それより遠い点では、マントル最上部を通ってくる Pn 波 (先駆波) が先に到達していることがわかると思います。また Pn 波のほうが卓越周期が長くなっていることも読み取れると思います。一方、モホ面での反射波 (PmP) は波群が複雑となります。これは地殻内にも不連続が存在するために多様な反射波が存在するためです。特に短周期では、初動の到達は媒質の不均質の影響が少ないため、解釈が容易な場合が多くなります。図 6.20 では、1 Hz でローパスフィルタをかけているため、PmP の波群を確認することが出来ます。臨界角と対応する、crossover distance x_d を超えると、反射率が 1 となるため、振幅が大きくなっている様子も見て取れます。

Pg と Pn の走時の傾きからおおよそ $\beta_1 = 6$ km/s, $\beta_2 = 8$ km/s と見積もれます。また初動が Pn と Pg と切り替わる距離 x_d (crossover distance) は前に述べたように $x_d = 2h\sqrt{(\beta_1+\beta_2)/(\beta_2-\beta_2)}$ と書くことが出来ます。x_d が 170 km だとすると、地殻の厚さはおおよそ 30 km と見積もる事ができます。もちろん、この見積もりは単純化した

見積もりですが、波動の伝播の様子をつかむには有効です。より現実的な構造に対して走時を考えるためには、次章で解説する波線理論が有効です。

Pg, PmP, Pn の後に後続波が続きます。Pg や Pn と平行な波群をいくつか見て取れ、これらは地殻内での多重反射で説明する事が出来ます。多重反射は定在波の重ね合わせとしても解釈することが出来、次節で説明する Love 波と対応します。1 Hz より短周期で側では、地殻内の散乱が卓越し、地震波の伝播はより複雑になります。

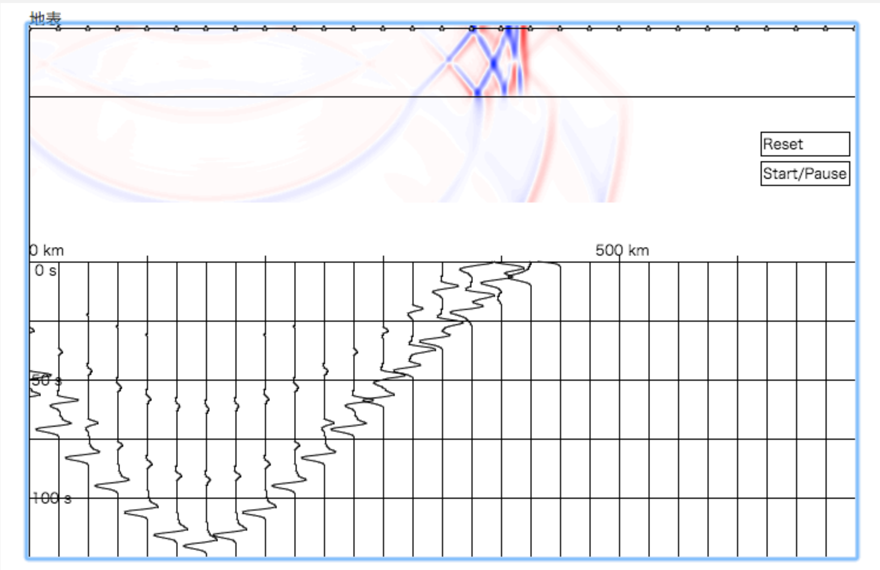
問題 6.2

以下のウェブでは 2 層構造 (2 次元) での波動伝播を模擬しています。地表の観測波形から 1 層目と 2 層目の S 波速度と、1 層目と 2 層目の密度比を見積もることが出来ます。

1. 波動場全体 (上の図) を使って第 1 層と第 2 層の S 波速度と密度比を見積もること。
2. 地表のデータ (下の図) を使って見積もること。

ただし震源の深さは分かっているとします。求め方が正しければ、推定値の精度は問いません。地表観測点での波形としての見え方と、内部での波動場の対応に注意して実行してみてください。

http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/people/knishida/Seismology/wave2D2.html



実行例

問題 6.3

以下のウェブでは 2 層構造 (2 次元) での波動伝播を模擬しています。このデモには地表は含まれません。

1. このデモを実行し、反射波の振幅と、反射係数の結果を比較してください。特に符号に注意すること。
2. 臨界角付近でつながる、Head wave と広角反射波の関係について考察せよ。

http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/people/knishida/Seismology/wave2D4.html

6.4 境界波 Love 波・Scholte 波

半無限媒質の場合には境界波としては、Rayleigh 波のみが存在しました。2 層構造の場合にはどうでしょうか？ ここでは、地表の下に厚さ h の層があり、その下に半無限媒質がある場合を考えてみましょう (図 6.21)。上の層が低速度の場合には波がトラップされるために、境界波が存在します。まず SH 波の場合について、[3] と呼ばれる波を考えていきます。次に、第 1 層が流体で第 2 層が固体の場合には Scholte 波 [6] として知られています。この節ではそれぞれ考えていきます。

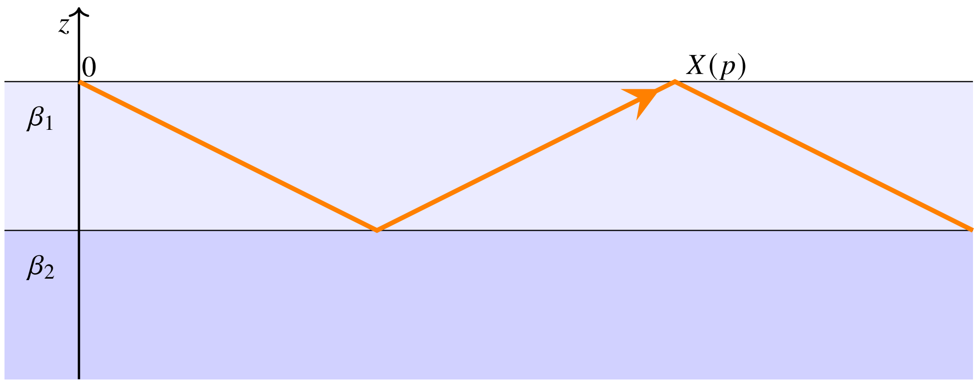


図 6.21

6.4.1 Love 波

まずはが伝わる様子を見てみましょう (図 6.22)。○は振動を知るために、地中に目印をつけていると思って下さい。図を見ると水平方向に変形している様子が分かりますね。 図にカーソルを合わせてキーボードの s を押してみて下さい。Love 波が右方向に伝播し始めます。手前に動いている○を赤に、奥に動いている○を水色で表示しています。

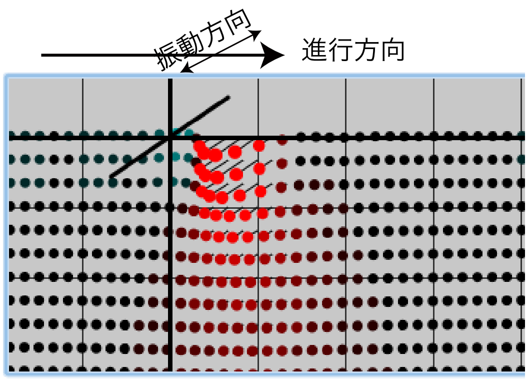


図 6.22 Love 波のデモのスナップショット。デモを https://www.eri.u-tokyo.ac.jp/people/knishida/Seismology/Love_wave.html に用意しました。詳しくはデモを実行してください。

Love 波は堅い層の上に柔らかい層がのっかいている時に生じます。例えば堅いマントルの上に柔らかい地殻がのっている場合が当てはまります。この図では、縦軸方向 (深さ方向) には○が 10km 間隔で置かれており、横軸方向 (水平方向) には 6.25km ごとに

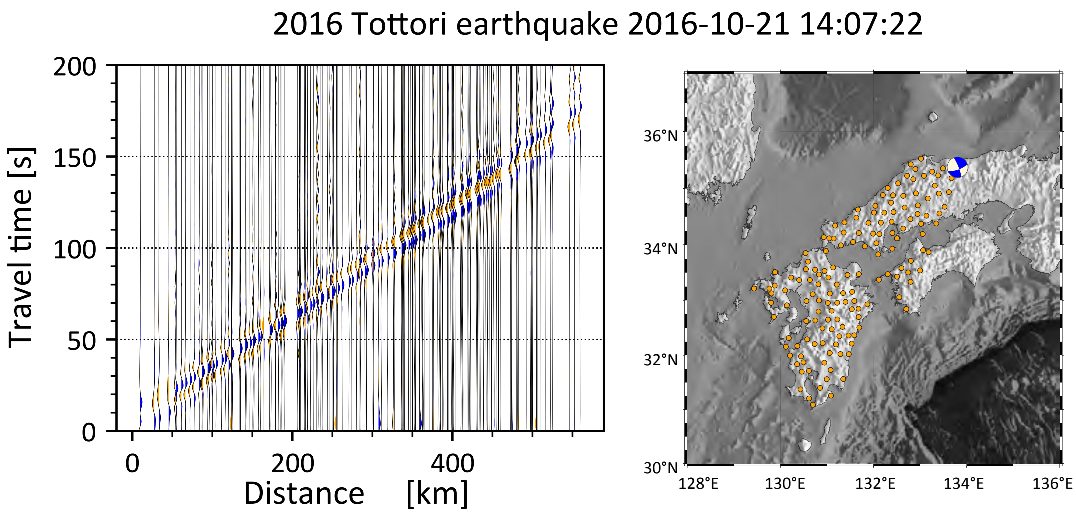


図 6.23　図左: 鳥取で 2016 年 10 月 21 日に深さ 10 km で起きた Mj 6.2 の地震時に記録された波形例。Hi-net の Transverse 成分を機器特性を補正したあと、 0.02-0.1 Hz のバンドパスフィルターをかけた波形です。 Love 波が分散しながら伝播する様子を見て取れます。図右には地震のメカニズムと、解析に使用した観測点を表示しています。大雑把には、Love 波の初動の極性が同じと期待されている観測点を選びました。

置かれています。深さ方向に○ 4 つめが地殻とマントルの境界 (モホ面) にそうとうします。波が地殻の中を効率的に水平に伝わっている様子が分かると思います。

波と伝わり初めに比べて波の形が崩れている様子が分かります。赤色の部分は横方向にも縦方向にも伸びていてます。一方緑色の部分は表面付近に固まっています。緑色の方が到達が遅くなっているようすが分かると思います。波の波長によって伝わる速さが変わるため波の形がくずれているのです。この現象を分散と言います。この場合波長の長い波は速く伝わり、短い波は遅く伝わります。波長な長い波は堅い層の (深い層: マントル) の影響を強く受けるためです。

次に実際の波形を見ていきましょう。2016 年鳥取地震時の波形記録を図 6.23 に示しました。分散しながら伝播する様子 (波の形を変えながら伝播しています。詳細は図 6.26 参照。)。

定在波

ここまでの性質を定性的に説明してきましたが、物理的には第 1 層にエネルギーが閉じ込められた定在波として考えられます。ここで極限として、β_2 が無限大 (底が剛体壁) の場合を考えてみましょう。いわゆる気柱の振動の問題です。鉛直方向に波が伝播しているとすると、地表では応力が 0 であるために $s_y \propto \cos(kz - \omega t)$ となります。深さ h では固定端のために位相が π ずれます。地表は開口端であるために反射で位相はずれません。

そのため、そこで反射してきた波との位相差が 2π であることを考えると

$$k \cdot 0 - \omega t = k(2h) - \omega t + \pi + 2n\pi \tag{6.85}$$

となります。$\lambda = 2\pi/k$ であることから

$$\lambda = -\frac{2h}{n + \frac{1}{2}} \tag{6.86}$$

という、高校でも学んだよく知られた結果ができます。同様の見積もりをしてみましょう。

今、第 1 層にエネルギーが閉じ込められている状況を考えているため、入射波は臨界角を超えて全反射しているとします (6.1.1 節参照)。第 1 層と第 2 層の境界の反射でい位相は

$$argR_{12} = -2\tan^{-1}\frac{\mu_2 i p_{2z}}{\mu_1 p_{1z}} = -2\tan^{-1}\frac{\mu_2\sqrt{p^2 - \beta_2^{-2}}}{\mu_1\sqrt{\beta_1^{-2} - p^2}} \tag{6.87}$$

だけずれることとなります。気柱の振動と異なるのは一度反射した波は地表点 X に戻ってくる点です (図 6.21)。つまり入射 SH 波の $(X, 0)$ の位置での位相が反射波の位相とそろう必要があります。往復走時 T は

$$T = \frac{\sqrt{X^2 + (2h)^2}}{\beta_1} \tag{6.88}$$

となります。その間に入射波は Xp だけ位相が進みます。まとめると

$$\omega T + argR_{12} = \omega pX + 2n\pi \tag{6.89}$$

の関係を満たす必要があります。

$$X = \frac{2ph}{\sqrt{\beta_1^{-2} - p^2}} \tag{6.90}$$

であることから、

$$\tan\left[h\omega\sqrt{\beta_1^{-2} - p^2}\right] = \frac{\mu_2\sqrt{p^2 - \beta_2^{-2}}}{\mu_1\sqrt{\beta_1^{-2} - p^2}} \tag{6.91}$$

という関係を満たす必要があることがわかります。この式はの特性方程式として知られています。式の見通しをよくするため $\eta_1 \equiv \sqrt{\beta_1^{-2} - p^2}$ を定義すると

$$\tan\left(\frac{h\omega}{\beta_1}\beta_1\eta_1\right) = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{1 - (\beta_1/\beta_2)^2 - (\beta_1\eta_1)^2}}{\beta_1\eta_1} \tag{6.92}$$

と書き換えることができ、$\beta_1\eta_1$ を変数と取ると見通しが良くなります。図 6.24 に左辺と右辺をそれぞれ $\beta_1\eta_1$ の関数としてプロットしました。2 つの線が重なるとき条件を満たし Love 波が存在できます。

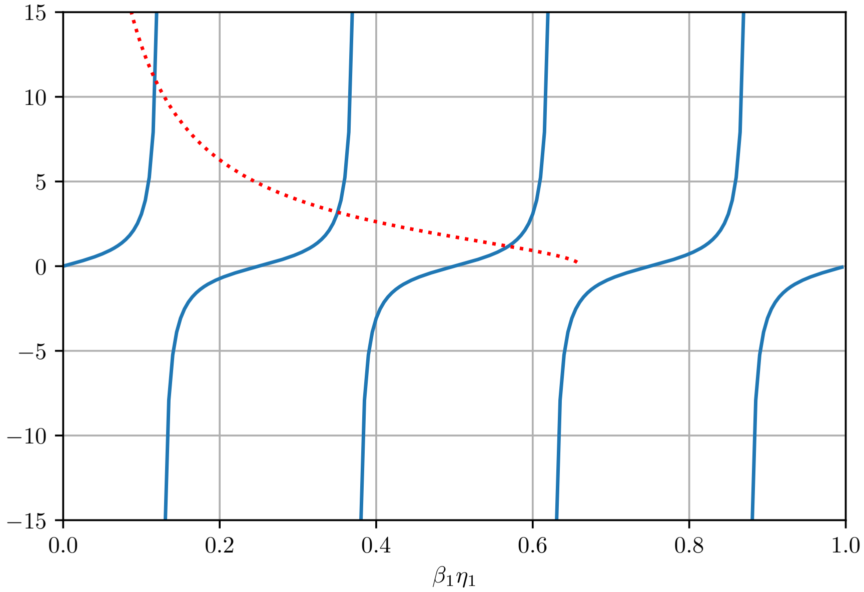


図 6.24　Love 波の特性方程式の根。h = 30 km, 0.2 Hz, β_1 = 3 km/s, β_2 = 4 km/s, ρ_1 = 2.5 g/cm^3, ρ_2 = 2.8 g/cm^3 を仮定している。

右辺は $\beta_1\eta_1 = \sqrt{1-(\beta_1/\beta_2)^2}$ 以下の場合に存在できます。左辺は tan ですから、最低 1 つの解が存在できることが分かります。この解を基本モードと呼びます。今の状況設定では (0.2 Hz) では、3 つの解が存在することが分かります。それぞれ、$\beta_1\eta_1$ が小さい方から (すなわち波長が長い方から) 基本モード (0 次モード)、1 次モード、2 次モードと呼びます。

1 次高次モードが存在できる条件を考えてみましょう。周波数が低くなると、破線が左に移動していきます。tan の位相が $3\pi/2$ より左になると存在できません。つまり

$$\pi\frac{\beta_1}{h\omega} \leq \sqrt{1-(\beta_1/\beta_2)^2} \tag{6.93}$$

である必要があります。n 次モードの遮断周波数 f_n^{cut} は

$$f_n^{cut} = \frac{n\beta_1}{2h}\frac{1}{\sqrt{1-(\beta_1/\beta_2)^2}} \tag{6.94}$$

と書くことができます。

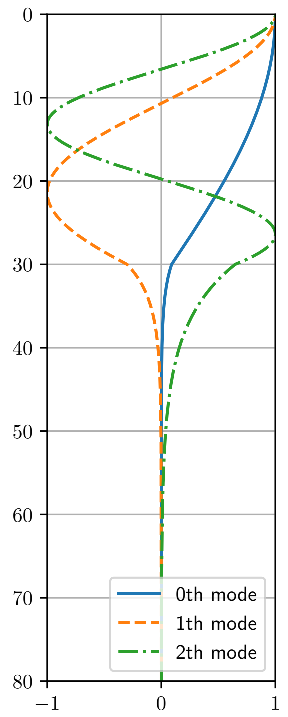


図 6.25　Love 波の振幅の深さ分布。各モードの振幅は地表で規格化している。

それぞれのモードの変位分布をを見ていきましょう。図 6.25 はそれぞれのモードに対応した、変位の深さ分布を表しています。低速度層 (第 1 層) にエネルギーが閉じも込められて、第 2 層では振幅が深くなるにつれて指数関数的に減衰している様子が分かります。気柱の振動と対応しており、節の数が少ない方から基本モード、1 次モード、2 次モードと対応している様子が分かります。

Jeans の関係式

位相速度と群速度

周波数ごとにの位相速度 (p^{-1}) をプロットしたのが図 6.26 です。各モードとも、位相速度 (実線) は長周期側では β_2 となり、周波数が高くなるにつれて単調減少し β_1 に漸近します。基本モードは周波数が 0 から存在しますが、高次モードは低周波数側に遮断周波数が存在します。

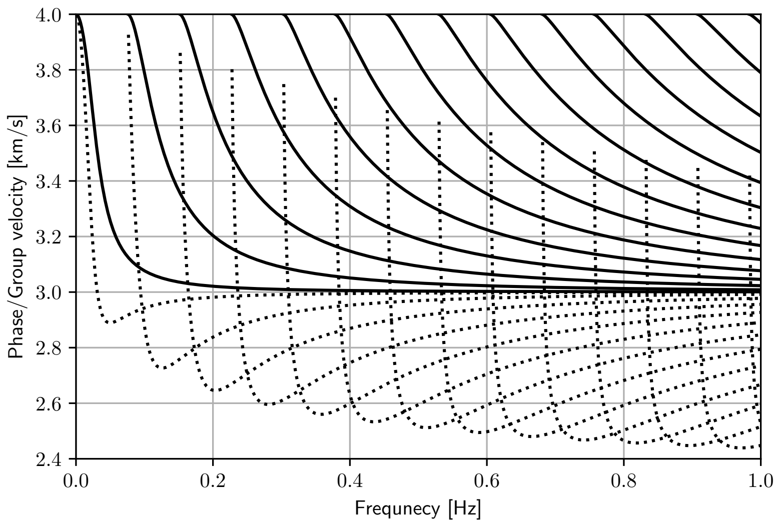


図 6.26　Love 波の分散曲線。位相速度を実線で、群速度を破線で表している。ここでも h = 30 km, 0.2 Hz, β_1 = 3 km/s, β_2 = 4 km/s, ρ_1 = 2.5 g/cm^3, ρ_2 = 2.8 g/cm^3 を仮定している。

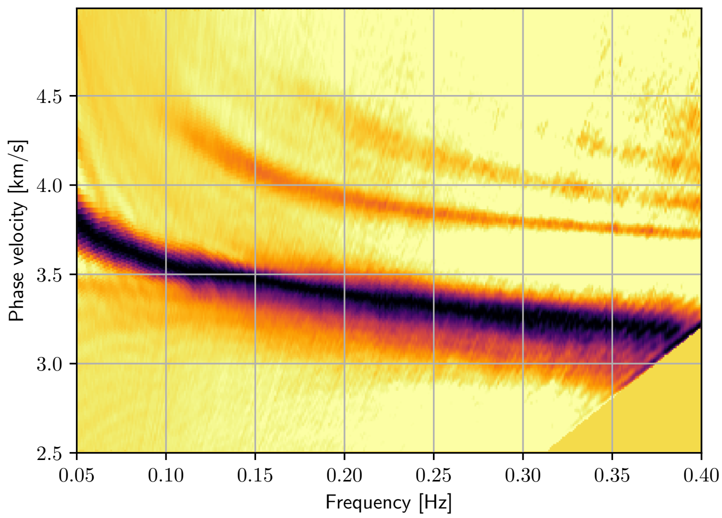


図 6.27　Hi-net 傾斜計で観測された、日本列島を伝播する Love 波の分散曲線。解析の詳細は (5) を参照。

ここで実際のの観測例を見てみましょう。図 6.27 は、Hi-net 傾斜計で記録された Love 波の分散曲線です。日本列島での平均的な値を表しています。基本モード、1 次高次モード、2 次高次モード、3 次高次モードが見て取れます。4.5 km/s にカットオフがあり、マントルの S 波速度はおおよそ 4.5 km/s 程度である事が分かります。また基本モードは短周期ほど位相速度が遅くなっています。これは地殻は 1 層で表すことは出来ず、浅部ほど

S 波速度が遅くなっているためです。

表面波は、周波数によって伝播速度が異なります。このような現象を分散と呼びます。ここでは単純化のために

$$\int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} e^{i(k(\omega)x-\omega t)}d\omega \tag{6.95}$$

で表される波の伝播を考えます。ここで、ω は波の周波数、$k(\omega)$ は波数、x は位置を表します。ここで $k(\omega)$ を中心周波数 ω_0 付近でテーラ展開すると、

$$k(\omega) \approx k_0 + \frac{dk}{d\omega}(\omega-\omega_0) + O(2) \tag{6.96}$$

となります。$\Delta\omega$ が十分に小さいときには、

$$\int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} e^{i(k(\omega)x-\omega t)}d\omega \approx e^{i(k_0x-\omega_0 t)}\int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{i\omega'\left(\frac{dk}{d\omega}x-t\right)}d\omega' = e^{i(k_0x-\omega_0 t)}\frac{2\sin\left(\frac{x}{c_g}-t\right)}{\frac{x}{c_g}-t} \tag{6.97}$$

となります。ここで群速度 c_g は $d\omega/dk$ と定義しました。位相は ω_0/k_0 で進み、包絡線 (sinc function $\sin x/x$) は群速度 c_g で進む事が分かります。

実際に積分を実行した結果を図 6.28 にこ示しました。分散のない単純な場合と違い、波形の形を変えながら伝播している様子がわかります。振幅が同じ (同位相) 線は、位相速度 ω/k で伝播します。一方波群全体は群速度 $d\omega/dk$ で伝播していきます。上の積分を 2 つの周波数での和で近似すると、三角関数の和積の公式から群速度の式を導くことが出来ます。

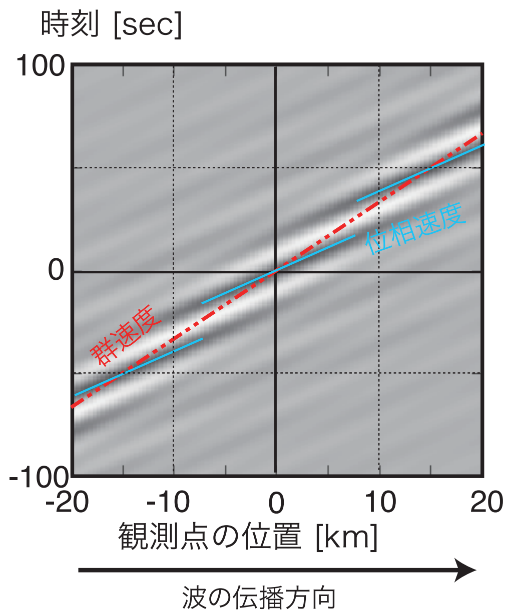


図 6.28　波の分散。

ここで改めて図 6.26 を見てみましょう。群速度は点線で表しています。位相速度は周波数に対して減少していますが、群速度はそれぞれ極小値を持ちます。極小値が存在する場合には何が起こるでしょうか？ 極小値近傍では、群速度があまり変化しません。そのような区間を細切れの周波数範囲 (例えば周波数幅 $2\Delta\omega$) に分割したとします。それぞれ同じ群速度で到達するために、それぞれの波束が同時に到来し振幅が大きくなります。このように群速度が極小値付近の波束の振幅が大きくなり、Airy phase として知られています[注 15)]。図 6.29 ではの 1 次高次

注 15) 詳細は斎藤 (2009) などを参照してください

モードの例をしましました。確かに群速度が極小値となる 2.7 km/s の群速度を持つ波束が卓越していることが分かります。

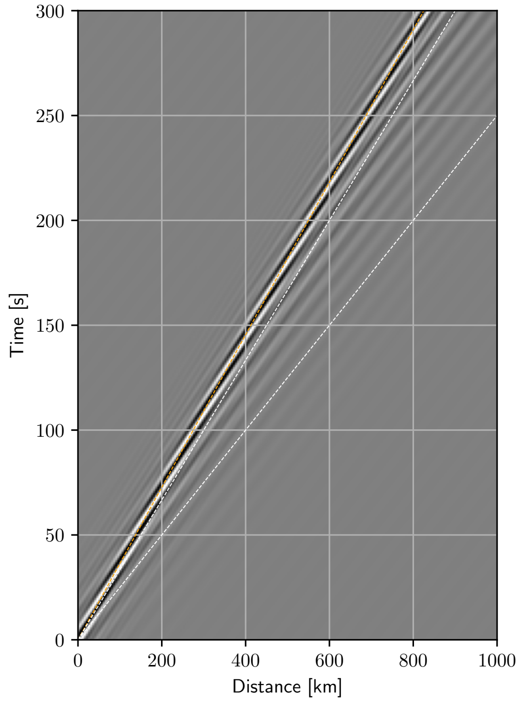


図 6.29　Love 波の 1 次高次モードを、距離と時間に対してプロットした図。白の破線は位相速度 3 km/s、4 km/s に対応し、オレンジ色の破線は 2.7 km/s(群速度の極小値) に対応します。群速度が極小値をとる波束を見て取れます。

Love 波の重ね合わせ

最後に全てのを重ね合わせてみましょう。この節で最初に考察したように、広角多重反射している波を見てとれます (青の点線の少し前の時刻)。青の点線は $T(x) = x\beta_2/(\beta_1^2)$ という走時と対応していて、広角多重反射の走時を表しています。この線より後の時刻に波が見えないということは、下の層に透過するような急な角度で入射した波を表現出来ていないことを示しています。また、特筆すべきはモードの重ね合わせによって、先駆波も再現できている点です (図中の赤破線)。反射波はインパルシブである一方、先駆波はのっぺりとしており、直達波の波形を一度積分した形 (6.3.4 章参照) となっています。これは、高次モードのカットオフ周波数付近のモードが寄与しています。先駆波と平行でかつ 20 秒ほど後に見えている波は、一度広角反射した後に先駆波として伝搬している波です。

一点注意すべきは、先駆波の前に明らかに物理的におかしい (因果律を満たさない) 波群を見て取れます。これらの波群はおおよそ 4 km/s (第 2 層の S 波速度) の位相速度を持っ

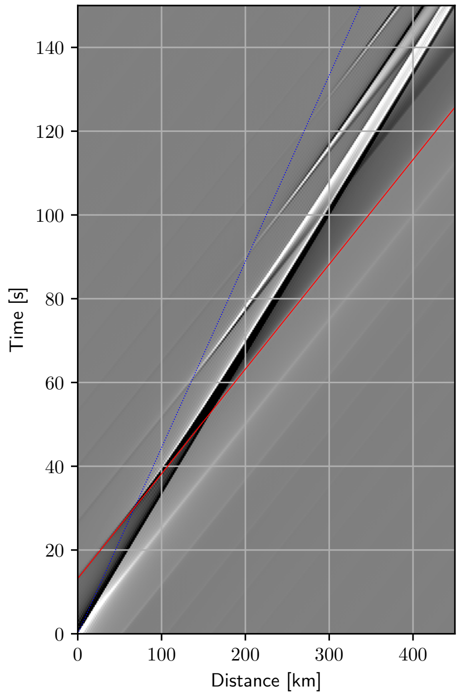


図 6.30　Love 波を 14 次の高次モードまで重ね合わせた図。最も高い周波数は 1 Hz、構造は以前の例と共通です。青の点線は $T(x) = x\beta_2/(\beta_1^2)$ という走時と対応していて、広角多重反射の走時を表しています。赤の線は先駆波の走時を表しています。

ています。これは、は第 2 層を伝播する波を表現できないためです[注 16)]。どのような波がモードとして表現できないかは、物理的に解釈することができます。そのことを含め、より厳密には正規モード解の章で取り扱います。

注 16) 厳密に言うと、分岐積分の寄与によって表現される項です。斎藤 (2009) 9.4 章参照

問題 6.4

分散性の波を、停留位相近似を用いて評価してみましょう。

$$\frac{1}{\pi} Re \int_0^{\infty} e^{i(k(\omega)x - \omega t)} d\omega \tag{6.98}$$

ここで位相 $\Psi = k(\omega)x/t - \omega$ を定義すると

$$\frac{1}{\pi} Re \int_0^{\infty} e^{it\Psi(\omega)} d\omega \tag{6.99}$$

と書き直すことが出来ます。$e^{it\Psi}$ は激しく振動するため、

$$\left.\frac{d\Psi(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} = 0 \tag{6.100}$$

近傍の寄与が大きくなります。このとき

1. ω を ω_0 の 2 次の項まで展開して積分を評価しなさい。
2. 群速度について考察しなさい。
3. また群速度が極地を取る場合について考察しなさい。

6.4.2 Scholte 波

6.5 参考文献

[1] K. Aki and P.G. Richards. *Quantitative Seismology*. Univ Science Books, 2nd edition, 2009.

[2] Craig M Jarchow and George A Thompson. The nature of the mohorovicic discontinuity. *Annual Reviews of Earth and Planetary Sciences*, Vol. 17, pp. 475–506, 1989.

[3] A E H Love. *Some Problems of Geodynamics*. Cambridge University Press. Reprinted in 2015 by Dover Publications, Cambridge, England, December 1911.

[4] Andrija Mohorovičić. Earthquake of 8 october 1909. *Geofizika*, Vol. 9, No. 1, pp. 3–55, 1992.

[5] K Nishida, H Kawakatsu, and K Obara. Three-dimensional crustal S wave velocity structure in japan using microseismic data recorded by hi-net tiltmeters. *J. Geophys. Res.*, Vol. 113, No. B10, p. B10302, October 2008.

[6] J G J Scholte. RAYLEIGH WAVES. IN ISOTROPIC AND ANISOTROPIC. ELASTIC MEDIA. *Meded. en Verhand. KNMI*, Vol. 72, pp. 9–43, 1958.

[7] P.M. Shearer. *Introduction to Seismology*. Cambridge University Press, 2009.

[8] S. Stein and M. Wysession. *An Introduction to Seismology, Earthquakes, and Earth Structure*. Wiley, 1991.

[9] 斎藤正徳. 地震波動論. 東京大学出版会, 2009.

波線理論

第 7 章

前章まででは 2 層までの構造を伝播する波動場について議論してきました。もちろん現実の地球は複雑です。多層構造を伝播する波を議論する際にはどのような理論が有効でしょうか?

地震計 (短周期計、1 秒程度) で観測される地震波の多くは、地球のおおまかな構造と比べると波長が短いと考えることは良い近似です注 1)。波形全体の情報を使うことが理想出来ですが、現象を抽象化して現象全体像を掴むことは大切です。図 7.1 を見てみましょう。P 波や S 波の到来を見て取れますが、散乱などの影響で特に S 波の伝播が複雑であることも分かります。地球内部構造の複雑性に由来する波形の複雑性もありますが、観測に伴うノイズも問題です。このような場合、波の到来時刻 (走時) は非常に安定して測定することが出来、走時を解釈できるようになることは地震波形を理解する上でとても大切な技術です。この章では走時の情報に注目していきます。

図 7.2 を見てみましょう。この図は地震計が実際に全球的に伝播する地震波も目視で波の立ち上がり時刻を読み、震源距離に対してプロットしたものです。黒色が P 波の系統を、赤色が S 波の系統を表します。数多くのフェイズ (通ってきた経路、波の種類の組み合わせによって分類します) が見て取れます。波形そのままでは (例えば図 5.2 参照) 伝播が複雑な場合も、立ち上がり時刻という抽象化されたデータを見ることによって、全体像をつかみやすくなります。この図だけを見ても、震央距離によってのみ走時が決まることから、地球内部構造は 1 次元と近似して良さそうだということもわかります。また P 波 (角距離が 100 度、走時が 13 分程度) では走時のばらつきが大きく、これはコアマントル境界の速度不均質が大きいことが読み取れます。

これらの波を解釈する際には、幾何光学 (geometrical optics 近似) が有効です。厳密には高周波の極限のみで成り立ちますが、地球内部構造を調べる際に広く有効な事が知られています。幾何光学に基づく地震波の伝播理論を (Ray theory) と呼び、長い間重要な役割を果たしてきました。特に多層構造 (水平成層) でのは、地震波動場を解釈する上で土台となるものです。本章では波動の伝播を解釈する際の基礎として、について解説していき

注 1) 地球の不均質構造の空間スペクトルを取ると、長波長が卓越していることが知られています。

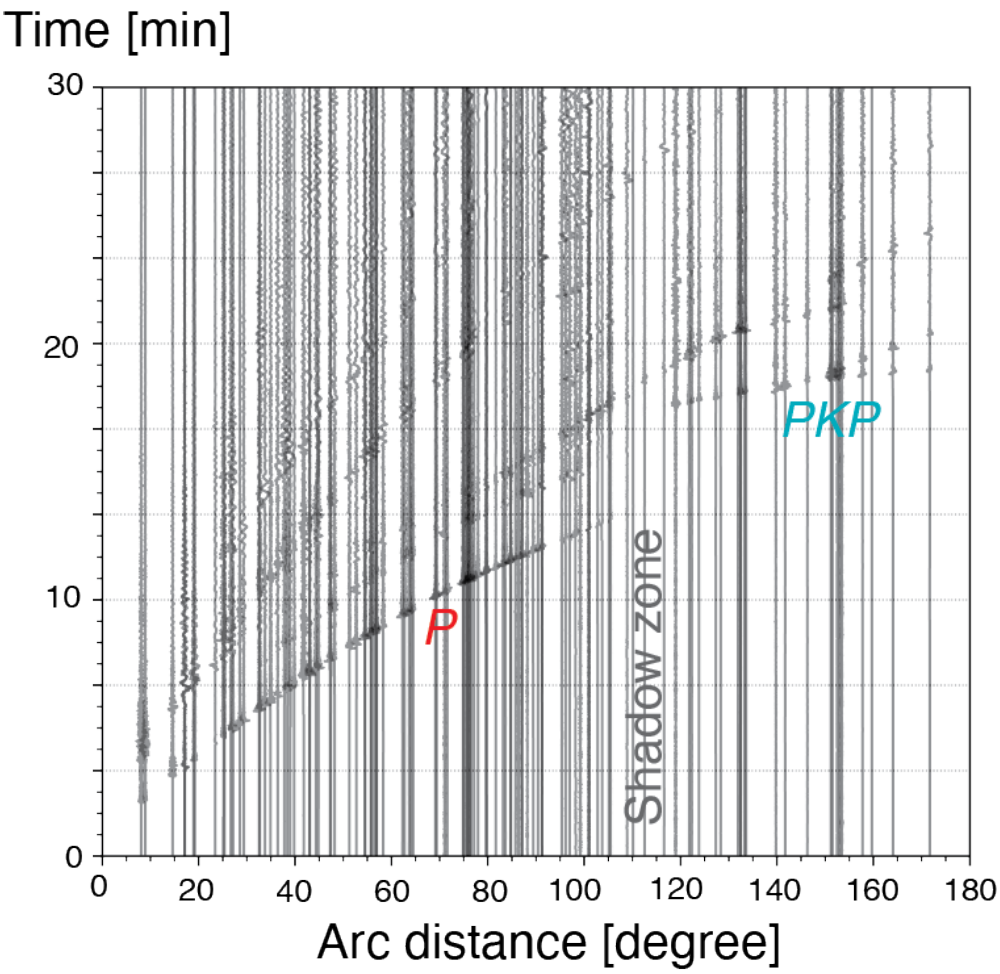


図 7.1　2015 年小笠原諸島西方沖地震の観測記録。明瞭な P 波 S 波を見て取れるが、波形はそれほど単純でもないことが分かる。110° 付近に P 波が届かない領域がある事が分かります。外核による shadow zone を見て取ることが出来る。

ます。

7.1 高周波近似

まず P 波ポテンシャルについて考えます。波長よりも密度や弾性定数が変化する特徴的な空間スケールの方が十分に長い () とすると、

$$\ddot{\phi} = \alpha^2 \nabla^2 \phi \tag{7.1}$$

という波動波動方程式を考えると十分です。

ここで $\phi(\boldsymbol{x}, t) = A(\boldsymbol{x}) f(t - T(\boldsymbol{x}))$ と同じ形が伝搬していることを考えます。ポテンシャ

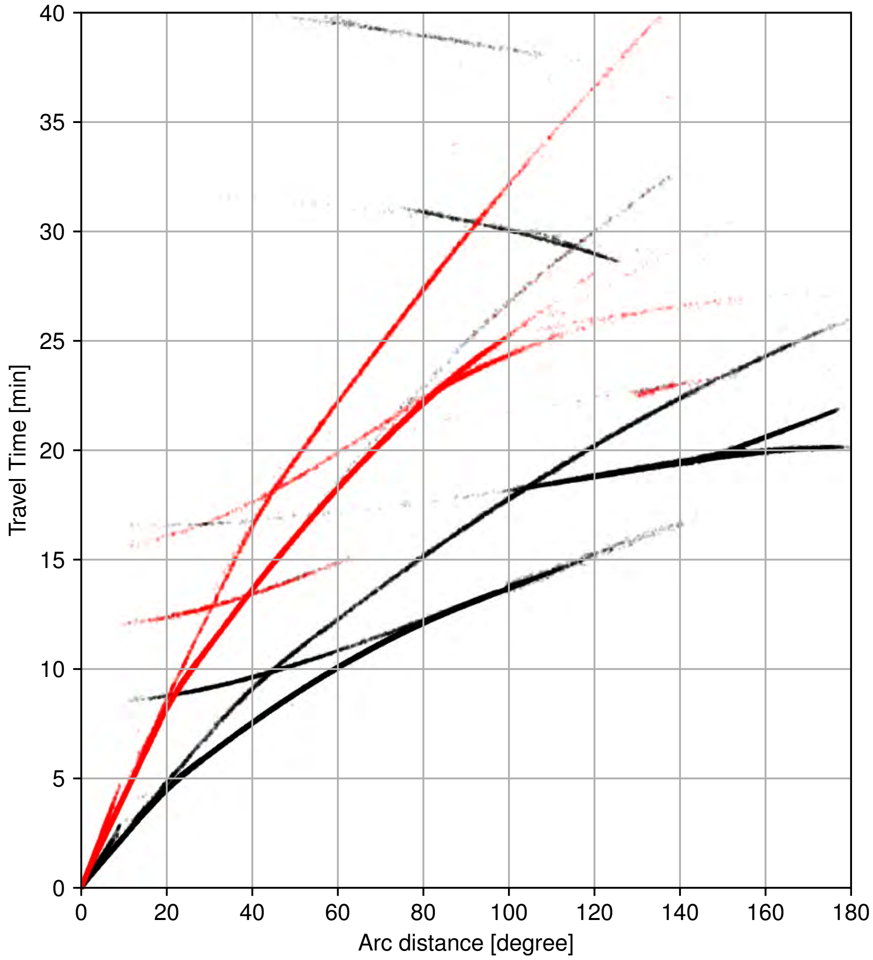


図 7.2　いろいろなフェズの走時プロット。黒は P 波、赤は S 波を表す。2018 年に発生した 20 km より浅いイベントを選んだ。データは International Seismological Centre (2021), On-line Bulletin, https://doi.org/10.31905/D808B830 による。

ルは一価関数で表現されているので、空間微分は $\nabla f = \nabla T \dot{f}$ と書けます。代入すると、

$$\frac{1}{\alpha^2}\ddot{\phi} = \nabla^2 A f(t-T) - 2\nabla A \cdot \nabla T \dot{f}(t-T) + A\ddot{f}(t-T)(\nabla T)^2 + A\dot{f}(t-T)\nabla^2 T \tag{7.2}$$

と書けます。

ここで両辺時間に関してフーリエ変換すると、

$$-\frac{\omega^2}{\alpha^2} = \nabla^2 AF(\omega) - 2i\omega\nabla A \cdot \nabla TF(\omega) - A^2\omega^2 F(\nabla T)^2 - A\omega iF\nabla^2 T \tag{7.3}$$

角周波数 ω が十分に大きいとすると、実部から

$$|\nabla T|^2 = \frac{1}{\alpha^2} \tag{7.4}$$

を満たさなくてはならない事が分かります。この式をと呼びます。ここで slowness vector $\boldsymbol{p}$ を ∇T で定義します。

一方角周波数 ω が十分に大きいとすると虚部から

$$2\nabla A \cdot \nabla T + A\nabla^2 T = 0 \tag{7.5}$$

という輸送方程式 (Transport equation) と呼ばれる関係式が得られます。$\nabla \cdot (A^2\boldsymbol{p}) = 0$ と書き換えることが出来、エネルギー保存を表していることが分かります。を解いて T が得られれば、輸送方程式から振幅 A を見積もることが出来ます。

7.2 波線追跡: Hamilton 形式

では、を積分して走時 T を計算していきます。波線追跡 (ray tracing) と呼ばれる手法です。皆さんも一度は聞いたことはあると思いますが、そもそも波線追跡とはどのような物理的な意味を持つのでしょうか? 追って解説するように波線追跡の理論は、を使って走時を計算することは、粒子のポテンシャル下での運動を追跡することと等価であることに基づいています。ただ少しややこしい事に、単純に時刻を parameter として考えると、粒子の運動として記述出来ません。この力学系は時刻のかわりに generating parameter σ で記述すると (詳細は後述します) 自然な形となります。

解析力学の知識を基礎とするためどうしても形式張ってしまいますが、順に解説していきます。

ある粒子がポテンシャル $-1/\alpha$ のもと運動する様子を追跡する問題を考えていきます。時間に対応する粒子の位置を決めるパラメータ σ (generating parameter)

$$d\sigma = \alpha ds \tag{7.6}$$

を考えます[注 2)]。ここで ds は粒子の経路を表します。系のハミルトニアン H

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} - \alpha^{-2}(\boldsymbol{x})\right], \tag{7.7}$$

を考えます[注 3)]。はこの力学系の拘束条件と解釈できて、ハミルトニアンを使って

注 2) 位置を決めるパラメータとして s や走時 T で力学系を構成することは可能ですが、σ が一番式の見通しが良いのため、この章では σ を使って話を進めます。

注 3) 詳細は Dahlen and Tromp [1998][(4)] の 15 章参照

$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=0$ と書くことが出来ます。は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\sigma}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p} \tag{7.8}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\sigma}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{1}{2}\nabla\alpha^{-2} \tag{7.9}$$

と書けます。これは、以下のように解釈することが出来ます。

1. ある粒子がポテンシャル $-\alpha^{-2}$ のもと運動する様子を追跡する問題を考える。
2. 初期値は $\boldsymbol{p}$ で決まる。ただし $\boldsymbol{p}$ の値は何でも良いわけではなく、$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})=0$ に拘束 (初期値 $\boldsymbol{p}$ の絶対値が射出点での $1/\alpha$ であることと等価)。
3. から、$dH=\partial_{\boldsymbol{x}}Hd\boldsymbol{x}+\partial_{\boldsymbol{p}}Hd\boldsymbol{p}=0$ であることが分かる。つまり射出点で $H=0$ を満たしていれば、積分路にそっては常に $H=0$ である事が分かる。
4. 運動はを積分することで追いかけることが出来る。物理的には σ が時刻に対応する。

2 つの 1 階の微分方程式をまとめて

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{d\sigma^2}-\frac{1}{2}\nabla\alpha^{-2}=\boldsymbol{0} \tag{7.10}$$

と書くことも出来ます。この式は運動方程式を表します。また対応する Lagrangian は

$$L=\frac{1}{2}\left[\dot{x}\cdot\dot{x}+\alpha^{-2}(\boldsymbol{x})\right] \tag{7.11}$$

と書け、$\boldsymbol{p}=\partial_{\dot{\boldsymbol{x}}}L$ の関係式 (一般化運動量の定義) を満たします[注 4)]。

水平成層構造を考えてみましょう。この場合 α は z にのみ依存するので[注 5)]式 7.9 の x 成分は

$$\frac{dp_x}{d\sigma}=0 \tag{7.12}$$

となり、p_x が保存量であることが分かります。p_x を特に と呼びます。

7.2.1 球対称構造の場合

地球規模での波動の伝播を考える場合には球座標で記述したほうが実用的です。地震波速度構造 $\alpha(r)$ は半径 r のみの関数 (球対称構造) を仮定すると、Lagrangian L は

$$L=\frac{1}{2}(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2+(r\sin\theta\dot{\phi})^2+\alpha(r)^{-2}) \tag{7.13}$$

注 4) Slowness ベクタに対して $\boldsymbol{p}$ という変数名をなぜ良く当てるか不思議に思ったかもしれません。一般化運動量との対応から $\boldsymbol{p}$ を良く使います。時間を独立変数に取ると運動量は粒子の速度とは比例しませんが、generating parameter を変数に取ると速度 ($\dot{\boldsymbol{x}}$) と比例し直感と一致することが分かります

注 5) 解析力学では x をサイクリック座標と呼びます

と書くことが出来ます。いま θ 方向への伝播距離 (角距離 Δ) を考えれば十分です。球構造の場合に $\boldsymbol{p} = (p_r, p_\theta, p_\phi)$ (極座標表示) は

$$
\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{dr}{d\sigma} \\
p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \frac{d\theta}{d\sigma} \\
p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (r\sin\theta)^2 \frac{d\phi}{d\sigma}
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

と書く事が出来ます。同様にハミルトニアン H は

$$
H = \frac{1}{2}(p_r^2 + r^{-2}p_\theta^2 + (r\sin\theta)^{-2}p_\phi^2 - \alpha(r)^{-2}) \tag{7.15}
$$

と書くことが出来、ハミルトン方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{dr}{d\sigma} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r, \\
\frac{d\theta}{d\sigma} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{r^2}, \\
\frac{d\phi}{d\sigma} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{(r\sin\theta)^2},
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dp_r}{d\sigma} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha^{-2}}{\partial r} + \frac{1}{r^3}\left[p_\theta^2 + \frac{p_\theta^2}{(\sin\theta)^2}\right], \\
\frac{dp_\theta}{d\sigma} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha^{-2}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\cot\theta}{(\sin\theta)^2}p_\theta^2, \\
\frac{dp_\phi}{d\sigma} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha^{-2}}{\partial \phi},
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

となります。水平成層構造の場合には、射出点を極に置いても一般性を失いません。また α が θ と ϕ に依存しないためその偏微分は 0 になります。そのため $p_\phi = 0$ となり、$\dot{p_\theta} = 0$ となります。そのため、デカルト座標の場合と同様 p_θ は波線に沿って保存し、この場合もと呼ばれます。

7.2.2 Earth flattening transform

を考える場合には、水平成層構造 ($\alpha(z)$ が z のみの関数) と球対称構造には簡単な対応関係があります。片方の問題をといてしまいえば、もう一方に変数変換だけで対応出来ます (Earth flattening transform)。 以下、この変数変換について考えてみましょう。

点震源から等方的に地震波が伝播している問題を考えていきましょう。この時のを球座標で考えてみましょう。θ 方向のみの伝播を考えれば十分ですので、

$$
\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{\alpha(r)^2} \tag{7.18}
$$

となります。地球半径を R_e をとすると

$$\frac{1}{R_e^2}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{r^2}{R_e^2}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 = \frac{r^2}{R_e^2}\frac{1}{\alpha(r)^2} \tag{7.19}$$

と書けます。$x = R_e\theta, r = R_e e^{-z/R_e}, \alpha(z) = R_e\alpha(r)/r$ という変換をすると、水平成層構造の問題に書き換えることが出来ます。はの範囲では厳密に成り立ちます。SH 波の伝播に対しても成り立ちますが、SV に対しては近似的にしか成り立ちません[注 6)]。

問題 8.0

一様な速度をもつ球を考え、対応する水平成層構造を を使って求めよ。また、直交座標系での波線を考え、一様球の場合との対応を考察せよ。

注 6) 詳細は Aki and Richards Box 9.9 を参照 [1]。

7.2.3 最小作用の原理 (フェルマーの原理)

波線経路は Lagrangian を最小化する経路を選ぶ () ため

$$\delta \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) d\sigma = \delta \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} [\boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})] \, d\sigma \tag{7.20}$$

の関係式を満たします。このことと、走時を最小化することが等価なことは、

$$\delta \int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{x} = \delta \int_{T_1}^{T_2} dT = 0 \tag{7.21}$$

という関係式から分かります。

7.2.4 Eikonal 方程式の直接解法

を直接解くというアルゴリズムも、複雑な (水平成層でな構造) でよく使われます。これは、最小作用の原理を元に最も早く到達する波線を効率的に探すアルゴリズムです (e.g., Rawlinson and Sambridge 2005[9])。

7.3 $\tau - p$ (Radon) 変換

$\tau(p) = T - p_x X$ という関数を定義すると (物理でよく知られる Legendre 変換と呼ばれる変換の一種です)、高速度層のため した場合でも一価関数になり、実際の構造推定によく用いられます (図 7.8 を見ると τ が p の一価関数になっていることが分かります)。τ は intersection time とも呼ばれ地震波動場解析でよく出てくる観測量です。

p_x の関数として τ が分かれば、$d\tau/dp = -X$ という関係式から、X の関数として T を構成することが出来ます[注 7)]。

アレー解析 (ある X 付近に多数の地震計を置き、密なデータから色々な情報を引き出す解析手法) に際して[注 8)]、Slant stack と呼ばれる解析法がありますが、その理論的裏付けとなります。図 7.3 には、地殻内で起こった地震の例を挙げます (2016 年鳥取地震)。図左の波形を仮定した slowness に沿って足し合わせ、y 切片である τ に対してプロットしたのが右図です。現実の波形は地表反射や、地殻内の不均質構造による散乱はを含むため複雑になりますが、で考えた $\tau - p$ に対応する曲線を見て取れます。

注 7) 定義から τ の p_x での微分は

$$\frac{d\tau}{dp_x} = \frac{dT}{dp_x} - X - p_x \frac{dX}{dp_x} = \frac{dT}{dp_x} - X - \frac{dT}{dX}\frac{dX}{dp_x} = -X \tag{7.22}$$

となることが分かります。

注 8) データ解析の詳細は Zhou による教科書 Practical Seismic Data Analysis[12] など参照のこと。

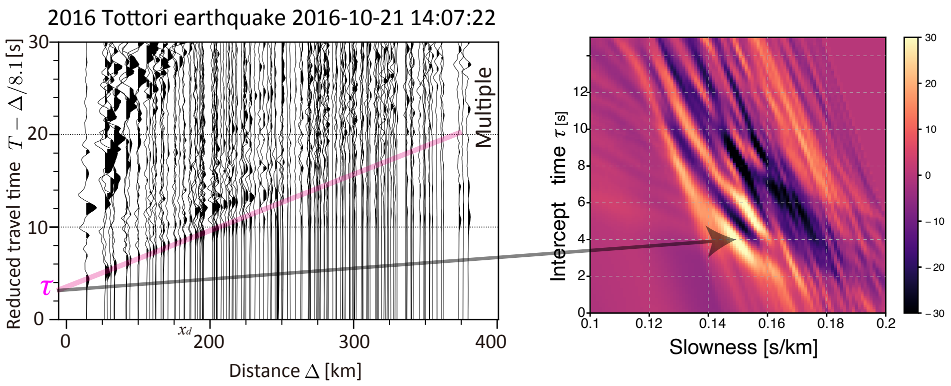


図 7.3　Slant stack の例。前の章で取り上げた、2016 年鳥取地震の例。

$\tau - p$ を p が 2 次元の場合にも拡張できます。位置 $\boldsymbol{X}$ に対する走時 T と同じ情報をもつ量を、従属変数 $\boldsymbol{p}$ で考えるには Legendre 変換する必要があります[注 9)]。

$$\tau = T - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{X} \tag{7.23}$$

$\boldsymbol{p}$ から $\boldsymbol{X}$ に変数変換するためには、

$$\frac{d\tau}{dp_x} = -X, \tag{7.24}$$

$$\frac{d\tau}{dp_y} = -Y, \tag{7.25}$$

$$\tag{7.26}$$

という関係式が使えます[注 10)]。

7.4 振幅: Geometrical spreading

2 層モデルの場合と同様にエネルギーの保存則を考えることで、で計算された各フェイズ (P 波、S 波等) に対してその振幅を計算することが出来ます。

水平成層構造の地球を地震波が伝播する場合を考えてみましょう。地震波が射出角 i_0 で震源から出るとき、微小立体角

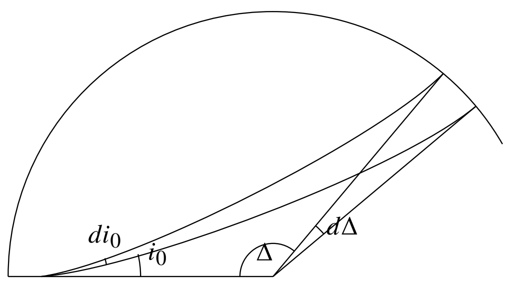


図 7.4

注 9) 厳密に言うと Legendre 変換には凸性が必要なため、retrograde, prograde の領域に分割しそれぞれ変換する必要があります

注 10) 1 次元の場合と同様に証明できます

$d\Omega_0 = \sin i_0 di_0 d\phi_0$ から放出されるエネ
ルギーを考えます (震源–地球中心に z 軸をとり、極座標 (r, i_0, ϕ) を考えます)。ここで r_1 は地球半径です。この立体角で放出された波が、角距離 Δ の地表の点に達した時にの波面では、図を参考にすると断面積 dS_1

$$dS_1 = r_1^2 \sin\Delta |d\Delta| d\phi_0 \cos i_1, \tag{7.27}$$

となります。ここで r_1 は観測点の地球中心からの距離,r_0 は震源の地球中心からの距離、i_1 は観測点への波線の入射角です。

波線に沿ったエネルギー保存から

$$K_0 d\Omega_0 = K_1 dS_1 \tag{7.28}$$

という式が得られ、観測点でのエネルギーフラックス K_1 は

$$K_1 = K_0 \frac{d\Omega_0}{dS_1} = K_0 \frac{\sin i_0 di_0}{r_1^2 \cos i_1 \sin\Delta |d\Delta|} \tag{7.29}$$

と書くことが出来ます。ここで

$$p = \frac{r_0}{\alpha_0} \sin i_0 = \frac{dT}{d\Delta} \tag{7.30}$$

$$\frac{dp}{d\Delta} = \frac{r_0}{\alpha_0} \frac{d \sin i_0}{d\Delta} = \frac{d^2T}{d\Delta^2} \tag{7.31}$$

$$\frac{d \sin i_0}{d\Delta} = \frac{\alpha_0}{r_0} \frac{1}{\cos i_0} \frac{dp}{d\Delta} \tag{7.32}$$

を使い (r_0 は震源の地球中心からの距離) 最終的に、振幅を決める幾何学量 geometrical spreading $\mathcal{R}$ は

$$\frac{1}{\mathcal{R}^2} = \frac{K_1}{K_0} = \frac{1}{r_1^2} \frac{\alpha_0}{r_0} \frac{\tan i_0}{\cos i_1 \sin\Delta} \left| \frac{d^2T}{d\Delta^2} \right| \tag{7.33}$$

$$= \frac{1}{r_1^2} \frac{\alpha_0^2}{r_0^2} \frac{p}{\cos i_0 \cos i_1 \sin\Delta} \left| \frac{dp}{d\Delta} \right| \tag{7.34}$$

と得られます。ここで $dp/d\Delta$ は波線密度 (前節の図参照) が高いほど振幅が大きくなることを表しています。この事は次のように解釈できます。(1) 震源で四方八方に均等にエネルギーを飛ばす。(2) 波線が”エネルギー”粒子を追跡しているとみなす。(3) 観測点にどの程度の粒子が到達しているか計算する。(4) 到達したエネルギーから観測点での振幅を見積もる。

震源付近は媒質均質だとすると、局所的には無限領域での Green 関数で近似することが出来ます。無限媒質の Green 関数と接続することによって、波線近似を用いた Green 関数を計算することが出来ます。観測点が地表にある場合には自由表面の効果で振幅が 2 倍になる点を注意すると、直達 P 波の Green 関数は

$$G(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, f) = \frac{1}{4\pi\mathcal{R}} \left[\frac{\hat{\boldsymbol{\eta}}_1 \hat{\boldsymbol{\eta}}_2 e^{-2\pi f i T_p}}{\sqrt{\rho_1 \rho_2 \alpha_1^3 \alpha_2}} \right] \tag{7.35}$$

ここで $\hat{\boldsymbol{\eta}}_1$ と $\hat{\boldsymbol{\eta}}_2$ は震源と観測点での振動方向ベクトル (polarization vector) で、T_p は P 波走時です。

また地球内部に境界が存在する場合には、境界面で反射、透過が起こります。ここでは、エネルギー保存を元に議論しているため、反射透過係数もエネルギー規格化 (6.3.3 章参照) を用いることが自然です。

7.5 Caustic 火線

を適応する際には、その仮定が成り立つ領域をしっかりと理解する必要があります。どのような場合には問題が生じるのでしょうか？　ここでは波線が重なる場合を考えてみましょう。

$$\left|\frac{d^2T}{d\Delta^2}\right| = \infty \tag{7.36}$$

の時、波線が集中して振幅が発散してしまいます。例えば右の図では真ん中辺りでは先が集中しています。虫眼鏡で火をおこす状況は近いですが、その場合は”焦点”に集中しています。caustic(火線) の場合には線状にエネルギーが集中します (図の場合には、図と直行する方向には均質だとします)。

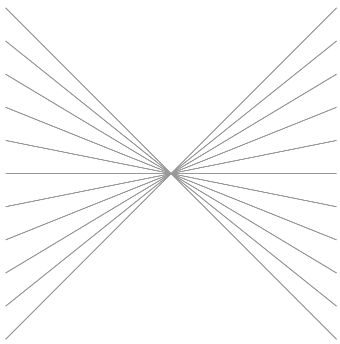


図 7.5

波長より波線が集中した場合には、波線近似が成り立ちません。caustic を通過する波は位相が 90 度ずれるため、注意が必要です。例えば、PP 波 (地上反射の P 波) は P 波と比べ 1 回 caustic を通過してくるために位相が 90 度ずれててしまいます。そのため波形は直達 P 波ので表すことが出来ます。

Caustic 付近では波線近似が破れているため、caustic を中心とする スカラー量 f に関する 2 次元極座標で波動方程式

$$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{dr}\left(r\frac{d}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} = -k_0^2 f \tag{7.37}$$

を考えてみましょう。波線近似が成り立つ場合、色々な空間スケールが波長より十分に長いと仮定していますが、r が波長より短い領域が存在します。ここで簡単のため ϕ に関してフーリエ成分 $f \propto e^{in\phi}$ を考えます。そうすると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = \left(-k_0^2 + \frac{n^2}{r^2}\right) f \tag{7.38}$$

となります。これはまさにベッセル関数の満たす式です。ベッセル関数は遠方では

$$J_n(kr) \propto \frac{1}{\sqrt{(kr)}} \cos\left(kr - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{7.39}$$

と近似でき、原点 (caustic) を通過したら $\pi/4$ が 2 回分ずれることが分かります。極座標で見たときに、r に関する微分よりも、曲率の変化が効くためです。以下大雑把に見積もってみます。例えばデカルト座標系では $\cos\left(\sqrt{2}/2k_0x\right)\cos\left(\sqrt{2}/2k_0y\right)$ は波動方程式を満たしていることが分かります。k_0 と対応する波長を λ_0 とすると、このプラスに膨らんでいる領域の面積は $(\sqrt{2}\lambda_0/2)^2 = \lambda^2/2$ と書くことが出来ます。これが原点を中心とする円の面積と同じと考えると、その半径は $\lambda/(\sqrt{2\pi})$ となります。つまり極座標で考えたときに原点から数えて最初のゼロ点は 0.39 波長程度のと頃にあり、平面波で考えたときの $\lambda_0/4$ よりも伸びていることになります。この累積が $\pi/4$ を生んでいるとと解釈できます[注 11)]。

これはエネルギー保存則を考える場合に、波面の占める面積 dS_2 を負に拡張することで統一的に理解できます。形式的には

$$E_1 dS_1 = E_2 dS_2 \tag{7.40}$$

から $A_2 = A_1 i$ となる必要が出てきます。これは、caustic 前後で座標系が”ひっくり返る”ためです。焦点の場合には 2 方向でひっくり返るため $i^2 = -1$ となり振幅が逆転することになります。直感的な対応付けとしては分かりやすいですが、あくまで形式上の対応です。

Caustic の例として、PP 波は P 波と比べて位相がずれる例が挙げられます。直感的に分かりづらいので以下補足します。地表反射が入るために分かりづらいので、地表面に対しての鏡像を考えてみましょう (図 7.6)。震源から下向きに放射される PP 波の波線を地表で折り返してみると、観測点手前で交差している様子が分かります。一方震源から情報に放射された pP 波は交差しない様子が見て取れます。このため pP と直達波の波形は同じ形をしていますが、PP 波は直達波と形が変わります (互いにの関係にあります)。

注 11) 正確な評価には WKBJ 近似によって、特異点付近を Airy 関数で近似する必要があります (詳細は蓬田さんの教科書 [13] 参照)。もう少し物理的な説明 (回折と対応づける) はランダウ=リフシッツの場の古典論 §59 に記述があります

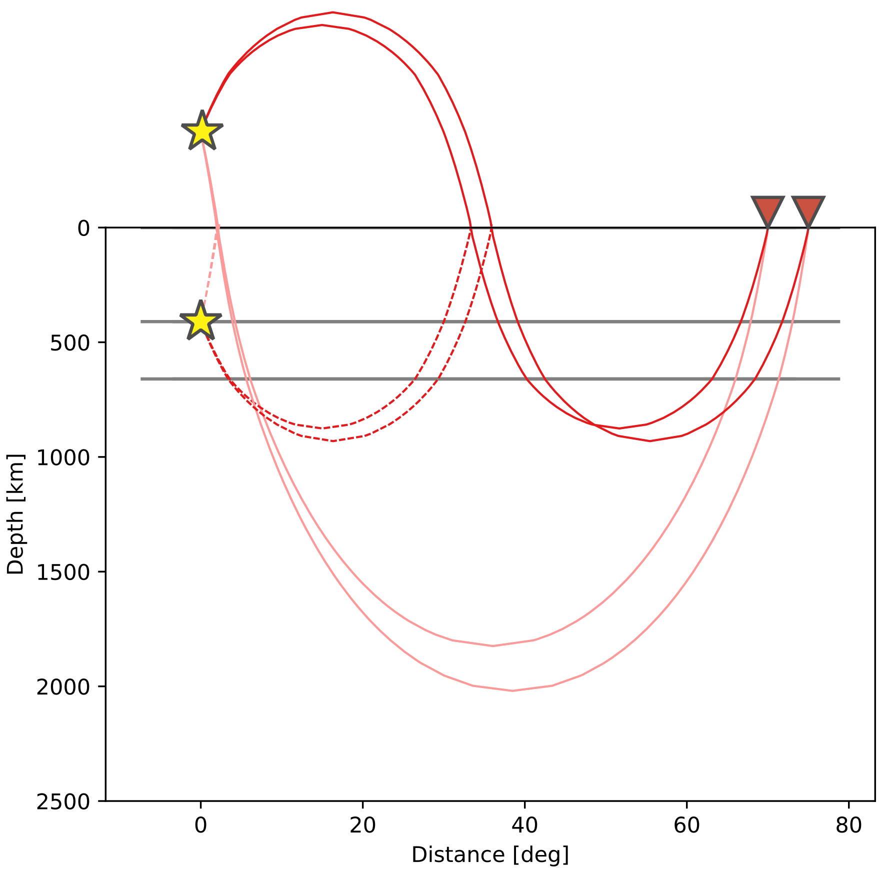


図 7.6　PP 波が castic を通る様子を示した図。この図を見ると、PP 波は波線が交差する一方、と pP 波は交差していない様子が分かる。

7.6 走時解析

Generating parameter σ に関してとくと見通しが良いですが、観測値は直接結びつきません。この節では水平成層構造に対して、震央距離 $X(p_x)$ と走時 $T(p_x)$ を p_x 使って具体的に書き下していきます[注 12)]。

原点では $\boldsymbol{p} = (p_x, \sqrt{\alpha(0)^{-2} - p_x^2})$ と表すことが出来ます。波線の最深点を $z = Z(p_x)$ とする場合に、

$$\alpha(Z) = p_x^{-1}, \tag{7.41}$$

と表すことが出来る事が出来ます。

ここで式 7.8 の z 成分を考えます。

$$\frac{dz}{d\sigma} = p_z, \tag{7.42}$$

となることが分かります。最深点までの到達にかかる σ を Σ とします。最深点までの距離は $X(p_x)$ の半分となるため、式 7.8 の x 成分から

$$\frac{X(p_x)}{2} = \int_0^{\Sigma} p_x d\sigma = \int_0^{Z(p_x)} \frac{dz}{p_z}, \tag{7.43}$$

となります[注 13)]。これをまとめると、

$$X(p_x) = 2p_x \int_0^{Z(p_x)} \frac{1}{(\alpha^{-2}(z) - p_x^2)^{1/2}} dz \tag{7.44}$$

となります。

次は走時 $T(p_x)$ を考えてみましょう。今は σ で考えているので、dt を generating parameter の定義 式 7.6 を使って、

$$dt = \frac{ds}{\alpha} = \frac{d\sigma}{\alpha^2}, \tag{7.45}$$

と結びつける必要があります。X と同様に $d\sigma$ を dz の積分に変換することによって、

$$T(p_x) = \int_0^{s_d} \frac{ds}{\alpha} = 2\int_0^{Z(p_x)} \frac{\alpha^{-2}}{(\alpha^{-2}(z) - p_x^2)^{1/2}} dz \tag{7.46}$$

なります。ここで s_d は震源から最深点までの波線の距離とします。

最後に τ を見ていきましょう。定義を思い出すと

$$\tau(p_x) = T(p_x) - p_x X(p_x), \tag{7.47}$$

注 12) 具体的な議論は Shearer の教科書 [10] が分かりやすい

注 13) p_x は保存量なので、$T(p_x) = \int p_x dX = p_x X(p_x)$ と書けそうと混乱しがちです。この場合には $T(p_x) = \int \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{ds}$ と評価しなくてはいけません。粒子を飛ばす物理的イメージを考える場合には、時刻 t ではなく generating parameter σ を parameter と取らないと矛盾が生じてしまう一例です。

となります。上で導出した式を代入すると

$$\tau(p_x) = 2\int_0^{Z(p_x)} \sqrt{\alpha(z)^{-2} - p_x^2}dz, \tag{7.48}$$

となります。X と T に比べてみると、τ は積分から発散が消え、実際の評価がしやすくなるという利点も出てきます。

以下典型的な構造に対して、波線と走時の関係を見ていきましょう[注 14)]

7.6.1 単調に地震波速度が増加する場合

最も単純な例として、地震波速度が線形に増加する場合を見ていきましょう。図 7.7 に一例を示しています。p_x は波線に沿って保存されます。そのため見かけ速度 $(1/p_x)$ が地震波速度と一致する点が最深点となり、地表に戻ってくる様子が見て取れます。

図にあるように $p_x = \sin\theta/\alpha(z)$ が小さくなる (射出角が小さくなる) と波線は下向きになり、遠くまで波が届きます。従って到達距離 $X(p)$ は大きくなります。この際、図で示したように $dX/dp_x < 0$ はであり、このような性質を持つ波線を prograde (順行) と呼びます。また、遠く離れると波線の密度が下がることから、振幅が距離が広がるに従って小さくなることも見て取れます。波線密度は dp_x/dX で見積もることが出来、図からもその様子が見て取れます。

S,SS, SSS と Love 波の関係

注 14) 実際の 1 次元構造に対する走時計算に興味がある場合は、[(2), (3), Crotwell et al., 1999, Buland and Chapman, 1983] を参照のこと。

問題 8.1

1. xz 平面で,$z > 0$ での波動の伝播を考えます。地震波速度 α が $a + bz$ と z に関して線形でかける場合に波線が円弧

$$\left(x - \frac{\sqrt{1 - p_x^2 a^2}}{b p_x} \right)^2 + \left(z + \frac{a}{b} \right)^2 = \frac{1}{p_x^2 b^2} \tag{7.49}$$

で書けることを示しなさい。ヒント: 式 7.8 とから計算することが出来ます。

2. 式 7.46 を導出しなさい。

3. $T(p_x)$ が

$$T(p_x) = \frac{2}{b} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{p_x a} \right) \tag{7.50}$$

と書けることを示しなさい。

4. ハミルトン方程式を σ に関して数値積分することで、波線を計算することが出来ます。例えば図 7.7 の様に波線を計算することが出来ます。数値積分では波線を計算し、解析解と比較しなさい。

   $*$ **補足**: の 1 つ目は位置の変化を記述し、2 つ目は波線に沿って全エネルギーが保存するように (言い換えるとを満たすように)、Slowness vector を変化させています。

   ヒント:

$$\frac{d \cosh^{-1}(z)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \tag{7.51}$$

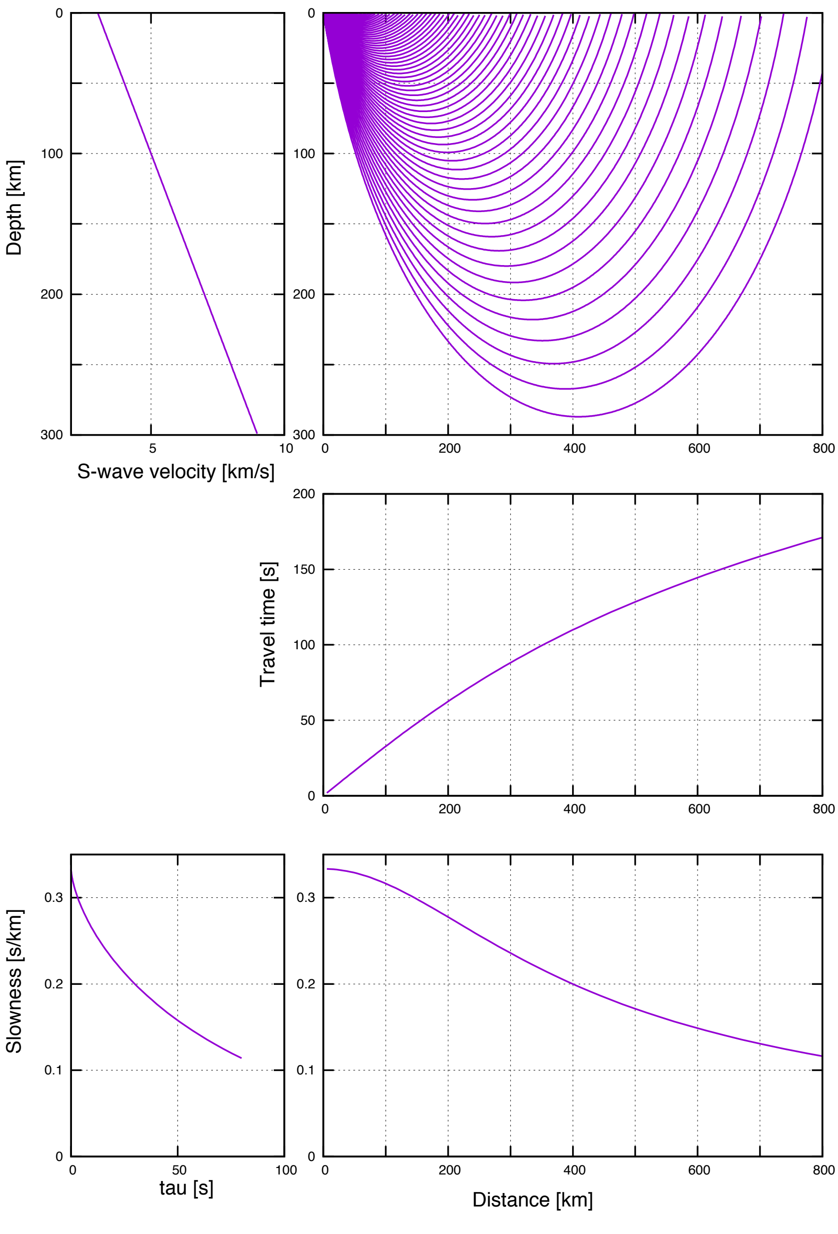


図 7.7　線形に地震波速度が増加する場合。$p_x = dT/dx$ の関係も見て取れます。

7.6.2 地震波速度が急増する場合

次に地震波速度が急増する場合を見ていきましょう。

波線が上層にとどまっている場合には、prograde (dX/dp¡0) の波線になりますが、急増層に波線が入ると Snell の法則強く屈折し結果として波線が震源の近くに戻ってきます。この際に dX/dp は図に示したように正となり retrograde の波線と呼ばれます。さらに入射角が小さくなるとより深い層にまで波線がもぐり、再び prograde の波線となります。$dX/dp = 0$ の波線では波線密度が発散するために、振幅も発散します。これはでは $dX/dp = 0$ の点は特異点で取り扱えない事を意味します[注 15)]。$dX/dp = 0$ になる点のことを caustic (火線) とよび、その付近では振幅が大きくなります。

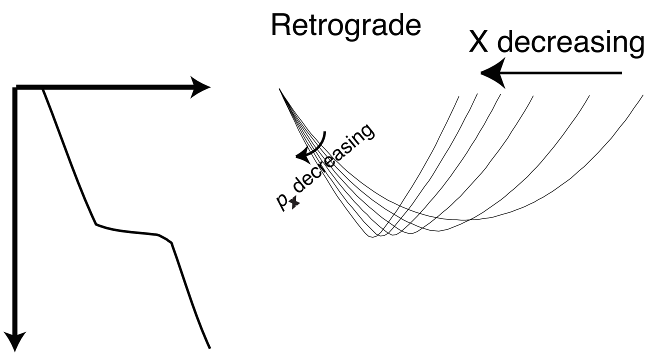


図 7.8　急増層がある場合の波線の様子。

以上基本的な特徴は、前節で解説した地殻・マントル境界の例と共通です。ただではなめらかな構造を仮定しているために、先駆波は現れず、Retrograde な波線と対応します。また図 7.9 を見て分かるように、この波は速度ジャンプ直下で屈折しています。大雑把に言うと、波線の密集度が波の振幅と対応しているため、速度ジャンプ直下の地震波速度が正の傾きを保つ場合には、この図で示したように波線が戻されるために、先駆波と対応する Retrograde な波線を持つ振幅は大きくなることが知られています。

波線をだけを見ていると、付近は互いに重なって見えづらいと思います。そこで、triplication 付近の波線を拡大し、さらに波面も同時に見て見ましょう (図 7.10)。Retrograde な波線がおおよそ緑色と対応しています。Retrograde が始まる箇所で、caustic surface (火面) が形成されてることが分かります。また、triplication が生ずると波面が折り畳まれていることが分かります。折り畳まれている、くさび状の底面が caustic surface を通過した波線に対応し、位相に 90° ずれが生じます。また、不連続面直下の正の速度勾配が波線

注 15) 実際は caustic に波長程度近づくとが成り立たなくなり、caustic 付近では別途波動方程式を満たす解を考える必要があります。cuastic を通ってくる際には位相 90 度が飛ぶ事が知られており注意が必要です。位相のとびについてはでの振幅の取り扱いについて解説する際に再度説明します。

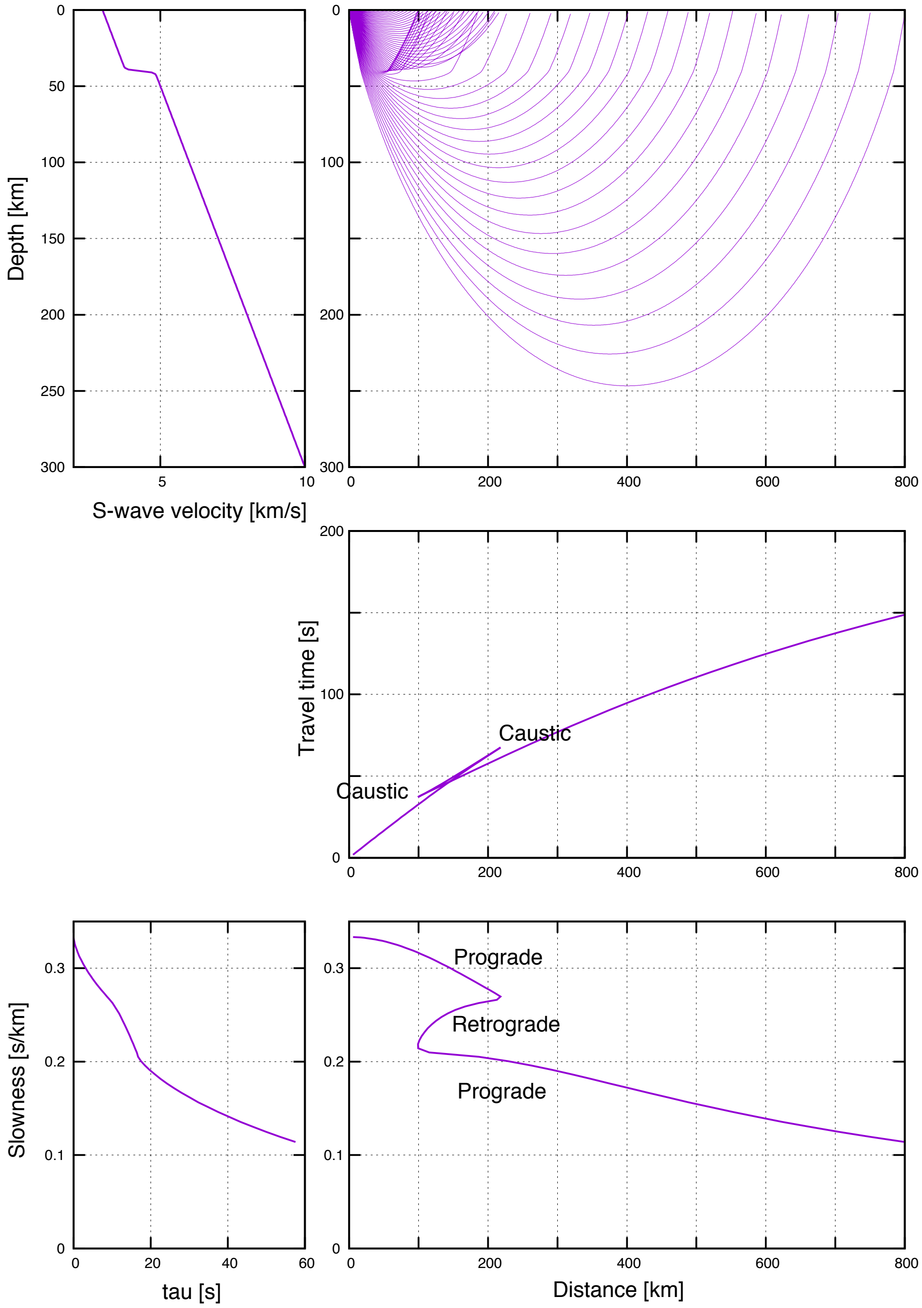


図 7.9　正の地震波速度ジャンプがある場合。

を地表方向に曲げるため、retrograde branch の振幅が大きくなることも見て取れると思います。このように、地震波を考えるときには、波線と波面を併せて考えることが大切です。また、$\tau - p$ 領域でみると triplication がほどけて 1 価関数となっていることも見て取れます。

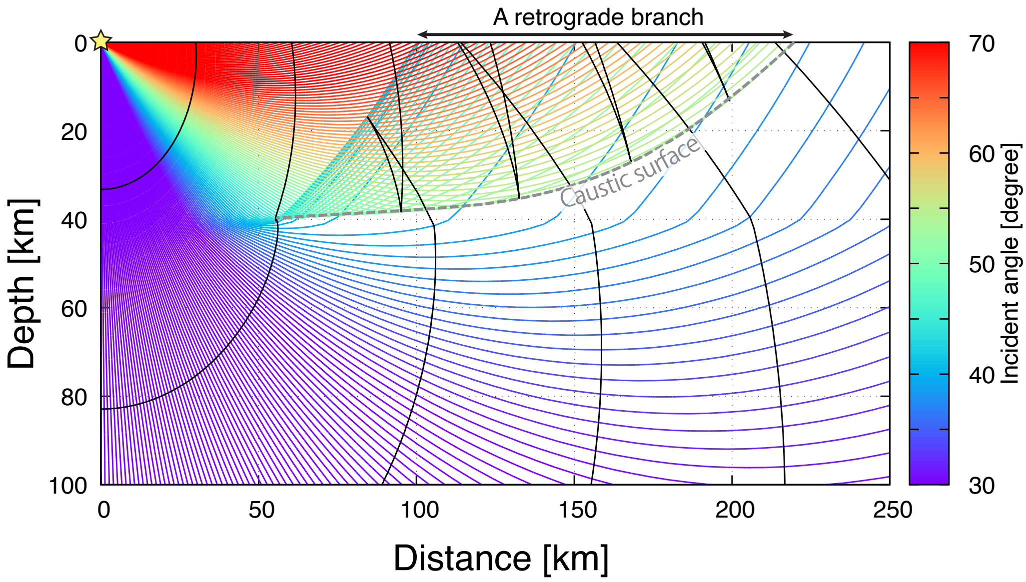


図 7.10　正の地震波速度ジャンプがある場合の波線。射出角を色で表し、波面 (等走時面) も併せて図示している。

他の例を考えてみましょう。地球の内部には 410km 不連続面と 660km 不連続面が、全球的に存在することが知られています。これら 2 つの不連続面は相変化 (それぞれオリビン ⟶ スピネル、スピネル ⟶ ペロブスカイトに対応) よることが知られています。図 7.11 を見てみましょう。ここではアリューシャンで起こった深さおよそ 100km の地震のアラスカでの地震波形記録を示しています。波形に揺らがありますが、距離 13° ~ 30° 帯で、複数の P 波の波束が到達している様子がわかります。これは 410km 不連続面と 660km 不連続面でを起こした結果です。下の図は理論走時を示しています。観測された波形の特徴をおおよそ示していることがわかります。

ここで、地球内部構造の情報がない場合を想像してみましょう。図 7.11 から、P 波の波束が複数到来する場合には、最初の走時以外は読むことが難しいことがわかります。図でいうと青色の立ち上がりに相当します。最初に到来する波束の立ち上がりは読み取りやすいために (到来以前は普段どおりの環境のため)、精度よく測定することができます。初動走時の情報しかない場合には、図 7.7 の走時曲線との区別が難しくなります。つまり走時から地球内部構造を推定する場合には、triplication の情報がないと不連続面の情報を正しく推定できず、なめらかな構造を推定してしまうことになります (初動走時は説明できてしまうため)。

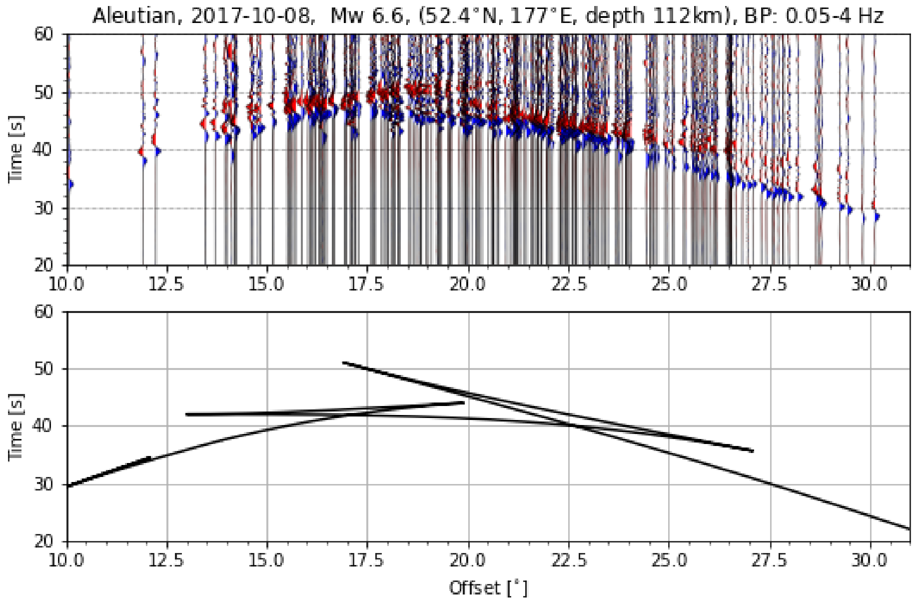


図 7.11　正の地震波速度ジャンプがある場合の具体例。アリューシャンで起こった地震を USArray (アラスカ) で観測した速度波形 (0.05–4 Hz)。ただし、そのままだと傾きがきつく triplication が見えづらいために、10 km/s で伝搬している分は差し引いている。具体的には $T - X/10$ (km/s) を X に対して図示している。正の振幅を赤に、負の振幅を青に塗っている。この距離帯では、P 波の波束が複数到来していることが分かる。また下の図では対応する理論走時を示している。2 つの地震波速度構造の正のジャンプ (410km 不連続面と 660km 不連続面) に対応するを見て取れる。

問題 8.2

xz 平面で,$z > 0$ での波動の伝播を考えます。地震波速度 α が

$$\alpha(z) = 5 + (1 + \tanh(z - 40)) * 2 + \frac{z}{200} \tag{7.52}$$

と書けるとき、ハミルトン方程式を σ に関して数値積分することで、波線を計算しなさい。また図 7.8 同様、Travel time–Distance, Distance–slowness, τ-slowness の関係をプロットし、2 層構造の場合と比較し考察しなさい。

7.6.3 負の地震波速度ジャンプがある場合

負の速度ジャンプがある場合には、地震波が届かない領域 (Shadow zone と呼ばれます) が発生します。図 7.1 を見て見ましょう。 P 波は震央距離 100 度を超えると一度見えなくなることが分かると思います。これは Shadow zone の一例です。

そこでは低速度層が場合の波線を見て見ましょう (図 7.12). 低速度層に波線が入射すると、スネルの法則によって急激に下向きに曲げられ、波線が通らない領域が出来ていることが見てとれます。また、shadow zone が生じた場合にも $\tau - p$ の領域で見ると空白域がなくなっている様子が見て取れます。また、波線の飛びに伴って、波面がちぎれている様子も分かります。スリットによる回折現象を思い浮かべてもらうと分かりやすいのですが、このような状況では波の回折が起こります。では P 波が届かない領域でも、回折は (P_{diff} が観測されることが知られています。

一般に低速度層は波線が通りづらいために、その速度構造を決定することには困難がともないます。例えば、火山直下のマグマだまりや、アセノスフェア上部など、周りより低速度な領域は地震波で調べることが難しく、現在も未解明な点が多いと言って良いでしょう。

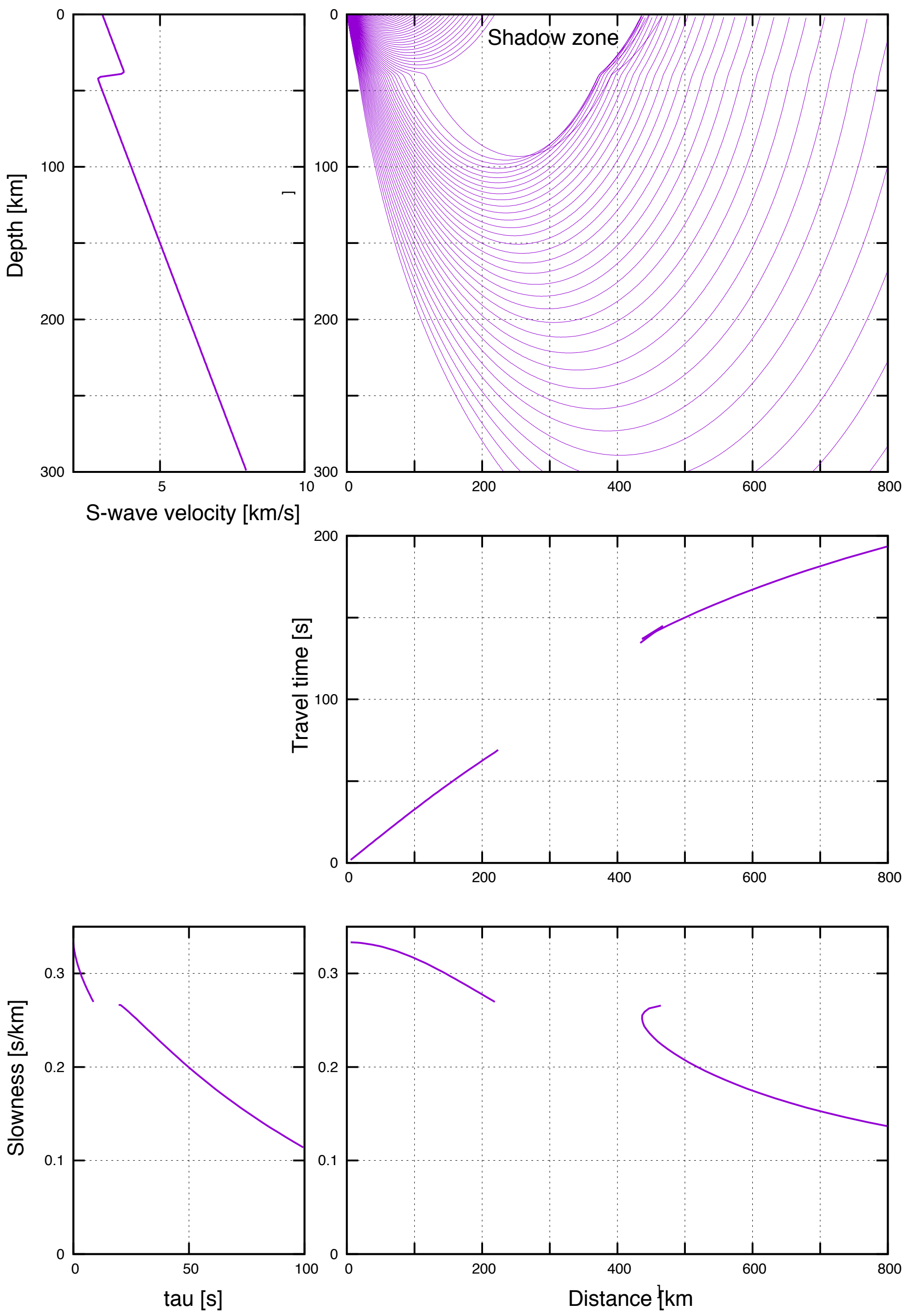


図 7.12　負の地震波速度ジャンプがある場合。

7.7 1次元インバージョン

走時は地球内部構造を探る上で中心的な役割を果たしてきました。これまで、地震波速度構造と走時曲線の大まかな対応を見てきました。実際には予め地球の内部構造はわかっておらず、走時から推測する必要があります。一般に地球物理学的に観測量から地球内部構造を推定することは、インバージョン (逆問題) とよばれる問題の一種です。インバージョンは結果 (今場合走時) から原因 (地球内部構造) を逆にたどる事を意味します。ここではまず、最も単純な1次元構造を推定する問題から考えていきましょう。

7.7.1 Herglotz-Wiechert inversion

$$T(p_x) = 2\int_0^{z(p_x)} \frac{\alpha^{-2}(z)}{\sqrt{\alpha^{-2}(z) - p_x^2}} dz \tag{7.53}$$

$$X(p_) = 2p_x \int_0^{z(p_x)} \frac{dz}{\sqrt{\alpha^{-2}(z) - p_x^2}} \tag{7.54}$$

Herglotz-Wiechert formulas

$$z(\alpha^{-1}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{X(\alpha^{-1})} \cosh^{-1}(\alpha p_x) dX \tag{7.55}$$

7.7.2 τ-p inversion

ここで地表で測定した地震波の走時から、地球内部構造を推定する問題を考えてみましょう。いま完全に走時 $T(X)$ が測定出来たとします。この場合場所 X での slowness p は

$$p = \frac{dT}{dX}, \tag{7.56}$$

とその方向きから求めることが出来ます。τ は接線を伸ばして、$X = 0$ で交差する時間 (y 切片) として測定することが出来ます。

ここで地球内部構造が n 層の均質な層が重ね合わさっているとします。n 層の層厚を ΔZ_n とし、地震波速度を α_n とします (図 7.13)。τ の式 (式 7.48) を離散化すると

$$\tau(p_x) = 2\sum_1^n \sqrt{\alpha_n^{-2} - p_x^2}\Delta Z_n. \tag{7.57}$$

ここで α_n が分かっていれば線形の式となる事が分かります。実は α_n はグラフから読み取ることが出来ます。各直線が、直接波 (赤)、第2層での先駆波、第3層での先駆波とす

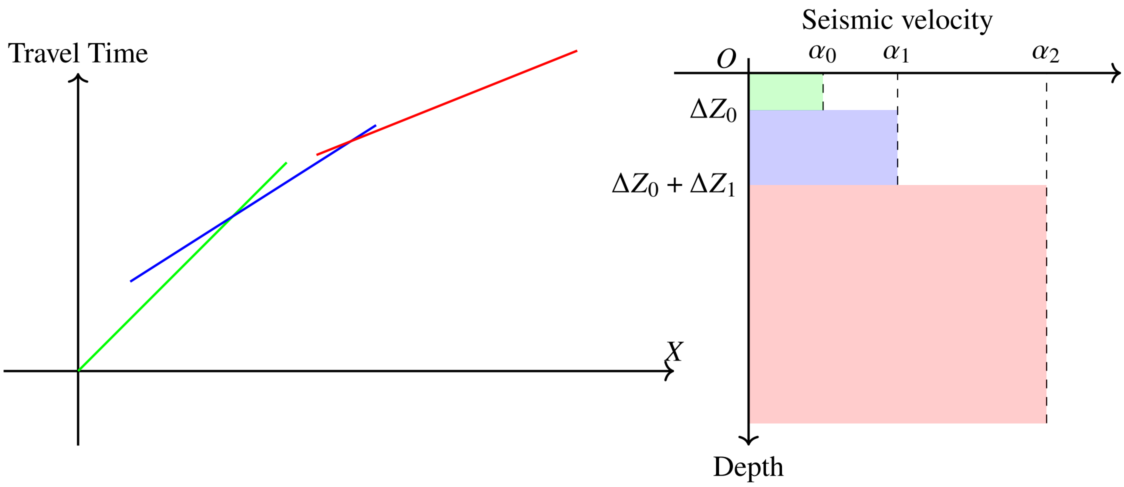


図 7.13　走時を折れ線で近似した場合の模式図。

ると、それぞれの slowness が α_n^{-1} と対応します。slowness から求めた値を代入して整理すると、

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_0^{-2} - \alpha_1^{-2}} & 0 & 0 & \cdots & \\ \sqrt{\alpha_0^{-2} - \alpha_2^{-2}} & \sqrt{\alpha_1^{-2} - \alpha_2^{-2}} & 0 & \cdots & \\ \cdots & \vdots & & & \\ \sqrt{\alpha_0^{-2} - \alpha_n^{-2}} & \sqrt{\alpha_1^{-2} - \alpha_n^{-2}} & \cdots & & \sqrt{\alpha_{n-1}^{-2} - \alpha_n^{-2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Z_0 \\ \Delta Z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta Z_n \end{pmatrix} \tag{7.58}$$

となる事が分かります。線形の式のため上層から順に解いていくとこが可能である事が分かります。

問題 8.3

ある地点 X [km] での走時 T [s] が 3 箇所で観測出来たとします。$X = 0$ の地点で $T = 0$ に地表で時指針が発生したときに、それぞれの観測値を $(X_0, T_0) = (15, 3.00)$, $(X_1, T_1) = (80, 13.40)$, $(X_2, T_2) = (120, 18.20)$ とし、走時をこれらの点で結ぶ直線と近似し、$\tau - p$ plot を計算する事で、地球内部構造を推定せよ。

7.8 走時トモグラフィ

走時の情報から、1 次元構造だけではなく 3 次元構造を推定する事が出来ます。地震波トモグラフィと呼ばれる手法です[注 16)]。ここでは単純かされた場合について考えてみましょう。単純のため 2 次元かつ均質な媒質を考えます (図 7.14)。図中、観測点を三角で表し、震源を星印で示しています。均質媒質を考えているため、直線となります。ここで i 番目の波線を考えます。i 番目の波線に対応する走時異常を ΔT_i とします。図で示したように領域をグリッドで区切り、グリッド位置を番号 j で指定できるとします。波線 i はグリッド j を l_{ij} の長さだけ横切るとします。グリッド毎にスローネス異常 Δp_j を考えると、速度異常 Δ_i は

$$\Delta T_i = \sum_j l_{ij} \Delta p_j \tag{7.59}$$

と書くことが出来ます。この方程式を最小自乗法的に解くことにより、速度異常 Δp_j を求めることが出来ます。

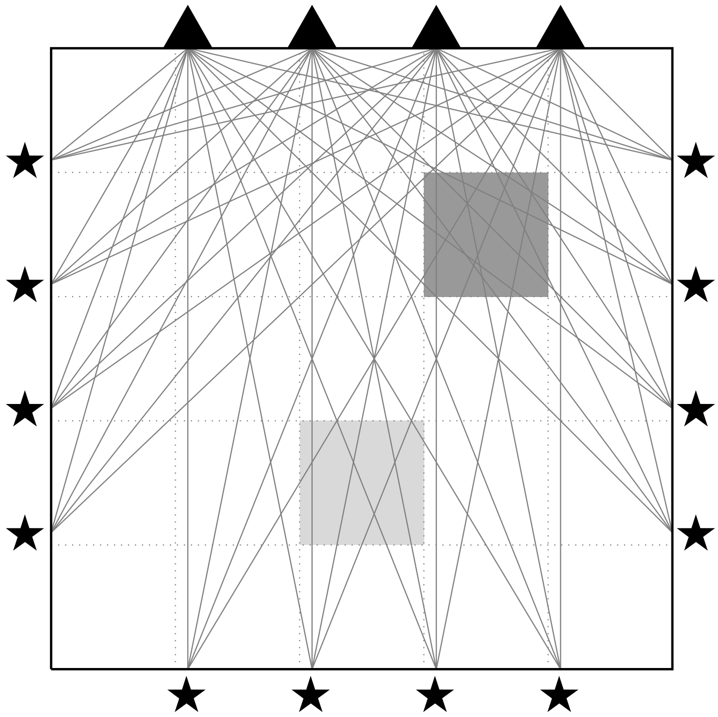


図 7.14　単純化した地震波トモグラフィの模式図。三角が観測点を表し、星印が震源を表します。波線は直線だと仮定している。

注 16) 詳細は Shearer の教科書 [10] や、Nolet の教科書 [8] を参照のこと

7.9 波線理論の適用範囲

の適応範囲を考えてみましょう。波線理論が適応出来るためには、が可能である事が条件となります。つまり、地震波速度構造が十分に滑らかである必要があります。ここで波数を k、速度異常の空間スケールを a とすると $ka \gg 1$ である必要があります。しかし実際の速度異常をかんがえると、色々な空間スケールの速度異常が存在する事が知られています。つまり、一定距離 L だけ地震波が伝播すると、波長と同程度の速度異常を通過し散乱することとなります。この距離は平均自由行程 L として知られます。伝播距離が L よりも十分に長くなると、多重散乱が発生します。磨りガラスを通して内部をのぞき込むようなもので、波線を考える事が現実的に難しくなります。これは、散乱のために波動の伝搬がランダマイズされるためです。図 7.15 に $ka--kL$ ダイアグラムとして知られている図を示します。問題設定ごとに、どういった近似が妥当か、その適応限界を把握することが大切です。

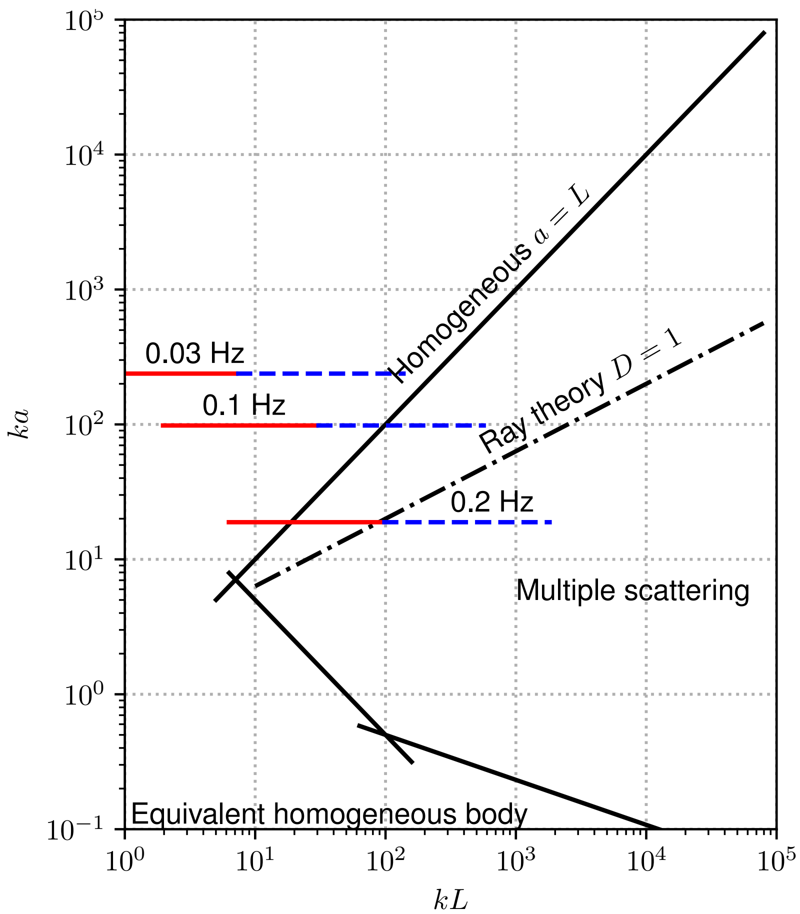


図 7.15　ka–kL ダイアグラム [1]。このダイアグラムでは、波動伝播の性質を分類するために、ka–kL 空間上で妥当な近似について記述している。ここで、平均自由行程を L、地震波速度以上の空間スケールを a、波数を k としています。

7.10 参考ツール等

水平成層構造の走時計算には TauP (http://www.seis.sc.edu/taup/) がよく使われます [3]。Python 上で計算したい場合には、ObsPy[7] から計算することも出来ます。を直接解くというアルゴリズムも、複雑な (水平成層でな構造) でよく使われています。Nick Rawlinson の web で種々のプログラムが公開されています (http://rses.anu.edu.au/~nick/)。Python 上で使える PyKonal[11] というパッケージもあります。

7.A IASPEI standard phase list

地震波の phase の名前リスト詳細は http://www.isc.ac.uk/standards/phases/ 参照。

7.A.1 CRUSTAL PHASES

Pg	At short distances, either an upgoing P wave from a source in the upper crust or a P wave bottoming in the upper crust. At larger distances also arrivals caused by multiple P-wave reverberations inside the whole crust with a group velocity around 5.8 km/s.
Pb	(alt:P*) Either an upgoing P wave from a source in the lower crust or a P wave bottoming in the lower crust
Pn	Any P wave bottoming in the uppermost mantle or an upgoing P wave from a source in the uppermost mantle
PnPn	Pn free-surface reflection
PgPg	Pg free-surface reflection
PmP	P reflection from the outer side of the Moho
PmPN	PmP multiple free surface reflection; N is a positive integer. For example, PmP2 is PmPPmP
PmS	P to S reflection/conversion from the outer side of the Moho
Sg	At short distances, either an upgoing S wave from a source in the upper crust or an S wave bottoming in the upper crust. At larger distances also arrivals caused by superposition of multiple S-wave reverberations and SV to P and/or P to SV conversions inside the whole crust.
Sb	(alt:S*) Either an upgoing S wave from a source in the lower crust or an S wave bottoming in the lower crust
Sn	Any S wave bottoming in the uppermost mantle or an upgoing S wave from a source in the uppermost mantle
SnSn	Sn free-surface reflection
SgSg	Sg free-surface reflection
SmS	S reflection from the outer side of the Moho
SmSN	SmS multiple free-surface reflection; N is a positive integer. For example, SmS2 is SmSSmS
SmP	S to P reflection/conversion from the outer side of the Moho
Lg	A wave group observed at larger regional distances and caused by superposition of multiple S-wave reverberations and SV to P and/or P to SV conversions inside the whole crust. The maximum energy travels with a group velocity of approximately 3.5 km/s
Rg	Short-period crustal Rayleigh wave

7.A.2 MANTLE PHASES

P	A longitudinal wave, bottoming below the uppermost mantle; also an upgoing longitudinal wave from a source below the uppermost mantle
PP	Free-surface reflection of P wave leaving a source downward
PS	P, leaving a source downward, reflected as an S at the free surface. At shorter distances, the first leg is represented by a crustal P wave.
PPP	analogous to PP
PPS	PP which is converted to S at the second reflection point on the free surface; travel time matches that of PSP
PSS	PS reflected at the free surface
PcP	P reflection from the core-mantle boundary (CMB)
PcS	P converted to S when reflected from the CMB
PcPN	PcP reflected from the free surface N-1 times; N is a positive integer. For example PcP2 is PcPPcP
Pz+P	(alt:PzP) P reflection from outer side of a discontinuity at depth z; z may be a positive numerical value in km. For example P660+P is a P reflection from the top of the 660 km discontinuity.
Pz-P	P reflection from inner side of a discontinuity at depth z. For example, P660 − P is a P reflection from below the 660 km discontinuity, which means it is precursory to PP.
Pz+S	(alt:PzS) P converted to S when reflected from outer side of discontinuity at depth z
Pz-S	P converted to S when reflected from inner side of discontinuity at depth z
PScS	P (leaving a source downward) to ScS reflection at the free surface
Pdif	(old:Pdiff) P diffracted along the CMB in the mantle
S	Shear wave, bottoming below the uppermost mantle; also an upgoing shear wave from a source below the uppermost mantle
SS	Free surface-reflection of an S wave leaving a source downward
SP	S, leaving a source downward, reflected as P at the free surface. At shorter distances the second leg is represented by a crustal P wave.
SSS	analogous to SS
SSP	SS converted to P when reflected from the free surface; travel time matches that of SPS.
SPP	SP reflected at the free surface
ScS	S reflection from the CMB
ScP	S converted to P when reflected from the CMB
ScSN	ScS multiple free-surface reflection; N is a positive integer. For example ScS2 is ScSScS
Sz+S	(alt:SzS) S reflection from outer side of a discontinuity at depth z; z may be a positive numerical value in km. For example S660+S is an S reflection from the top of the 660 km discontinuity.
Sz-S	S reflection from inner side of discontinuity at depth z. For example, S660 − S is an S reflection from below the 660 km discontinuity, which means it is precursory to SS.
Sz+P	(alt:SzP) S converted to P when reflected from outer side of discontinuity at depth z
Sz-P	S converted to P when reflected from inner side of discontinuity at depth z
ScSP	ScS to P reflection at the free surface
Sdif	(old:Sdiff) S diffracted along the CMB in the mantle

7.B 水平成層地球モデル

よく使われる 1 次元地球モデルについて、以下に簡単に情報をまとめます。

7.B.1 PREM

Preliminary Reference Earth Model () はの固有周波数と走時から推定した球対称モデルです [5]。S 波の異方性構造も含んでいます。モデルは http://ds.iris.edu/ds/products/emc-prem/ から参照可能です。

7.B.2 AK135

は走時から求めた、全球の平均的なモデル [6]。走時の計算に良く使われます。元データは以下から参照可能です。

- http://ds.iris.edu/ds/products/emc-ak135-f/
- http://rses.anu.edu.au/seismology/ak135/intro.html

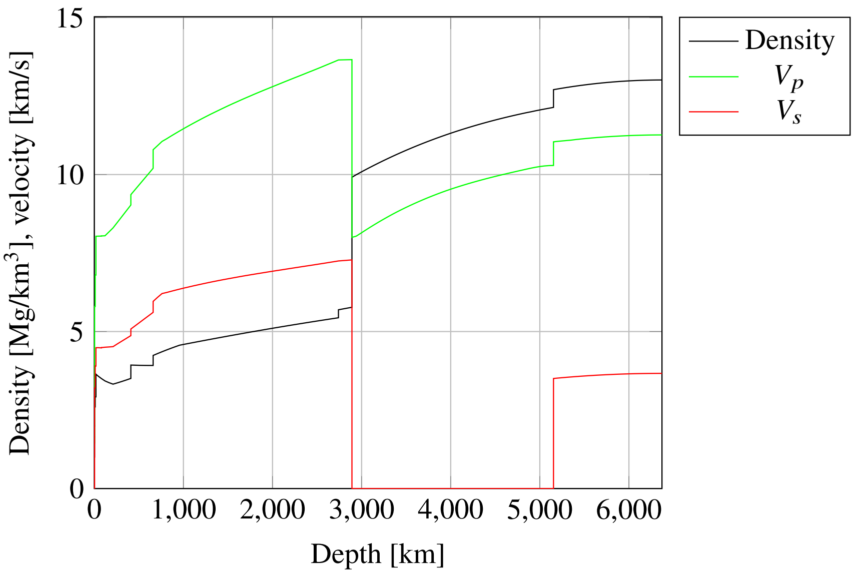


図 7.16　AK135 に基づく P 波・S 波・密度構造。

7.3 参考文献

[1] K. Aki and P.G. Richards. *Quantitative Seismology*. Univ Science Books, 2nd edition, 2009.

[2] Ray Buland and C H H Chapman. THE COMPUTATION OF SEISMIC TRAVEL TIMES. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, Vol. 73, No. 5, pp. 1271–1302, 1983.

[3] H Philip Crotwell, Thomas J Owens, and Jeroen Ritsema. The TauP toolkit: Flexible seismic travel-time and ray-path utilities. *Seismol. Res. Lett.*, Vol. 70, No. 2, pp. 154–160, 1999.

[4] F.A. Dahlen and J. Tromp. *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, Princeton, 1998.

[5] A. Dziewonski and D. Anderson. Preliminary reference earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.*, Vol. 25, pp. 297–356, 1981.

[6] B L N Kennett, E R Engdahl, and R Buland. Constraints on seismic velocities in the earth from traveltimes. *Geophys. J. Int.*, Vol. 122, No. 1, pp. 108–124, July 1995.

[7] Lion Krischer, Tobias Megies, Robert Barsch, Moritz Beyreuther, Thomas Lecocq, Corentin Caudron, and Joachim Wassermann. ObsPy: a bridge for seismology into the scientific python ecosystem. *Comput. Sci. Discov.*, Vol. 8, No. 1, p. 014003, May 2015.

[8] Guust Nolet. *A Breviary of Seismic Tomography: Imaging the Interior of the Earth and Sun*. Cambridge University Press, Cambridge,, September 2008.

[9] N Rawlinson and M S Sambridge. The fast marching method: an effective tool for tomographic imaging and tracking multiple phases in complex layered media. *Explor. Geophys.*, Vol. 36, No. 4, pp. 341–350, 2005.

[10] P.M. Shearer. *Introduction to Seismology*. Cambridge University Press, 2009.

[11] Malcolm C A White, Hongjian Fang, Nori Nakata, and Yehuda Ben-Zion. PyKonal: A python package for solving the eikonal equation in spherical and cartesian coordinates using the fast marching method. *Seismol. Res. Lett.*, June 2020.

[12] H.W. Zhou. *Practical Seismic Data Analysis*. Cambridge University Press, 2014.

[13] 蓬田清. 演習形式で学ぶ特殊関数・積分変換入門. 共立出版, 2007.

正規モード

第 8 章

ここまで、実体波と表面波を概観してきました。地震学で取り扱う周期帯は 3×10^{-4} ~ 100 Hz の範囲です。おおよそ 0.005 Hz (5 mHz) より高周波数側では進行波 (実体波、表面波) として取り扱うことが多く，低周波数側では () として取り扱う事が多くなります。地球自由振動帯域では、波長が 1000km を超え定在波の重ね合わせとして理解したほうが便利なためです。定在波の振動パターンはも呼ばれます。

8.1 定在波としての取り扱い: 地球自由振動

巨大な地震が起こると、周期数 100 秒の地震波が地球を何周も伝わります。このような場合、前節で述べた進行波としての取り扱いよりも、定在波の重ねあわせて表現したほうが理解しやすくなります。まずは観測された地震の記録から見ていきましょう。

巨大な地震が起きると、地球を地震波が何周もする事が知られています。例えば、最近おこった 2010 年チリ地震の際も、表面波という地表に沿って伝わる地震波がぐるぐると地球を何周も伝わる様子が、実際に地震計に記録されていました。周期にして 200 秒という、とてもゆっくりとした振動が伝わって行く様子が記録されたのです。地震波が地球も表面を何周も伝わるにつれ、その大きさも小さくなり、形も崩れ、一日もすると見えなくなります。図 8.1 は 2014/4/1 にチリで起きた地震を、世界中の広帯域地震観測網に記録された表面波です (横軸全体で約 6 時間)。世界中を表面波をが通過する様子をがはっきりと見て取れます。

2004 年 12 月 26 日にスマトラ島沖で巨大な地震が起きました。マグニチュードはにして 9 を越える、最近 50 年で最も巨大な地震です。この地震では、表面波が地球を 8 周する様子をが地震計がによってとらえています。一日もすると、れば地震波は消え去ったようにみえますが、実際には一ヶ月以上にわたって、地球は振動をつづけていたのです。こ

の地震はあまりにも巨大で、実はもっと長い期間地球は振動し続けていたのです。

図 8.2 は日本の長野県にある松代（まつしろ）という観測点に設置されている地震計の記録です。ぱっとみは図 8.1 と変わらないように見えますが、横軸の長さを比べてみてください。今度は二ヶ月分の記録を書いています。中心付近でにスマトラ地震が起きて記録されています。上から 2 番目の図は (0.1-1mHz でバンドパス・スフィルター) は、一ヶ月を越えてもなお地球が振動しつづけていることを示していますが分かります。この記録された地球全体が脈打つような振動は、地球自由振動と呼ばれています。

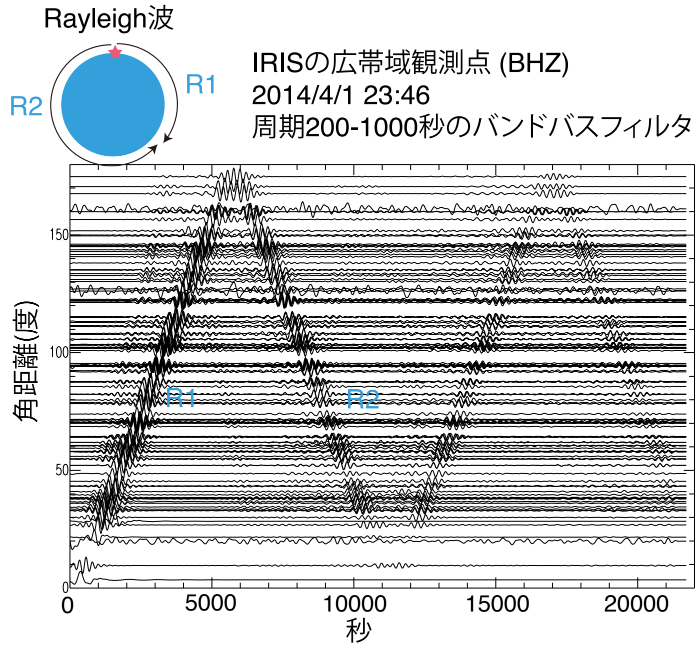


図 8.1　2014 年 4/1 のチリで起きた地震の際に記録された上下動記録。

どのように脈打っているか、実際にデータを見てみましょう。図 8.2 の下の図は、スマトラ沖地震がおこってから約一ヶ月後の、ドイツ、アメリカ合衆国、オーストラリア、日本の、スマトラ沖地震がおこってから約一ヶ月後の地震波記録を示しています (上下動)。普通、世界各地の観測点では、震源から近いところから、地震波が伝搬された順に記録されます。図 8.2 ではどうでしょう？全ての観測点でほぼ同時に上下している事を示しています。これらの記録は、地球全体が一様に 1112 秒の周期で脈打つように膨張収縮を繰り返していることを示しています。 振動の振幅は 0.03 mm 程度です。振幅は一見小さいように見えますが、巨大な地震でないと地球全体を脈打たすことはできません。しかしそしてひとたび揺れ始めると長い間揺れ続ける性質があります。スマトラ沖地震の際には三ヶ月の間揺れ続けていた事が確認されいています。地球全体が膨張収縮を繰り返す振動パターン (モードと呼ばれます) 以外にも、フットーボールのように全体がひしゃげるモードも知られています。

地震はいっせいにピアノの鍵盤を叩く事と例えることが出来ます。ピアノの鍵盤それぞれが振動のパターン (モードとよばれています) に対応しています。多くの鍵盤のたたき方の組み合わせによって、あらゆる振動のパターンを再現できる事が知られています。(ピアノの鍵盤は、鍵盤の数が少なすぎるので、 あらゆる音を再現する事はできないのですが、、、、)。楽器の奏でる音を聞いて楽器の形を想像するように、地球の自由振動を地震計で観測する事によって 地震学者は地球の内部に思いを馳せているのです。

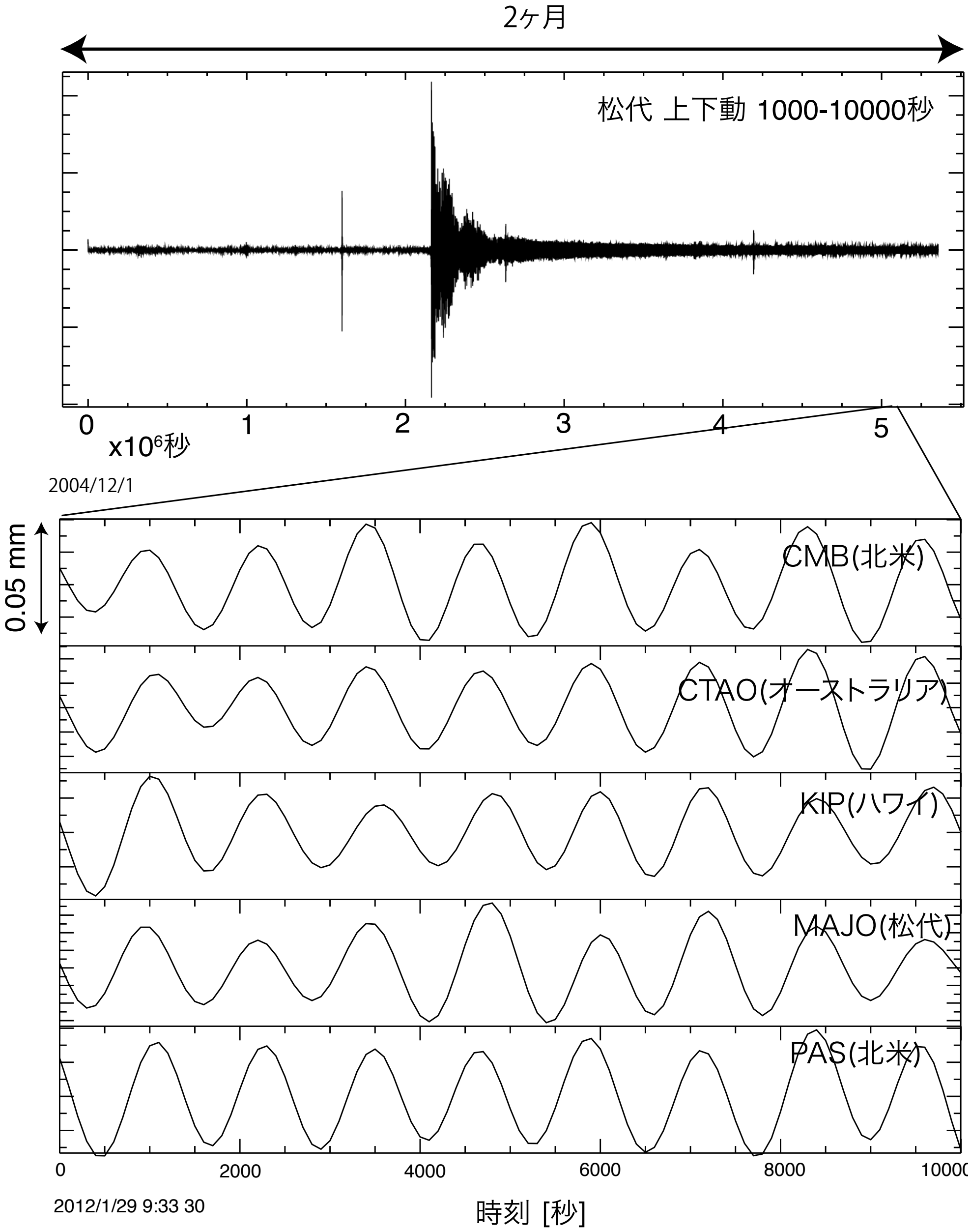


図 8.2　スマトラ地震の地動記録。1000-1000 秒の周期帯でフィルターをかけています。図上を見ると、スマトラ島沖地震が起こったあと、1 ヶ月以上地球が振動している様子が見て取れます。図下は地震から約 1 月たったあとの振動を拡大した図。世界各地で同時に上下している様子が分かります。これは地球全体が膨張収縮を繰り返していることを示しています。

8.2 1次元構造の場合の固有値問題: 弦の振動

長さ l の弦の振動を考えます。まず、波動方程式

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \kappa_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{8.1}$$

を満たす固有関数について考えてきます。境界条件として両端で固定端を考えます。固有周波数および対応する固有関数を、それぞれ次のようになります。

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} c_0, \qquad u_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{8.2}$$

正規化は $(\rho_0 u_i, u_j) = \delta_{ij}$ を満たすように係数 A_n を求めればよい。内積を計算すると、

$$(\rho u_i, u_j) = \int_0^l \rho_0 u_i^*(x) u_j(x) dx = \rho_0 A_i^* A_j \int_0^l \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l} dx = \rho_0 |A_i|^2 \frac{l}{2} \delta_{ij} \tag{8.3}$$

となるので、結局、

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 l}} \qquad \text{i.e.} \qquad \underline{u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 l}} \sin \frac{n\pi x}{l}} \tag{8.4}$$

が正規化された固有関数 (normalized eigenfunction) $u_n(x)$ です[注 1)]。

次に撃力に対する応答を考えます。

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \kappa_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \delta(x - x_0)\delta(t) \tag{8.5}$$

この問題では、両端を固定された棒に対し 1 [Ns] の力積を与えたときに、どのような運動をするかを表しています[注 2)]。両辺時間に対してフーリエ変換をとると

$$-\omega^2 \rho_0 \tilde{u}(x,\omega) = \kappa_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}(x,\omega)}{\partial x^2} + \delta(x - x_0), \tag{8.6}$$

で表されます。ここで ˜ はフーリエ成分を表す。これと、波動解 $u(x,\omega)$ の固有関数展開

$$\tilde{u}(x,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega) u_n(x) \tag{8.7}$$

を式 (2) に代入して、両辺と固有関数 $u_n(x)$ の内積をとると、

$$\rho_0 \omega^2 a_n(\omega) - \rho_0 \omega_n^2 a_n(\omega) = -\rho_0 u_n(x_0) \qquad \text{i.e.} \qquad a_n(\omega) = -\frac{u_n(x_0)}{\omega^2 - \omega_n^2} \tag{8.8}$$

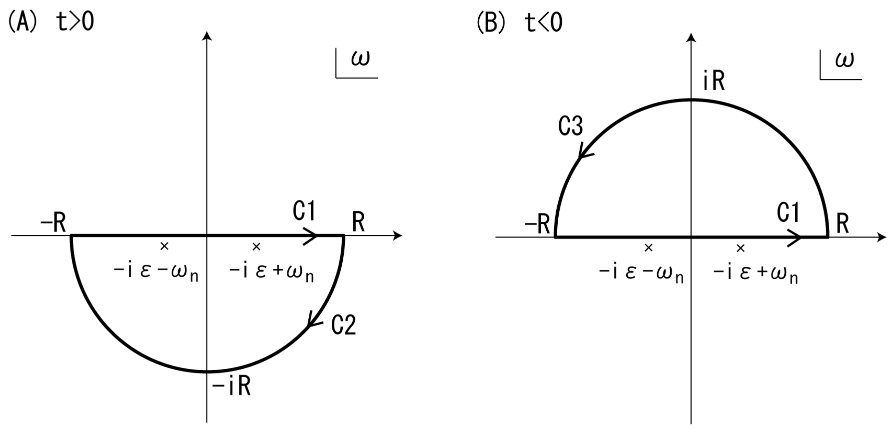


図 8.3　積分経路

を得ます。

最後に逆フーリエ変換で時間領域に戻す[注 3)]。

$$a_n(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a_n(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega = -\frac{u_n(x_0)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-\omega_n^2}\,d\omega \tag{8.9}$$

ここで、積分値を求めるため、ω を複素数空間の変数だとみなして、図 8.3 のような経路で積分を実行し、$R \to \infty$ の極限をとります。ただし、積分経路上に極があると積分を実行できないため、極を実軸から $-i\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ だけずらした関数

$$g(\omega,t,\epsilon) = \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega_n}\left(\frac{1}{\omega-\omega_n+i\epsilon} - \frac{1}{\omega+\omega_n+i\epsilon}\right) \qquad \left(\lim_{\epsilon\to 0} g(\omega,t,\epsilon) = \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-\omega_n^2}\right) \tag{8.10}$$

の積分を実行してから $\epsilon \to 0$ の極限をとります。ここで、2 つの極を正にずらすか負にずらすかで 4 通り考えることができますが、いずれの場合も解は微分方程式を満たします。しかしながら、外力を受ける $t = 0$ 以前には変位がないという物理的な条件を満たすためには、2 つの極は負の方向にずらさなくてはいけません。

注 1) 固有関数の規格化から u_n^{-2} は重さの次元をもつことが分かります。この値は Modal mass と呼ばれます。

注 2) 一見次元が分かりづらいが、$f(x) = -f_0\delta(x-x_0)\delta(t)$ は [N/m] の次元を持つため、f_0 は [Ns] の次元をもちます。任意の力 $f(x,t)$ に対する振動は、以下で求める撃力応答 (Green 関数と呼ばれる) との畳み込み積分で表現出来ます。無限空間の場合、Green 関数は 3 参照。

注 3) 複素積分に関して詳しくは、Mathematical Methods for Physicists, Fifth Edition, Arfken, Weber, and Frank Harris[1] や演習形式で学ぶ特殊関数・積分変換入門、蓬田清 [8] などを参照のこと。

$t > 0$ の場合は極が積分経路内にあるので、

$$\int_{C1} g(\omega,t,\epsilon)\,d\omega + \int_{C2} g(\omega,t,\epsilon)\,d\omega$$
$$= -2\pi i\{\mathrm{Res}_{\omega=-i\epsilon+\omega_n} g(\omega,t,\epsilon) + \mathrm{Res}_{\omega=-i\epsilon-\omega_n} g(\omega,t,\epsilon)\} = -\frac{2\pi\sin\omega_n t\; e^{-\epsilon t}}{\omega_n}. \tag{8.11}$$

この式が $t \to \infty$ で発散しないためにも、極は負にずらす必要があると言えます。正にずらした場合、$e^{\epsilon t}$ の項がかかってしまい、$t \to \infty$ で発散します。上式で $R \to \infty$ および $\epsilon \to 0$ の極限をとると、経路 $C2$ の積分が 0 になるので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-\omega_n^2}\,d\omega = -\frac{2\pi\sin\omega_n t}{\omega_n} \quad (t > 0). \tag{8.12}$$

一方、$t < 0$ の場合、積分経路内に極がないので、

$$\int_{C1} g(\omega,t,\epsilon)\,d\omega + \int_{C3} g(\omega,t,\epsilon)\,d\omega = 0. \tag{8.13}$$

上式において、$R \to \infty$ の極限をとると、経路 $C3$ の積分が 0 になるので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-\omega_n^2}\,d\omega = 0 \quad (t < 0). \tag{8.14}$$

以上より、求める $u(x,t)$ は $t > 0$ の場合、弦の振動の励起の式

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum_n \frac{u_n^*(x_0)u_n(x)}{\omega_n}\sin\omega_n t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{8.15}$$

この式に規格化された固有関数を代入すると、求める $u(x,t)$ は $t > 0$ の場合、

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\sin\omega_n t}{\rho_0 l\omega_n}\sin k_n x_0 \sin k_n x\right] \tag{8.16}$$

となります[注 4)]。ここで $k_n = n\pi/l$ と定義します。

見通しを良くするために、上記の式を積和の公式を用いて上式を書き直します[注 5)]。

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\rho l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}[\sin(\omega_n t - k_n(x+x_0)) - \sin(\omega_n t + k_n(x+x_0))$$
$$- \sin(\omega_n t - k_n(x-x_0)) + \sin(\omega_n t - k_n(x-x_0))] \tag{8.17}$$

ここで $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}$ をじっとにらんでみると微分してみると δ 関数の形であることが分かります。つまり Heviside の階段関数 $H(t)$ [注 6)] と関係していることが分かります。やや天

注 4) 次元を考え式を眺めてみると、見通しが良くなります。1 [Ns] の力積を与えた場合の運動量変化分を求め、Modal mass で割って速度を計算します。そして、周波数で割って変位に直していると解釈できます

注 5) 詳しくは、キーナー応用数学下巻

注 6) Heviside の階段関数 $H(t)$ 以下のように定義される。

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0.5 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

下り的ですが、$0 \le x < l$ の区間で $H(x) - x/l$ という式を考えフーリエ級数展開すると

$$H(x) - x/l = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin k_n x, \tag{8.18}$$

となります。この関係式を使って式を整理すると、

$$u(x,t) = \frac{1}{4\rho_0 c_0} \sum_{n=1}^{\infty} H_p(c_0 t + (x - x_0)) + H_p(c_0 t - (x - x_0)) - H_p(c_0 t - (x + x_0)) - H_p(c_0 t + (x + x_0)), \tag{8.19}$$

と書き下せます。ここで $H_p(x) = H(x) - H(-x), -l < x < l$ と定義し, 空間で $2l$ の周期性があるとします。$t = 0$ 直後の伝播の模式図を図 8.4 に示す。$t = 0$ では、最初の 2 項が完全に打ち消しあっています[注 7)]。そこから伝播をはじめ、直後の $t = t_0$ では中心から変位が広がっていきます。これは力積を与えられて弦が上方に移動しようとしているとも解釈できます。左向きに伝搬している波 $H_p(c_0 t + (x - x_0))$ が左端 $x = 0$ に達すると、境界条件を満たすため位相が反転し反射 (固定端反射) します。反射はは $H_p(c_0 t - (x - x_0))$ で表現されます。$x = 0$ 付近では、$H_p(c_0 t - (x - x_0))$ と振幅を打ち消しあうので変位は 0 になります。

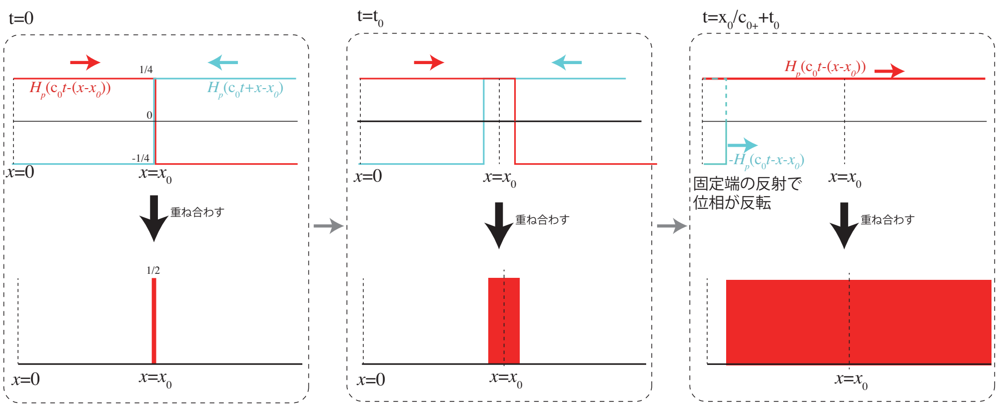


図 8.4　模式図。

実際に $n = 1, 2, \cdots, 40$ までを足してみた結果を図 8.5 左と図 8.6 に示します。パラメータは $\rho_0 = 1$[kg/m], $\kappa_0 = 1$ [N], $l = 1$ [m], $x_0 = 0.3$ [m] としました。このとき、情報は $c = 1$ [m/s] で伝播します。力を加えた場所から左右に常に正の振幅が伝播します。固定端で反射されると図 8.4 の一方の符号が反転するため、結果として、反射した波がもう一方の波の振幅と打ち消しあって 0 になる様子が見えます。

また、$\sin(\omega_n t)/\omega_n$ を $\exp(-\omega_n^2 \tau_0^2) \cos(\omega_n t)$ で置き換え $\tau_0 = 0.01$ [s] とした場合の結果が図 8.5 の右図と 8.6 である[注 8)]。パルスが波源から 2 方向に伝播し、両端で位相が逆に

注 7) 伝播方向が逆向きの $H_p(c_0 t + (x - x_0))$ と $H_p(c_0 t - (x - x_0)$ を考えている事に注意。ダランベールの解の形になっていて、直感的に理解しやすい。

注 8) この置き換えは $\sin(\omega_n t)/\omega_n$ を時間微分して速度波形にし、周期 τ_0 でローパスフィルターをかけているとも解釈できます。

なる様子が確認できます。また、伝播速度は 1 [m/s] であり、与えたパラメータから求まる速度 $c_0 = \sqrt{\kappa_0/\rho_0} = 1$ [m/s] と一致しています。

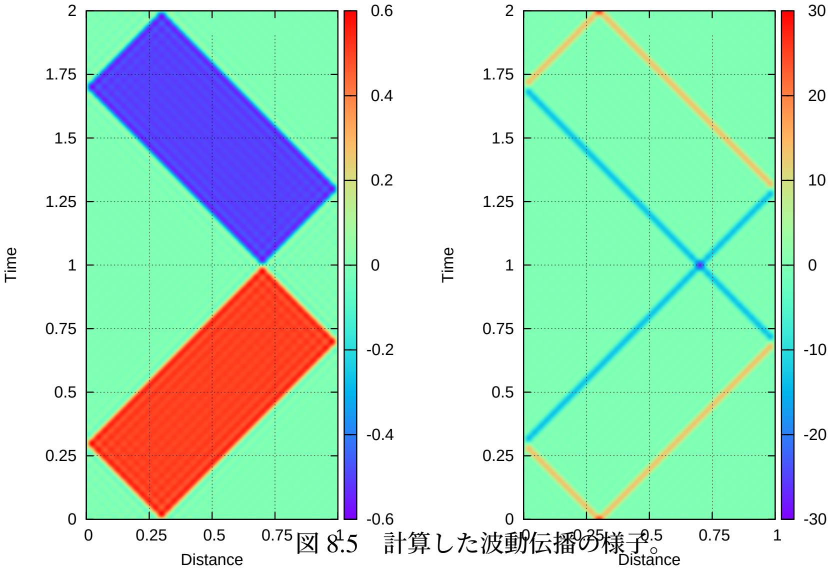


図 8.5　計算した波動伝播の様子。

以下補足です。次に弦の運動量変化を考えてみましょう。1 Ns の力積を与えたということは、棒が固定端を感じるまでは棒の持つ運動量は 1Ns となるはずです。そこで棒の持つ運動量を計算してみます。まず簡単のため $0 < x < l/2$ と仮定し $0 < t < x_0/c_0$ の時刻区間を考えます。運動量は

$$\rho \frac{du(x,t)}{dt} = \frac{\delta(c_0 t + (x - x_0)) + \delta(c_0 t - (x - x_0))}{2}, \tag{8.20}$$

と書けます。脚注でも述べたとおり図 8.5 右と図 8.6 のグラフは速度波形と対応するため、この速度波形の解析解とも対応しています。積分し棒全体での値を計算すると 1 [Ns] となる。$x_0/c_0 < t < (l - x_0)/c_0$ の時刻区間では

$$\rho \frac{du(x,t)}{dt} = \frac{-\delta(c_0 t + (l - x_0)) + \delta(c_0 t - (x - x_0))}{2}, \tag{8.21}$$

となり、全空間で積分すると運動量は 0 [Ns] となります。つまり左端に波が到達すると、固定端のため端で下方に 1[Ns] の力積 (運動量変化分) をうけます。

8.2.1　ポイント

1. 規格化を忘れずに。$\kappa(x), \rho(x)$ が分布を持つ場合は、密度を含めた形で内積を定義しないと固有関数が直交しない。
2. 複素積分のさいに、t の符号により積分路を変える必要があることに注意。上記の議論で極が $z = 0$ より下にのみ存在する時は因果律を満たすことが分かる。主値積

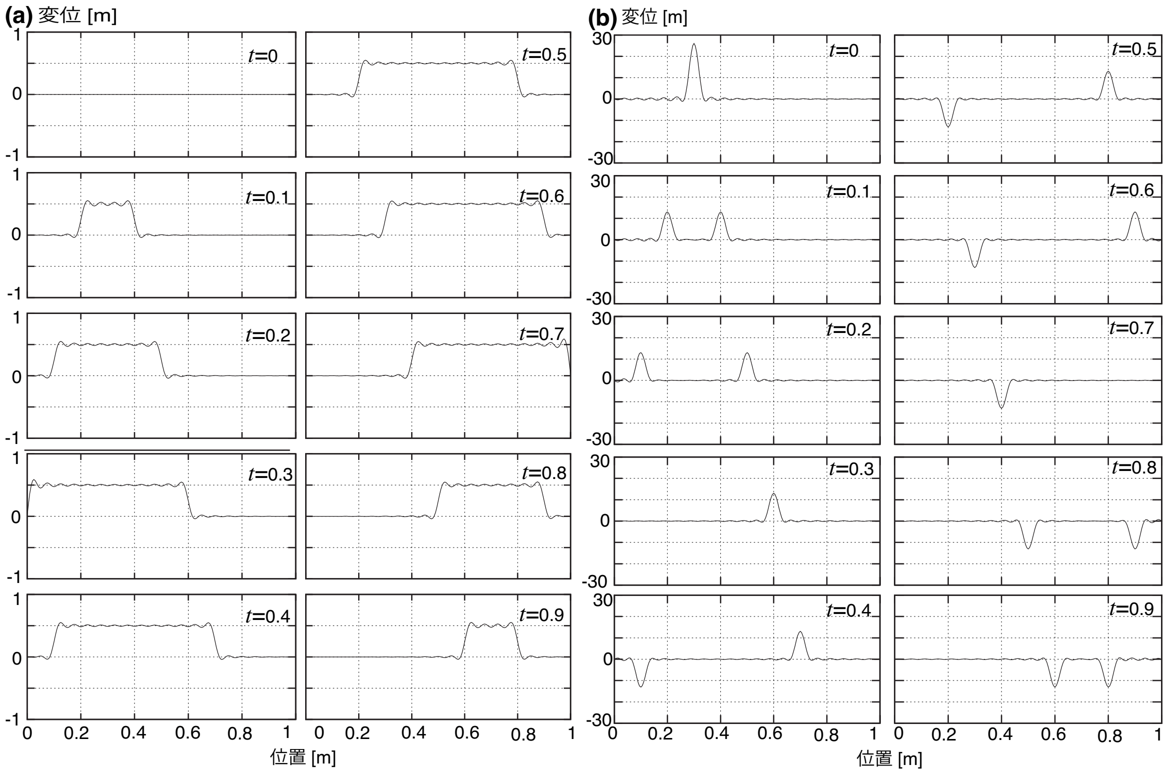


図 8.6　(a) 撃力応答に対する、計算された波形のスナップショット。(b) 励起項を置き換えた場合の、波形のスナップショット。

分を考える場合は、極限をとっても特異点周りの積分の寄与が消えないことに注意[注 9)]。

8.3 固有値問題: SH の場合

まず、SH 問題の平面波の場合について、運動方程式 (式 5.21) と Hook 則 (式 5.24) を整理してみましょう。ここで境界条件を考えるために s_x, s_z, T_{xz}, T_{zz} を変数と取ります。支配方程式は z のみの偏微分となるために、z に関する 1 階の常微分方程式は

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} s_y \\ T_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ \omega^2 p^2 \mu - \rho\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_y \\ T_{xz} \end{pmatrix} \tag{8.22}$$

と書くことが出来ます。また T_{yx} は

$$T_{yx} = \mathrm{i}\omega p \mu s_y, \tag{8.23}$$

注 9) 複素積分をせずとも、$t = 0$ での解の接続を考えれば泥臭く解くことも出来る。

と s_y から計算する事が出来ます。常微分方程式を片方の境界から積分していって、もう片一方で境界条件を満たすような p を探す問題と言い換えることができます。これは固有値問題に他なりません。

8.4 1 層構造の場合の固有値問題

簡単のため、鉛直 z 方向に構造が均質である場合を考え、もう少し具体的に考えていきましょう。見通しをよくするために、支配方程式を

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \tag{8.24}$$

と書き直します。ここで、

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ \omega^2 p^2 \mu - \rho\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.25}$$

$$\boldsymbol{y} \equiv \begin{pmatrix} s_y \\ T_{xz} \end{pmatrix}, \tag{8.26}$$

です。

ここで行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値問題を考えます。i 番目の固有値 を η_i、固有ベクトルを $\boldsymbol{\phi}^i$ とします。$|A - \eta_i \boldsymbol{I}| = 0$ という条件から、

$$\eta_1 = \omega\sqrt{p^2 - \frac{1}{\beta^2}} \tag{8.27}$$

$$\eta_2 = -\omega\sqrt{p^2 - \frac{1}{\beta^2}} \tag{8.28}$$

となることが分かります。対応する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{pmatrix} 1/\mu \\ \eta_1 \end{pmatrix} \tag{8.29}$$

$$\boldsymbol{\phi}_2 = \begin{pmatrix} 1/\mu \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{8.30}$$

となります。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi}_i = \eta_i \boldsymbol{\phi}_i \tag{8.31}$$

という式を満たします。この場合には

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2)\begin{pmatrix} \eta_1 & \\ & \eta_2 \end{pmatrix}(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2)^{-1} \equiv \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Phi}^{-1}, \tag{8.32}$$

と分解出来ます。ここで $\boldsymbol{H}$ は η_i を成分としてもつ対角行列です。$\tilde{\boldsymbol{y}} \equiv \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{y}$ と定義すると、

$$\frac{d}{dz}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{y}}, \tag{8.33}$$

となり、各成分毎に微分方程式を解くことが出来ます。この解をまとめると、一般解

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{2} A_i e^{\eta_i z} \boldsymbol{\phi}_i \tag{8.34}$$

として書くことが出来ます。

8.5 固有値問題: P-SV の場合

ここでは、P-SV 問題の平面波の場合について、運動方程式 (式 5.21) と Hook 則 (式 5.24) を整理してみましょう。ここで境界条件を考えるために s_x, s_z, T_{xz}, T_{zz} を変数と取ります。支配方程式は z のみの偏微分となるために、z に関する 1 階の常微分方程式

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} s_x \\ s_z \\ T_{xz} \\ T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\omega p & \frac{1}{\mu} & 0 \\ -i\omega p \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} \\ -\rho\omega^2 + \omega^2 p^2 \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & -i\omega p \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \\ 0 & -\rho\omega^2 & -i\omega p & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_x \\ s_z \\ T_{xz} \\ T_{zz} \end{pmatrix} \tag{8.35}$$

と書くことができます。ここで、T_{xx} は s_x と T_{zx} から

$$T_{xx} = i\omega p(\lambda + 2\mu)s_x + \lambda \frac{ds_z}{dz} \tag{8.36}$$

と求めることができます。つまり常微分方程式を片方の境界から積分していって、もう片一方で境界条件を満たすような p を探す問題と言い換えることができます。これは固有値問題に他なりません。5.6.2 節の問題設定は、下から積分を始めて地表面で境界条件を合わせることに対応し、5.6.3 節は地表面から初め無限遠での解を境界条件として合わせていることに他なりません。

8.5.1 均質構造の場合の固有値問題

簡単のため、鉛直 z 方向に構造が均質である場合を考え、もう少し具体的に考えていきましょう。見通しをよくするために、支配方程式を

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \tag{8.37}$$

と書き直します。ここで、

$$
\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\omega p & \frac{1}{\mu} & 0 \\ -\mathrm{i}\omega p \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} \\ -\rho\omega^2 + \omega^2 p^2 \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & -\mathrm{i}\omega p \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \\ 0 & -\rho\omega^2 & -\mathrm{i}\omega p & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.38}
$$

$$
\boldsymbol{y} \equiv \begin{pmatrix} s_x \\ s_z \\ T_{xz} \\ T_{zz} \end{pmatrix}, \tag{8.39}
$$

です。

ここで行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値問題を考えます。i 番目の固有値 を η_i、固有ベクトルを $\boldsymbol{\phi}^i$ とすると、

$$
\boldsymbol{A}\phi^i = \eta_i \phi^i \tag{8.40}
$$

という式を満たします。この場合には

$$
\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}^2, \boldsymbol{\phi}^3, \boldsymbol{\phi}^4\right) \begin{pmatrix} \eta_1 & & & \\ & \eta_2 & & \\ & & \eta_3 & \\ & & & \eta 4 \end{pmatrix} \left(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}^2, \boldsymbol{\phi}^3, \boldsymbol{\phi}^4\right)^{-1} \equiv \boldsymbol{\Phi H \Phi}^{-1}, \tag{8.41}
$$

と分解出来ます。ここで $\boldsymbol{H}$ は η_i を成分としてもつ対角行列です。$\tilde{\boldsymbol{y}} \equiv \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{y}$ と定義すると、

$$
\frac{d}{dz}\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{y}}, \tag{8.42}
$$

となり、各成分毎に微分方程式を解くことが出来ます。この解をまとめると、一般解

$$
\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{4} A^i e^{\eta_i z} \boldsymbol{\phi}^i \tag{8.43}
$$

として書くことが出来ます。

8.5.2 固有値

ここでは具体的に固有値を求めてみましょう。行列 $\boldsymbol{A} - \eta \boldsymbol{I}$ の行列式を計算すると[注 10)]

$$
|A| = \left(\eta^2 - \omega^2 \left(p^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\right) \left(\eta^2 - \omega^2 \left(p^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)\right) = 0, \tag{8.45}
$$

注 10) 愚直に余因子展開すると

$$
\begin{vmatrix} -\eta & a & b & 0 \\ c & -\eta & 0 & d \\ e & 0 & -\eta & c \\ 0 & f & a & -\eta \end{vmatrix} = \eta^4 - \eta^2(df + 2ac + be) + (ed - c^2)(bf - a^2) \tag{8.44}
$$

と計算出来ます。

という式にまとめることが出来ます。固有値は、鉛直方向の波動の伝播と対応する事が分かります。また η_i は η_i^2 が正の場合には不均質波と対応し、負の場合には実体波を対応します。

8.5.3 固有ベクトル

対応する固有ベクトルを書き下してみましょう。ここでは簡単のため水平方向の変位が有限な値を取ると仮定し、

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}\phi_{i,1}\\ \phi_{i,2}\\ \phi_{i,3}\\ \phi_{i,4}\end{pmatrix} = \eta_i\begin{pmatrix}\phi_{i,1}\\ \phi_{i,2}\\ \phi_{i,3}\\ \phi_{i,4}\end{pmatrix}, \tag{8.46}$$

$\phi_{i,1} = 1$ と規格化します。$\boldsymbol{A}$ の行ごとに式を評価し、変数を $\phi_{i,3}$ と $\phi_{i,4}$ に減らして、固有ベクトルを計算していきます。

1 行

1 行目から、

$$\phi_{i,2} = -\frac{\mathrm{i}\phi_{i,3}}{\omega p\mu} + \frac{\mathrm{i}\eta_i}{\omega p} \tag{8.47}$$

2 行

2 行目の成分を整理すると、

$$\eta_i\phi_{i,2} - \frac{1}{\lambda+2\mu}\phi_{i,4} = -\mathrm{i}\omega p\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \tag{8.48}$$

となります。式 8.47 を代入すると

$$\frac{\eta_i}{\mu}\phi_{i,3} - \frac{\mathrm{i}\omega p}{\lambda+2\mu}\phi_{i,4} = \frac{\omega^2p^2\lambda}{\lambda+2\mu} + \eta_i^2 \tag{8.49}$$

となります。

4 行

$$-\rho\omega^2\phi_{i,2} - \mathrm{i}\omega p\phi_{i,3} - \eta_i\phi_{i,4} = 0 \tag{8.50}$$

式 8.47 を代入すると、

$$-\rho\omega^2\left(-\frac{\mathrm{i}\phi_{i,3}}{\omega p\mu} + \frac{\mathrm{i}\eta_i}{\omega p}\right) - \mathrm{i}\omega p\phi_{i,3} - \eta_i\phi_{i,4} = \tag{8.51}$$

$$\frac{\rho\omega i}{p\mu}\phi_{i,3} - \mathrm{i}\omega p\phi_{i,3} - \eta_i\phi_{i,4} - \frac{\mathrm{i}\rho\omega\eta_i}{p} = 0 \tag{8.52}$$

$$\left(\frac{\mathrm{i}\rho\omega}{\mu p} - \mathrm{i}\omega p\right)\phi_{i,3} - \eta_i\phi_{i,4} = \frac{\mathrm{i}\rho\omega\eta_i}{p} \tag{8.53}$$

となります。

2 成分の固有値問題

$\phi_{i,3}$ と $\phi_{i,4}$ に関して式をまとめると、

$$\begin{pmatrix} \eta_i & -\frac{\mathrm{i}\omega p\mu}{\lambda+2\mu} \\ \frac{\mathrm{i}\omega}{p}\left(p^2 - \frac{\rho}{\mu}\right) & \eta_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{i,3} \\ \phi_{i,4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2 p^2 \lambda\mu}{\lambda+2\mu} + \eta_i^2\mu \\ \frac{-\mathrm{i}\rho\omega\eta_i}{p}\end{pmatrix} \tag{8.54}$$

となります。

この式を解くことで、$\phi_{i,3}$ と $\phi_{i,4}$ は陽に

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\phi_{i,3} \\ \phi_{i,4}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \eta_i & -\frac{\mathrm{i}\omega p\mu}{\lambda+2\mu} \\ \frac{\mathrm{i}\omega}{p}\left(p^2 - \frac{\rho}{\mu}\right) & \eta_i \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\omega^2 p^2 \lambda\mu}{\lambda+2\mu} + \eta_i^2\mu \\ -\frac{\mathrm{i}\rho\omega\eta_i}{p}\end{pmatrix} && (8.55)\\
&= \frac{1}{\Delta_i}\begin{pmatrix} \eta_i & \frac{\mathrm{i}\omega p\mu}{\lambda+2\mu} \\ -\frac{\mathrm{i}\omega}{p}\left(p^2 - \frac{\rho}{\mu}\right) & \eta_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\omega^2 p^2 \lambda\mu}{\lambda+2\mu} + \eta_i^2\mu \\ -\frac{\mathrm{i}\rho\omega\eta_i}{p}\end{pmatrix}, && (8.56)\\
&= \frac{1}{\Delta_i}\begin{pmatrix} \eta_i & \frac{\mathrm{i}\omega p\beta^2}{\alpha^2} \\ -\frac{\mathrm{i}\omega}{p}\left(p^2 - \frac{1}{\beta^2}\right) & \eta_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho\beta^2\left(\frac{\omega^2 p^2(\alpha^2-2\beta^2)}{\alpha^2} + \eta_i^2\right) \\ -\frac{\mathrm{i}\rho\omega\eta_i}{p}\end{pmatrix} && (8.57)\\
&= \frac{1}{\Delta_i}\begin{pmatrix} \eta_i\rho\beta^2\left(\frac{\omega^2 p^2(\alpha^2-2\beta^2)}{\alpha^2} + \eta_i^2\right) + \frac{\omega p\beta^2}{\alpha^2}\frac{\rho\omega\eta_i}{p} \\ -\frac{\mathrm{i}\omega}{p}\left(p^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)\rho\beta^2\left(\frac{\omega^2 p^2(\alpha^2-2\beta^2)}{\alpha^2} + \eta_i^2\right) - \frac{\mathrm{i}\rho\omega\eta_i^2}{p}\end{pmatrix} && (8.58)\\
&= \frac{1}{\Delta_i}\begin{pmatrix} \eta_i\rho\beta^2\left(\left(\omega^2 p^2(1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}) + \eta_i^2\right) + \frac{\omega^2}{\alpha^2}\right) \\ -\frac{\mathrm{i}\omega\rho}{p}\left(\beta^2\left(p^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)\left(\omega^2 p^2(1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}) + \eta_i^2\right) + \eta_i^2\right)\end{pmatrix} && (8.59)
\end{aligned}$$

となることが分かります。ここで Δ_i $\boldsymbol{A}$ の行列式で、

$$\begin{aligned}
\Delta_i &= \eta_i^2 - \frac{\omega^2\mu}{\lambda+2\mu}\left(p^2 - \frac{\rho}{\mu}\right) && (8.60)\\
&= \begin{cases} \omega^2 p^2\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right), & i = 1, 2 \\ \omega^2\left(p^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right), & i = 3, 4 \end{cases} && (8.61)
\end{aligned}$$

となります。

ここで、各固有値

$$\left(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\right) = \omega\left(\sqrt{p^2 - \alpha^{-2}}, -\sqrt{p^2 - \alpha^{-2}}, \sqrt{p^2 - \beta^{-2}}, -\sqrt{p^2 - \beta^{-2}}\right) \tag{8.62}$$

ごとに固有ベクトルを整理していきましょう。

P 波の伝播と対応する $i = 1, 2$ の場合

$$\begin{pmatrix}\phi_{i,3}\\ \phi_{i,4}\end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_i}\begin{pmatrix}\eta_i\rho\beta^2\left(\left(\omega^2p^2(1-2\frac{\beta^2}{\alpha^2})+\eta_i^2\right)+\frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)\\ -\frac{\mathrm{i}\omega\rho}{p}\left(\beta^2\left(p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\left(\omega^2p^2(1-2\frac{\beta^2}{\alpha^2})+\eta_i^2\right)+\eta_i^2\right)\end{pmatrix} \tag{8.63}$$

$$= \frac{1}{\Delta_i}\begin{pmatrix}\eta_i\rho\beta^2\left(\left(\omega^2p^2(1-2\frac{\beta^2}{\alpha^2})+\omega^2(p^2-\alpha^{-2})\right)+\frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)\\ -\frac{i\omega\rho}{p}\left(\beta^2\left(p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\left(\omega^2p^2(1-2\frac{\beta^2}{\alpha^2})+\omega^2(p^2-\alpha^{-2})\right)+\omega^2(p^2-\alpha^{-2})\right)\end{pmatrix} \tag{8.64}$$

$$= \left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{\omega^2p\mu}{\Delta_i}\begin{pmatrix}2\eta_i p\\ -i\omega\left(2p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\end{pmatrix} \tag{8.65}$$

$$= \frac{\mu}{p}\begin{pmatrix}2\eta_i p\\ -\mathrm{i}\omega\left(2p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\end{pmatrix} \tag{8.66}$$

$$\begin{pmatrix}\phi_{i,1}\\ \phi_{i,2}\\ \phi_{i,3}\\ \phi_{i,4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -\frac{\mathrm{i}\eta_i}{\omega p}\\ 2\eta_i\mu\\ -\frac{\mathrm{i}\omega\mu}{p}\left(2p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\end{pmatrix} = \frac{\omega}{p}\begin{pmatrix}\frac{p}{\omega}\\ -\frac{\mathrm{i}\eta_i}{\omega^2}\\ 2\frac{\eta_i\mu p}{\omega}\\ -\mathrm{i}\mu\left(2p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\end{pmatrix} \tag{8.67}$$

とまとめることが出来ます。

一報 S 波と対応する $i = 3, 4$ の場合には

$$\begin{pmatrix}\phi_{i,3}\\ \phi_{i,4}\end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_i}\begin{pmatrix}\eta_i\rho\beta^2\left(\left(\omega^2p^2(1-2\frac{\beta^2}{\alpha^2})+\eta_i^2\right)+\frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)\\ -\frac{\mathrm{i}\omega\rho}{p}\left(\beta^2\left(p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\left(\omega^2p^2(1-2\frac{\beta^2}{\alpha^2})+\eta_i^2\right)+\eta_i^2\right)\end{pmatrix} \tag{8.68}$$

$$= \frac{1}{\Delta_i}\begin{pmatrix}\eta_i\rho\beta^2\left(\left(\omega^2p^2(1-2\frac{\beta^2}{\alpha^2})+\omega^2(p^2-\beta^{-2})\right)+\frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)\\ -\frac{\mathrm{i}\omega\rho}{p}\left(\beta^2\left(p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\left(\omega^2p^2(1-2\frac{\beta^2}{\alpha^2})+\omega^2(p^2-\beta^{-2})\right)+\omega^2(p^2-\beta^{-2})\right)\end{pmatrix} \tag{8.69}$$

$$= \left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{\omega^2\mu}{\Delta_i}\begin{pmatrix}\eta_i\left(2p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\\ -2\mathrm{i}\omega p\left(p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\end{pmatrix} \tag{8.70}$$

$$= \frac{\mu}{p^2-\frac{1}{\beta^2}}\begin{pmatrix}\eta_i\left(2p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\\ -2\mathrm{i}\omega p\left(p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\end{pmatrix} \tag{8.71}$$

$$\begin{pmatrix}\phi_{i,1}\\ \phi_{i,2}\\ \phi_{i,3}\\ \phi_{i,4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -\frac{\mathrm{i}\eta_i}{\omega}\frac{p}{p^2-\frac{1}{\beta^2}}\\ \mu\eta_i\frac{2p^2-\frac{1}{\beta^2}}{p^2-\frac{1}{\beta^2}}\\ -2\mathrm{i}\omega p\mu\end{pmatrix} = \frac{1}{\eta_i}\begin{pmatrix}\eta_i\\ -\frac{\mathrm{i}p}{\omega}\\ \mu\left(2p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\\ -2\mathrm{i}\omega p\mu\eta_i\end{pmatrix} \tag{8.72}$$

と整理する事が出来ます。

一般解は、固有ベクトルに鉛直方向の伝播の効果 e^{η_i} をかけたものののの線形和として表現することが出来ます。

8.5.4 境界条件

5.6 節では、半無限媒質を伝播する Rayleigh 波について考えました。同様に、自由境界表面を考え、同様の結果が得られるかみてきましょう。

鉛直上向きを正とする z 軸を考え、$z=0$ で自由境界表面を満たしているとします。まず、半無限媒質を考えているため、$\mathbf{y}_2$ と $\mathbf{y}_4$ は、$z=-\infty$ で振幅が発散してしまうため、物理的に実現不可能です。そのため、解は $\mathbf{y}_0$ と $\mathbf{y}_2$ の線形結合で表現出来る必要性があります。自由境界表面 $z=0$ では、応力 T_{xz}, T_{zz} が 0 となる必要があるために、

$$\begin{vmatrix} \phi_{1,3} & \phi_{3,3} \\ \phi_{1,4} & \phi_{3,4} \end{vmatrix} = 0, \tag{8.73}$$

という条件を満たす必要があります。この条件を書き下し整理すると、

$$16\left(-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)p^6+\left(\frac{16}{\alpha^2\beta^2}-\frac{24}{\beta^4}\right)p^4+\frac{8}{\beta^6}p^2-\frac{1}{\beta^8}=0, \tag{8.74}$$

という式を満たす必要があることが分かります。この式は Rayleigh 波の特性方程式そのもので、Rayleigh 波速度をこの式から求めることが出来ます。

問題 8.1

1. 式 8.74 を導出し無しア。

8.6 球対称構造の場合の固有値問題

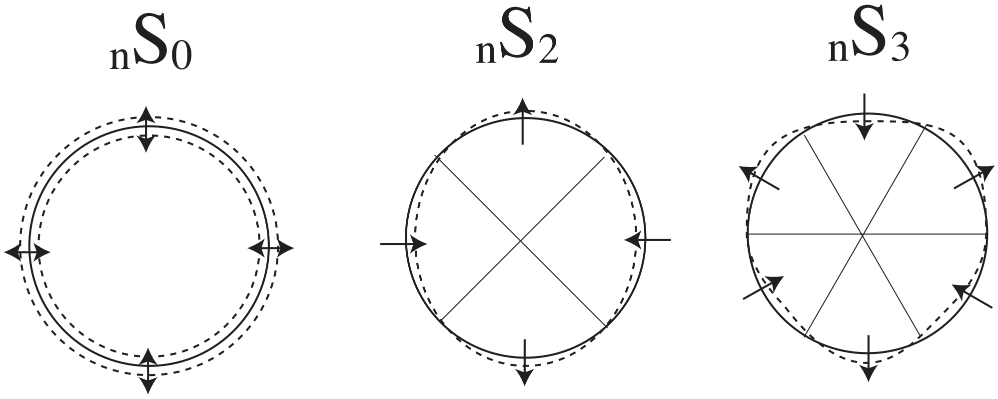
地球規模の振動を考える場合には、地球は鉛直方向にのみ構造が変化し、水平方向は一様 (球対称構造) であると取り扱うことが良い近似となります。この場合には、P-SV・SH 問題は、それぞれと、の振動と対応します。この節では、球対称構造の中でももっとも単純な一様球の振動について考えてみましょう。より一般的な球対称構造の振動は、齋藤さんの教科書 [7] や、Dahlen and Tromp (1998)[2] を参照して下さい。

8.6.1 2 種類のモード

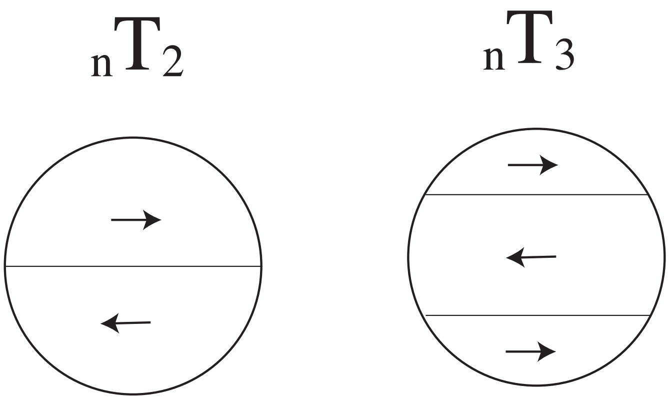
球対称地球のは、伸び縮みモードと、捻じれモードの 2 種類に分類出来ます[注 11)]。モードの重ね合わせですべての波動場を表現することが出来ます。

モードとして数え上げられる根源的な理由は、地球が有限なサイズを持つからです。下の問題にあるように、モードの周波数間隔は、地球の大きさと深く関わっています。数学的に言うと、常微分方程式の固有値問題に帰着できます。一次元の場合には、フーリエ級数展開と対応し、mode の振動パターンは () は sin 関数と対応します。

- 伸び縮みモード $_nS_l$: n は半径方向の節の数を表し、l は水平方向の節の数を表します。伸び縮みモードの重ね合わせで、P-SV の波を表すことが出来ます。$n = 0$ の場合を特に基本モードとよび、と対応します。



- 捻じれモード $_nT_l$: n は半径方向の節の数を表し、l は水平方向の節の数を表します。捻じれモードの重ね合わせで、SH の波を表すことが出来ます。$n = 0$ の場合を特に基本モードとよび、と対応します。



注 11) ここでは水平方向の不均質は十分に小さいく無視できるとします。

8.7 固有振動と固有周波数

(3)–(7)

8.8 一様ガス球に対する正規モード解

簡単のためここでは、一様なガス球に対する、とをんがえてみます。ここでは圧力 $P(\boldsymbol{x};\omega)$ が

$$\nabla^2 P = -\frac{\omega^2}{c^2} P \tag{8.75}$$

という波動方程式を満たしているとします。ここで球座標でのラプラシアンは

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + {\nabla_h}^2\right) \tag{8.76}$$

$${\nabla_h}^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{8.77}$$

と書くことが出来ます。

圧力が $P = R(r)Y(\theta,\varphi)$ と r,θ,ϕ 方向に $R(r)$,$Y(\theta,\varphi)$ に変数分離出来るとします。

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{\nabla_h^2 Y}{Y}\right] = -\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{8.78}$$

8.8.1 水平方向

右辺は r,θ,φ に依存しないため、$\frac{\nabla_1^2 Y)}{Y}$ は θ,φ に依存しない必要があります。球面上で境界条件を満たす Y_l^m は球面調和関数として知られ angular order l と azimuthal order m Y_l^m で特徴付けられ、

$$\nabla_1^2 Y_l^m = -l(l+1)Y_l^m, \tag{8.79}$$

をみたします。

8.8.2 半径方向

水平方向の固有関数は球面調和関数で表現出来るため、一様球に対する固有値・固有関数を求めるためには常微分方程式

$$\frac{1}{r^2 R}\left(\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}R\right) = \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{8.80}$$

の固有値問題を解く必要があります。右辺第 1 項は、水平方向の波数を表し、第 2 項の ω は固有値を表します。固有関数は境界条件: (i) 地表 $r = r_0$ で圧力 $R = 0$ (ii) 中心 $r = 0$ で有限かつ連続、を満たす必要があります。固有関数は、$j_l(\omega/cr), n_l(\omega/cr)$ として知られています。j_l は原点で有限の値をとり、n_l は発散するため、2 つ目の境界条件から R は j_l に比例することが分かります。さらに一つ目の境界条件から $j_l(\omega/cr_0) = 0$ を満たす必要があり、この条件から固有周波数 ω を決定することが出来ます。

8.9 † ベクトル球面調和関数

前節ではガス球を考えましたが、弾性球の振動を考えるためには、スカラーではなくベクトルの波動方程式を考える必要があります。そのためには球面調和関数をベクトルに拡張する必要があります。

ベクトル球面調和関数は

$$\boldsymbol{R}_{lm} = Y_l^m \hat{\boldsymbol{r}} \tag{8.81}$$

$$\boldsymbol{S}_{lm} = \nabla_1 Y_l^m \tag{8.82}$$

$$\boldsymbol{T}_{lm} = -\hat{\boldsymbol{r}} \times \nabla_1 Y_l^m \tag{8.83}$$

で定義されます。ベクトル球面調和関数はより複雑なため詳細は省きますが、例えばベクトルの値をとる固有関数は水平方向のラプラシアン ∇_1^2 に対して、例えば $\nabla_1^2 \boldsymbol{T}_{lm} = -l(l+1)\boldsymbol{T}_{lm}$ という関係を満たします。$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}$ はと対応し、$\boldsymbol{T}$ は対応します。詳細は Dahlen and Tromp (1998) p. 872 を参照して下さい [(2)注 12)]。

注 12) 球面調和関数・ベクトル球面調和関数の定義は規格化に大きく依存するため、どの規格化に従っているのか、最初に定義を確認することが大切です。

8.10 地球自由振動の観測例

図 8.7 はチリ地震の際に日本で記録された波形の Fourier スペクトルを表しています。図 8.1 はの波群が地球をグルグルと巡っている様子が見てとれます。波群の現れる間隔は表面波が地球を一周する時間に対応しています。図 8.7 のスペクトルピークの間隔と、表面波が地球一周するのに要する時間を比較しみましょう。Jeans の関係式から波長 λ は地球半径を R_E とすると

$$\lambda_l = \frac{2\pi R_E}{l + 1/2} \tag{8.84}$$

と書くことができます。l に対応する f_l は位相速度を c_p とすると

$$f_l = \frac{c_p}{\lambda_l} = \frac{(l+1/2)c_p}{2\pi R_E} \tag{8.85}$$

となります。大雑把に $c_p = 4.5$ km/s とすると、$f_{l+1} - f_l$ ~0.1 mHz となり、おおよそ観測されたモードの間隔と一致します。

ピークの包絡線に注目すると周期的に山があるように見えます。この山について考察してみましょう。方位量子数 l ($m = 0$ を仮定) のモードの振幅の絶対値は、震源と観測点の角距離を Θ とすると

$$|P_l^0(\cos\Theta)| \sim \sqrt{\frac{2}{l\pi\sin\Theta}}|\cos[(l+1/2)\Theta - \pi/4]| \tag{8.86}$$

と書けます。いま Θ を固定して l を変化させると、おおよそ π/Θ ごとに山ができそれが繰り返されることが分かります。チリ地震の場合 SGN までの角距離は 154 度です。この場合対蹠点 (震源の真裏) に波が集まってくるので、対蹠点からの角度 (180-154) 度で見積もるとわかりやすい[注 13)]。この場合山の幅は l が 7 個分と見積もられ観測と一致します。これらの現象は、単純にモードの節が繰り返し現れるために起こります。

[注 13)] もちろん $\Theta = 150°$ でも見積もることができるが、その場合には l が整数であることに気をつけること。

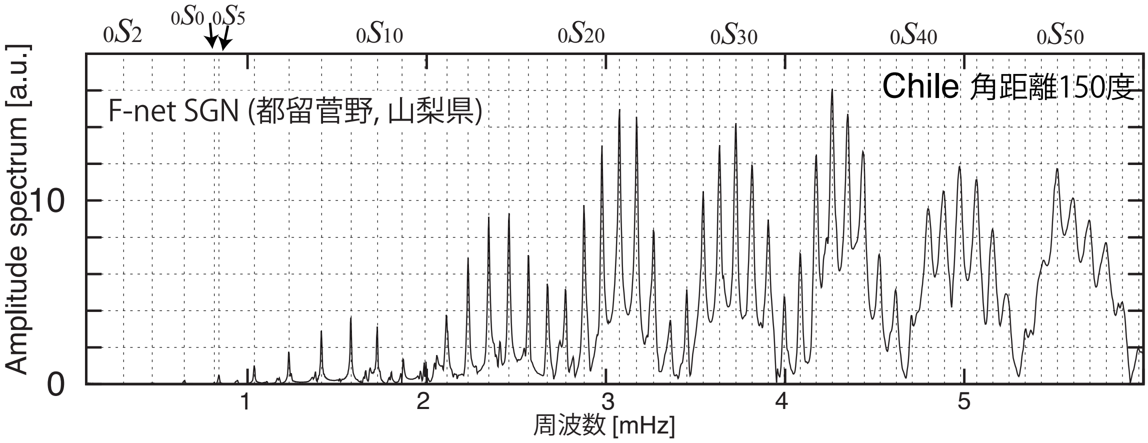


図 8.7　2010 年チリ地震の際の日本で観測された上下動記録のフーリエ・スペクトル。伸び縮み基本モードに対応するピークを多く見て取れます。これは地震が浅いためで、深い地震の場合には高次モードの振幅も大きくなります。

8.11 参考文献

[1] G.B. Arfken and H.J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Science, 2013.

[2] F.A. Dahlen and J. Tromp. *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, Princeton, 1998.

[3] F. Gilbert. Excitation of normal modes of the earth by earthquake sources. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, Vol. 22, p. 223, 1971.

[4] G Laske and R Widmer-Schnidrig. 1.04 - theory and observations: Normal mode and surface wave observations. In Gerald Schubert, editor, *Treatise on Geophysics (Second Edition)*, pp. 117–167. Elsevier, Oxford, January 2015.

[5] Masanori Saito. *DISPER80; a subroutine package for calculation of seismic normal-mode solutions*, pp. 293–319. Acad. Press. San Diego, 1988.

[6] H. Takeuchi and M. Saito. Seismology: Surface waves and free oscillations. In B.A. Bolt, editor, *Methos in Computational Physics*, Vol. 11, pp. 217–295. Academic Press, New York, 1972.

[7] 斎藤正徳. 地震波動論. 東京大学出版会, 2009.

[8] 蓬田清. 演習形式で学ぶ特殊関数・積分変換入門. 共立出版, 2007.

流体中の波

第 9 章

この章では、流体中に伝播する波について説明してきます。大気海洋中の波の伝搬を考える場合には、重力による復元力が大切になってきます。2 章で述べたように、重力は Euler 的な見方が自然であり、応力 は本質的に Lagrange 的な見方が自然のため、取り扱いに注意が必要です。そこでこの章では、まずは大気と海洋の波について第 0 次近似的な描像を考えていき、後半で支配方程式に基づきその振る舞いを解説していきます。

9.1 境界波: Lamb 波と海洋重力波

大気・海洋の波を考える際、地表は異なった境界条件として取り扱う必要があります。これは、大気が気体であり、海洋よりも密度が十分に小さいためです。そのため、大気にとって地表は固定端として近似でき、海洋にとって地表は自由端として近似することが出来ます。まず最初に簡単な例として、地表付近に振幅を持つ境界波である大気 Lamb 波と海洋重力波の物理的な描像を、単純化して説明していきます。

9.1.1 Lamb 波

海洋中の音波を考えた場合には、水面近くで水平方向に伝播する音波は存在するでしょうか?5.6.1 節で説明したように、大気の存在が無視でき水面を自由境界表面と見なせる場合には、水平方向に伝播する音波は存在できません。大気中の音波を考えた場合にはどうでしょうか？

大気にとって地表は剛体壁と近似することが出来ます。そのため、鉛直変位が 0 の境界条件を考えれば良いことが分かります。つまり水平方向にのみ圧縮・膨張を繰り返す音波は存在できることが分かります。大気 Lamb 波として知られる波です。後ほど詳細を説明しますが、大気 Lamb 波は厳密には鉛直方向には静水圧平衡に達しており、水平方向に圧

縮・膨張を繰り返しながら音速で伝播します。

大気中で大きな爆発が起こった際には実際に励起され、地球を周回することが知られています。近年では、2022 年のトンガのフンガ火山噴火時に観測されました (図 9.1)。1960 年代の空中核実験時には世界中の気圧計に記録されたとの報告があります [7]。また、火山噴火時だけではなく気象現象によって定常的に大気 Lamb 波が励起されている事も知られています [8]。

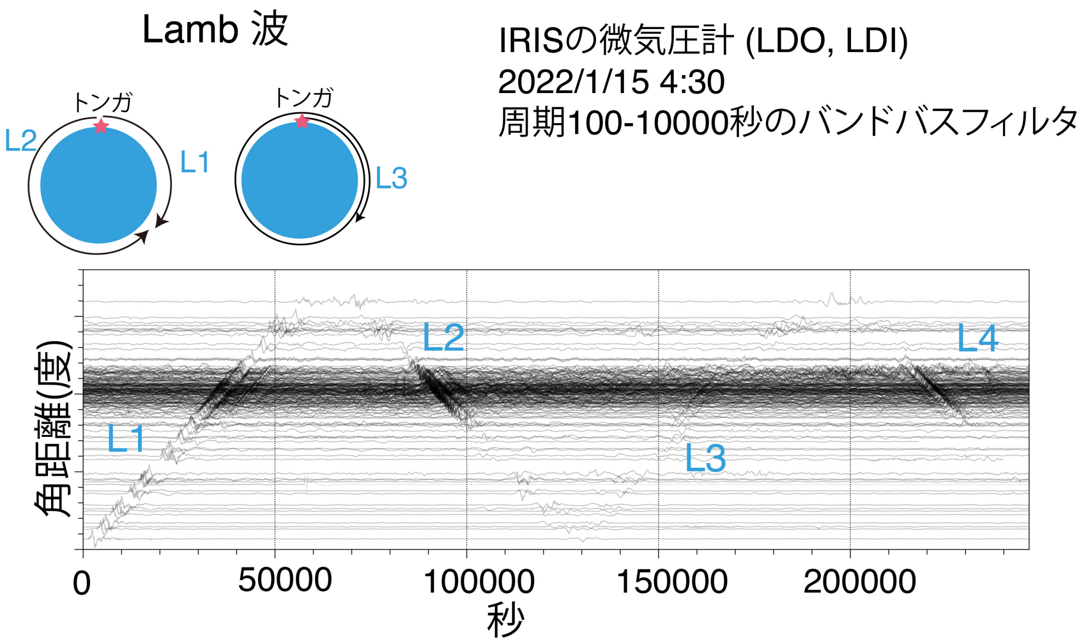


図 9.1　トンガのフンガ火山が 2022 年に噴火した際の気圧計記録。横軸は約 3 日の期間に対応し、縦軸は角距離 0° から kara90° と対応する。約 300 m/s の伝播速度で地球を周回する Lamb 波を見て取ることが出来る。

9.1.2 海洋重力波

海洋からみると海水面は自由端として振る舞います。以前述べたように、半無限媒質中を伝播する音波を考える場合には、自由表面の影響で水平に伝播する音波は存在する事が出来ません。しかし、海には重力を復元力とする波が存在します。まずは、その振る舞いについて、物理的な描像を考えていきましょう。

浅水波

海洋重力波は、波長が水深より浅い場合浅水波と呼ばれます。津波がその一例です。ここでは伝播について、その物理を大雑把に考えてみましょう。

水平方向の流速を $\mathrm{i}\omega s_x$, 鉛直方向の流速を $\mathrm{i}\omega s_z$ とします。波長が水深より十分に長い場合、流れは 2 次元的になり、水平流速は鉛直方向に一定になります。水深を H の場合、質量保存を考えると

$$\mathrm{i}\omega\frac{ds_x}{dx}H + \mathrm{i}\omega\eta = 0 \tag{9.1}$$

となります。ここで η は水位を表します。

流れは水平流が卓越し、海水面変動によって生じた圧力勾配が駆動します。そのため運動方程式は

$$-\rho\omega^2 s_x = -\frac{\partial\rho g\eta}{\partial x} \tag{9.2}$$

となります。s_x を消去すると、

$$-\omega^2\eta = gH\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \tag{9.3}$$

となります。つまり浅水波の伝播速度は $\sqrt{gH}$ となることが分かります。

深水波

多少天下り的にはなってしまいますが、波長が水深より十分に短い場合について物理的な描像を考えてみましょう。

角周波数 ω の波を考える場合に、系を決定している物理量は g, ρ のみです。伝播速度を次元解析から決めようとすると、速度は g/ω の組み合わせしかないことが分かります。周波数が高くなるにつれて伝播速度が遅くなることが予想されます。これは、重力による復元力は水面付近に 2 次元的に働く一方、波の動かす質量は波長の 3 乗に比例するためです。

質量保存と運動方程式について、どういったバランスになっているか考えてみましょう。波長が水深より十分に短い場合、流れは水面付近の波長程度の深さまでにに限られます。波長を λ とし、質量保存を考えると

$$\mathrm{i}\omega\frac{ds_x}{dx}\lambda \propto -\mathrm{i}\omega\eta \tag{9.4}$$

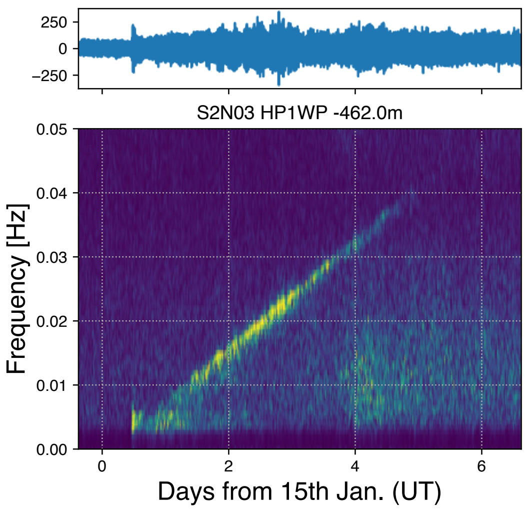


図 9.2　トンガのフンガ火山が 2022 年に噴火した際に励起した海洋重力波。周波数が高くなるにつれて到達時刻が遅くなっていることが分かる。これは群速度が周波数に反比例していることを表している。S-net 観測点の海底水圧計を用いた。

となります。波長は波数 k と $2\pi/k$ という関係にある事を思い出すと、

$$\frac{ds_x}{dx} \propto -k\eta \tag{9.5}$$

となります。

海水面直下の流れを考えます。海面変動によって生じた圧力勾配が駆動します。そのため運動方程式は

$$-\rho\omega^2 s_x = -\frac{\partial \rho g \eta}{\partial x} \tag{9.6}$$

となります。s_x を消去すると、

$$-\omega^2\eta \propto \frac{g}{k}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \tag{9.7}$$

となります。つまり浅水波の位相速度は g/ω に比例することが分かります。ここでは、大雑把な見積もりのため比例係数を決めることは出来ませんが、後で解説するように比例係数は 1 である事が分かります。群速度は $\frac{d\omega}{dk}$ である事から $g/(2\omega)$ である事が分かります。

一例として、トンガの 2022 年フンガ火山の噴火時の海底水圧計記録を見てみましょう。図 9.2 は東北地方で観測された海底水圧計記録のランニングスペクトルを表しています。縦軸が周波数で、横軸が時刻を表します。周波数に比例して到達時刻が線形に遅れていることが見て取れます。到達時刻は震央距離を群速度で割ることによって計算出来ることから、深水波の分散を表していることが分かります。

問題 9.1

1. 図 9.2 から、観測点からフンガ火山までの距離を推定することが出来る。図から数字を読み取り、その距離を見積もりなさい。

9.1.3 航跡波

はじめにの中で、カモ作る水面の波を例にとり、分散性の説明をしました。ここではもう少し詳しく考えていきましょう。カモの作る波は、として知られています。例えば、船が 20 m/s で右向きに進んでいる事を考えます。単純に船は各時刻で同心円状に波を励起していると仮定すると、2 次元の Green 関数を船の移動に沿って積分することでを記述出来る事が分かります。図 9.3 は実際の計算結果を示してます。カモの作る波と同様のパターン (Kelvin wave pattern として知られています) を見て取ることが出来ます。また空間上のある 1 点でハの字型波を観測していた場合には、高周波数成分が遅く到達しており、分散性の効果を反映していることが分かります。

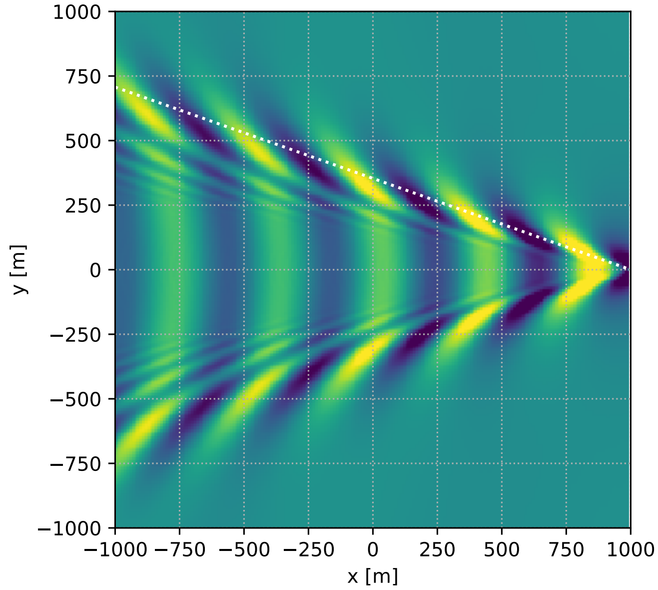


図 9.3　航跡波の一例。船の移動速度は 20 m/s で周波数の上限は 0.25 Hz.

まずは、周波数 ω での位相速度について考えてみましょう。簡単のため分散性がない場合を考えます。図 9.4(a) 中、で船が右向きに速度 V で進んでいるとします。6.3.4 節でを考えたときと同様に、ホイヘンスの原理を考えてみましょう。船から後方に伸びる 2 つの等位相線が延びます。Shock cone としてしられ、図 (b) と同様、なす角を θ とすると、位相速度 c_p と船の速度 V との間に $\sin\theta = c_p/V$ という関係式が成り立ちます。

深水波の場合には群速度は位相速度の 1/2 となるために、より複雑になります。図 9.4(b) で示したように、波群は位相に対して 1/2 しか進まないため図中の赤太線に沿って振幅が大きくなります。この線のなす角を α とします。位相自体は等位相面と平行になるため、図 (b) で示したように斜めの線が赤太線に沿って並ぶ形となります。位相速度 ($c_p = g/\omega$) と群速度 ($c_g = g/(2\omega)$) は周波数に依存するため、角度 α と θ は周波数に依存します。

ここで角度 α と θ の関係を考えてみましょう。α と θ は、幾何学的な関係と、三角関数

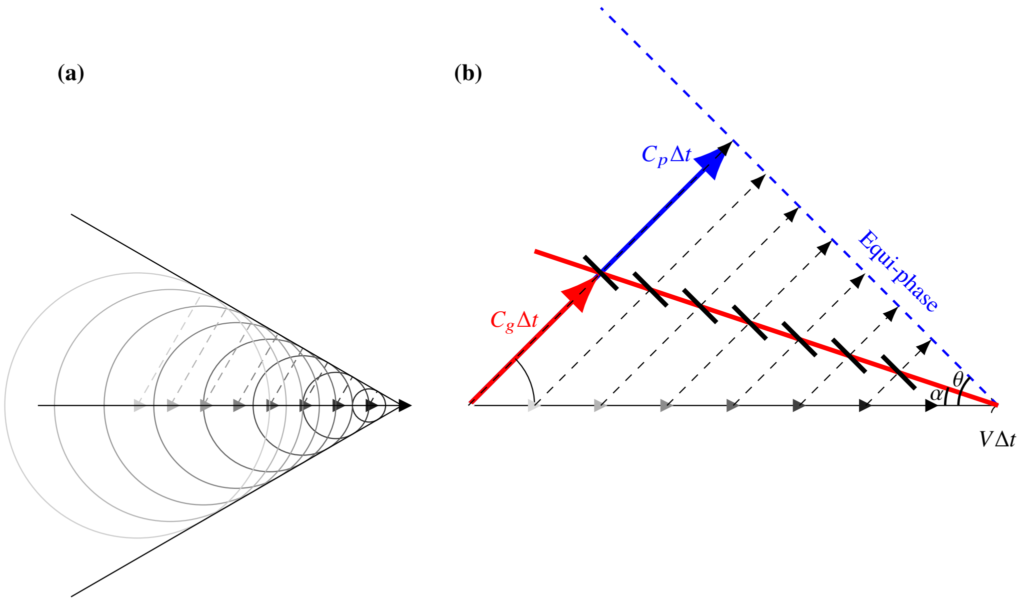


図 9.4　(a) 分散性がない場合。衝撃波が作る shock cone と対応します。(b) 生成の模式図。群速度と位相速度の関係を理解する事が大切です。

の加法定理から

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}\frac{\tan\theta}{1+\frac{\tan^2\theta}{2}} \tag{9.8}$$

という関係にある事が分かります。

$\tan\theta$ を変数とみなして微分することで、$\tan\alpha = \sqrt{2}/4$ で、$\tan\alpha$ が極大値を取ることが分かります。停留値法 (6.3.5 節) を思い出すと、$\tan\alpha$ の極大値付近での寄与が大きくなることが予想されます。これは多くの波長の波が同位相で重なり合うために、振幅が強調されるためです。船の速度によらず、一定の角度 α 上で大振幅となることが分かります。つまり船が色々な周波数の波を等しく放出する場合には、波群のなす角 α は周波数によりず $\arctan\left(\sqrt{2}/4\right) \sim 19^\circ$ となることが分かります。

図 9.3 では、角度 α をなす波群だけではなく、進行方向に対して直交する波面も見ることが出来ます。この低周波数の波群についても考えてみましょう。いま船の速度を固定しているため、図 9.5 で、極大値より左は低速度な波と対応し、右側は速い波と対応します。つまり極大値より左側の部分が、議論している波面と対応します。等位相面は、ほぼ進行方向と直交しますが、波群は x 軸に近いところに集中します。つまり低周波数かつ、進行方向に直交しつつ x 軸に沿って波面が進む事が分かります。この成分が図 9.3 では見えていたことが分かります。

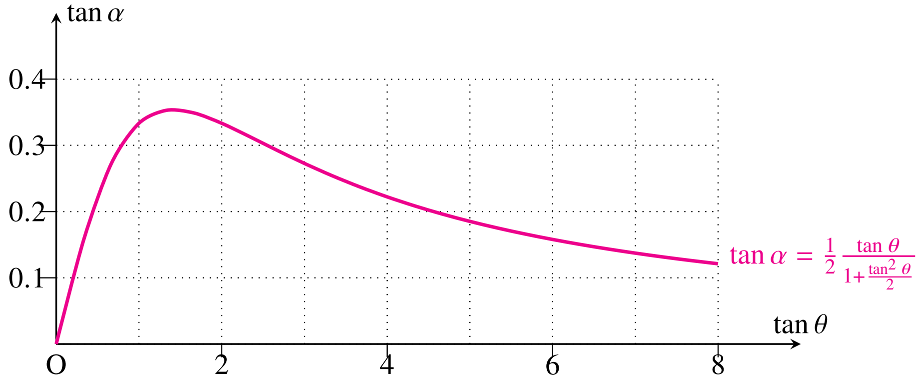


図 9.5　等位相面のなす角 θ と、波群のなす角 α の関係。いま船の速度を固定しているため、極大値より左は低速度な波と対応し、右側は速い波と対応します。今は角度 θ で考えているために、波の伝播速度は船の移動速度より常に遅くなります。つまり $g/2\omega = V$ から低周波数側のカットオフが自動的に決まります。

問題 9.2

1. 式 9.8 を導きなさい。
2. 船が 20 m/s で移動し、船はあらゆる周波数を等しく励起していると仮定します。波群として卓越する周波数を見積もりなさい。
3. θ が 90° に近い場合に、図 9.4(b) 同様の図を書き、波群について考察せよ。

9.2 重力の効果を含んだ流体の運動

ここでは、大気・海洋での波動伝播を記述する方程式について考えていきます。

大気・海洋中の波の伝播を考える場合には、固体中の地震波の伝播を考える場合に比べ重力の効果が重要な役割を果たします。重力の効果は大きく分けて 2 つあります。ここではそれぞれの効果について見ていきましょう[注 1)]。

1 つ目は静水圧です。静水圧平衡に達していると考える場合、鉛直方向の圧力勾配と重力がつりあいます。大気の場合には、圧力と密度は指数関数的に減少し、海洋の場合には水深に比例して静水圧は高くなります。静止状態で重力と釣り合っている初期応力を考える場合には、Euler 的な見方と Lagrange 的な見方が異なるために注意が必要です。

2 つ目の効果は復元力としての効果です。先に述べたように、重力が原因で大気は密度

注 1) 詳細は Gill の教科書[5] の 6.14 章 Adjustment to Equilibrium in a Stratified Compressible Fluid を参照のこと。大気音波についてより詳しく知りたい場合は、絶版ですが Gossared の教科書[6] が良い本です。

成層 (高くなるとだんだん薄くなる) しています。そのため、鉛直方向に振動する場合には浮力が重要な復元力になります。この場合、音波だけではなく、重力を復元力とする重力波を考える必要があります。ドレッシングの油と水の境界面にたつ波を思い浮かべるとわかりやすいと思います。

いま注目している時定数は自転周期よりも十分に短いため、遠心力や、コリオリ力など地球回転の効果は無視できると仮定します。また簡単のため、平均風など移流の効果も無視できるとします。

低周波数帯では、重力を復元力とする大気重力波が重要な役割を果たします。大気重力波を考える場合に、密度変化が引き起こす重力ポテンシャルの変化は、浮力よりも十分に小さいと近似出来ます。そのため、ここでは重力ポテンシャルは重力加速度 g_0 より十分に小さいとして無視しますが、g_0 の効果は考慮します (Boussinesq 近似？ Cowling 近似はを無視する近似)[(1), (3)注 2)]。

鉛直変位 U と応力 T_{zz} を独立変数とする微分方程式の形にまとめてみましょう。水平方向には均質であると仮定します。ややこしいのは、応力以外は Euler 的に摂動をとり、応力は Lagrange 的である事に起因します。これは、変形前の初期応力に対して、変形に起因する応力 (Lagrange 的) を足すためです。変形前の位置を $\boldsymbol{x}$ とし変形後の位置を $\boldsymbol{r}$ とし、変位を $\boldsymbol{s} \equiv (U, V)^T = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}$ とします。位置 $\boldsymbol{r}$ での応力は、$-p_0(\boldsymbol{x}) + T_{zz}$ となります。位置 $\boldsymbol{r}$ での静水圧 $p_0(\boldsymbol{r}) \approx p_0(\boldsymbol{x}) - \rho_0 g_0 U$。そのため位置 $\boldsymbol{r}$ での、Euler 的な応力の摂動は、$T_{zz} + \rho_0 g_0 U$ となります。

運動方程式

$$-\rho_0\omega^2 V = \frac{d(T_{zz} + \rho_0 g_0 U)}{dx} \tag{9.9}$$

$$-\rho_0\omega^2 U = \frac{d(T_{zz} + \rho_0 g_0 U)}{dz} - g_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0 \boldsymbol{s}) \tag{9.10}$$

2 つ目の式の最後の項は質量保存の式 (2.5 節) を浮力項に代入した結果です。

水平成分から

$$V = -\frac{\mathrm{i}k}{\rho_0\omega^2}(T_{zz} + \rho_0 g_0 U) \tag{9.11}$$

鉛直成分から

$$\begin{aligned}
-\rho_0\omega^2 U &= \frac{d(T_{zz} + \rho_0 g_0 U)}{dz} - \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0 \boldsymbol{s}) g_0 && (9.12)\\
&= \frac{d(T_{zz} + \rho_0 g_0 U)}{dz} - \left(\mathrm{i}k g_0 \rho_0 V + \frac{d(\rho_0 U)}{dz}\right) && (9.13)\\
&= \frac{dT_{zz}}{dz} - \mathrm{i}k g_0 \rho_0 V \text{ 水平成分の式を代入} &&\\
&= \frac{dT_{zz}}{dz} + \frac{k^2 g_0}{\omega^2}(T_{zz} - \rho_0 g_0 U) && (9.14)
\end{aligned}$$

注 2) 地震波を計算する際にも、外核や海洋の影響を考慮するために流体層を組み込むことが可能です[(4), (9), (10)]。

断熱変形を仮定できるとすると、状態方程式 (Lagrange 的に考えなくてはいけない: 2.5 節) から

$$-\rho_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{s}) = \frac{T_{zz}}{c_s^2} \tag{9.15}$$

となります。まとめると、

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} U \\ T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k^2 g_0}{\omega^2} & \frac{1}{C} - \frac{k^2}{\rho\omega^2} \\ -\rho\omega^2 + \frac{k^2 \rho g_0^2}{\omega^2} & -\frac{k^2 g_0}{\omega^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ T_{zz} \end{pmatrix} \tag{9.16}$$

と書くことが出来ます。ここで z は高度を表し、U は鉛直変位、T_{zz}。ここで C は体積弾性率で、音速 c_s、密度 ρ、圧力 p と比熱比 γ との間に

$$C = \rho c_s^2 = \rho\left(\frac{\gamma p}{\rho}\right), \tag{9.17}$$

という関係があります。

単純に考えると圧力 $p = -T_{zz}$ とすれば、流体力学的な定式化と一致するように思えます。しかし流体の場合には圧力の摂動も Euler 的に取るため、流体力学の結果と比較するには $p = -T_{zz} + \rho_0 g_0 U$ と変形による静水圧の変化を考慮する必要があります[注 3)]。

9.2.1 海洋重力波

単純化のため、密度は定数と近似します。また、音速は海洋重力波の速度より十分に速いため、$1/C = 0$ とします。行列の固有値は $\pm k$ であり、対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \rho_0 g_0 \left(1 - \frac{\omega}{k g_0}\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_0 g_0 \left(1 + \frac{\omega}{k g_0}\right) \end{pmatrix}, \tag{9.18}$$

となります。解としては、海底で $U = 0$ となり、水面で $T_{zz} = 0$ という境界条件を満たす必要があります (応力は Lagrange 的に取り扱っているため)。水深を H とした場合に、境界条件から

$$\tanh kH = \frac{\omega^2}{k g_0}, \tag{9.19}$$

となります。この式は海洋重力波の分散関係を示しています。

注 3) 弾性体の場合には、静水圧は粘性緩和より長いタイムスケールの減少に起因します。地震波の変形は、粘性緩和のタイムスケールよりも十分に短いため、静水圧は変形前の値を保存します (凍結しているとも見なせます)。一貫して Euler の取り扱いも可能ですが、慣習上地震学では応力のみ Lagrange 的に取り扱うことが多いです。

9.2.2 大気中の波

大気は静水圧平衡に達していると考える場合、鉛直方向の圧力勾配と重力がつりあいます。その結果圧力と密度は指数関数的に減衰します。H_s km だけ高度が上がるごとに圧力が $1/e$ になる時に、H_s を scale height と定義します。scale height は大気構造を特徴付ける重要な物理量です。この節では、密度成層する大気構造について考えていきましょう。

気象学 (流体力学) の記述との整合性を取るために、応力を Euler 的に見た圧力 p へと、鉛直変位 U を鉛直速度 w へと書き換えます。

$$P = \sqrt{\rho}(-T_{zz} + \rho g U) \tag{9.20}$$

$$W = \frac{\mathrm{i}\omega U}{\sqrt{\rho}}. \tag{9.21}$$

変数を変換し、式を整理すると

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{x}(z) = \boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{x}(z), \tag{9.22}$$

と書き換えることが出来ます。ここで、

$$\boldsymbol{A}(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{g}{c^2} - \frac{N^2}{g}\right) & -\frac{k^2}{i\omega}\frac{\omega^2 - L(k)^2}{L(k)^2}) \\ \frac{N^2-\omega^2}{i\omega} & -\frac{1}{2}\left(\frac{g}{c^2} - \frac{N^2}{g}\right) \end{pmatrix}, \tag{9.23}$$

$$\boldsymbol{x}(z) = \begin{pmatrix} P(z) \\ W(z) \end{pmatrix}. \tag{9.24}$$

です。大気中の波を特徴付ける重要な値として、浮力周波数 (Brunt-Väisälä 周波数) N と、音響カットオフ周波数 N_a の 2 つの周波数があり、以下のように定義されています。

$$L(k)^2 \equiv k^2 c^2, \tag{9.25}$$

$$N^2 \equiv \frac{g}{H_\rho} - \frac{g^2}{c^2}, \tag{9.26}$$

$$N_a \equiv \frac{c}{2H_\rho}, \tag{9.27}$$

という関係式を満たします。 H_ρ 密度スケールハイトと呼ばれる量で、

$$H_\rho = -\frac{dz}{d\ln\rho}, \tag{9.28}$$

で定義されます。

大気中の波を特徴付ける重要な値として、浮力周波数 (Brunt-Väisälä 周波数) N と、カットオフ周波数 N_a の 2 つの周波数があり、以下のように定義されています。

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz} - \frac{g^2}{c_s^2},$$

$$N_a = \frac{c_s}{2H_s}, \tag{9.29}$$

ここで g は重力加速度、ρ_0 は密度、z は高度、c_s は音波速度です。

まずは N について考えていきましょう。まず、小さな体積要素を考えます。密度成層の結果として浮力が生じます。上方に動いた時にに負の浮力が働き、下方に動いた場合には正の浮力が働くとします。すると、結果として振動を起こします。この振動数がです。

次にカットオフ周波数 N_a について考えていきましょう。N_a は音波が存在できる下限の周波数です。この周波数より低周波数側では、音波は存在できません。定義から分かるように、周波数 N_a での音波の波長は $4\pi H_s$ となります。つまり、音波の波長が大気の厚さ H_s より十分に厚くなってしまし、音波として支えきれなくなるのです。N_a は N よりも常に高周波数となります。実際の大気中では、高度によって変化しますが大雑把に言うと、はおおよそ 400 秒程度、カットオフ周波数は 300 秒程度です。

ここでは簡単のため、等温大気を考えます。等温大気の場合には、音速が一定となるためにやスケールハイトが一定となるために、$\boldsymbol{x}(z) \sim e^{\lambda r}$ と書くことが出来ます。そのため特性方程式は、

$$\det(\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{I}) = \lambda^2 + \frac{f(\omega^2)}{c^2\omega^2} = 0, \tag{9.30}$$

と書くことが出来ます。ここで、f は

$$f(\omega^2) = \omega^4 - (L(k)^2 + N_a^2)\omega^2 + L(k)^2 N^2. \tag{9.31}$$

と定義しました。

ここで、2 つの特徴周波数 ω_+^2 $\omega_-^2(\omega_+^2 > \omega_-^2)$ を特性方程式の解とし、

$$f(\omega^2) = 0, \tag{9.32}$$

という関係を満たしているとします。

図 9.6 は・音波の分散関係を示しました。大気重力波・音波を特徴付ける・2 つの周波数 ω_- と ω_- によって、伝搬様式を分することが出来ます。音波として鉛直に伝播できる領域を青に、重力波として鉛直に伝播できる領域を赤で示しています。白色の領域 $(\omega_- < \omega < \omega_+)$ は λ^2 が正となるとめ、鉛直方向に波動として伝播出来る領域 (evanescent region)[注 4] と対応し、 鉛直方向には指数関数的に減衰します。斜めの線は Lamb 波と対応します。は前の節で説明したように、水平方向的には音波として振る舞い、鉛直方向には静水圧平衡として釣り合っています。つみり、大気の下端付近にのみ存在する境界波で、エネルギーは $\exp(-z/H_s)$ に比例して減衰します[注 5]。青色・赤色の領域は内部波[注 6]と対応する領域です。λ^2 が負となるため、鉛直方向に伝播出来る事が分かります。音波領域 (青色) は $\omega > \omega_+$ という条件を満たします。また、音波領域 (青色) は常に遮断周波

注 4) 地震学では不均質波と呼び、大気・海洋では外部波とも呼ばれますが、物理的には同じ現象を指し示します。

注 5) Lamb 波は皆既日食、空中核実験、火山の噴火時に観測されています。効率的に水平方向に伝播するために地球を何周もする Lamb 波も観測されています。最近大気現象が励起源と思われる、定常的に励起されているも発見されています [8]。

注 6) 地震学では実体波と対応します。

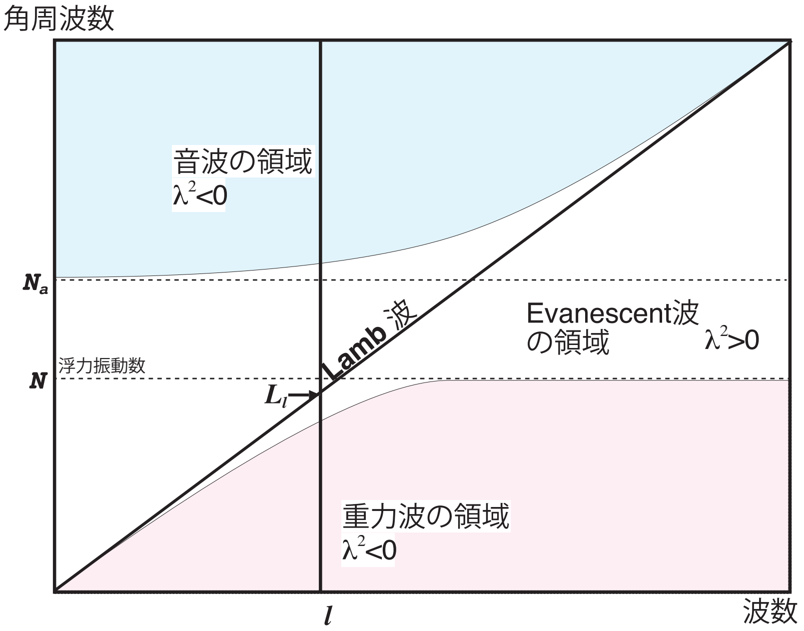


図 9.6　大気重力波・音波の分散関係。大気重力波・音波を特徴付ける・2 つの周波数 ω_- と ω_- によって、鉛直方向に波動として伝播出来る領域と、伝播出来ない (evanescent region) とに分かれる。

数 (cut-off 周波数) N_a より短周期側に存在します。もう一つの領域は、内部重力波領域 (赤色) で $\omega < \omega_-$ という関係を満たします。この領域は常に N よりも低周波数側に存在します。このように、特徴的な周波数 $N_a, L(k)$, と N は、大気・海洋中の波動伝播の振る舞いを理解する上で、大切な役割を果たします。

音波に関して高周波数の極限を考えた場合、λ^2 ($L_l N \ll \omega^2$ and $N_a \ll \omega$) は

$$\lambda^2 = -\frac{1}{c^2}(\omega^2 - L(k)^2). \tag{9.33}$$

と近似することが出来ます。この場合、ω_+ は

$$\omega_+ \sim L(k) \propto v, \tag{9.34}$$

と近似出来ます。このことから、高周波数帯で音波が熱圏のような高音速 (高温) 領域に入射した場合には反射することが分かります。

ここで、音波の低周波数での振る舞いを考えてみましょう。ω_+ は 遮断周波数 N_a で近似することが出来ます。そのため、

$$\omega_+ \sim N_a \sim \frac{v}{H_\rho} \propto \frac{\sqrt{T}}{T} \propto v^{-1}. \tag{9.35}$$

となります。つまり、低温領域で音波が反射することが分かります、これは、式から分かるように、音波の鉛直波長が大気の厚さ (スケールハイト H_ρ) によって制限され、かつ高温ほどスケールハイトが長くなるためです。

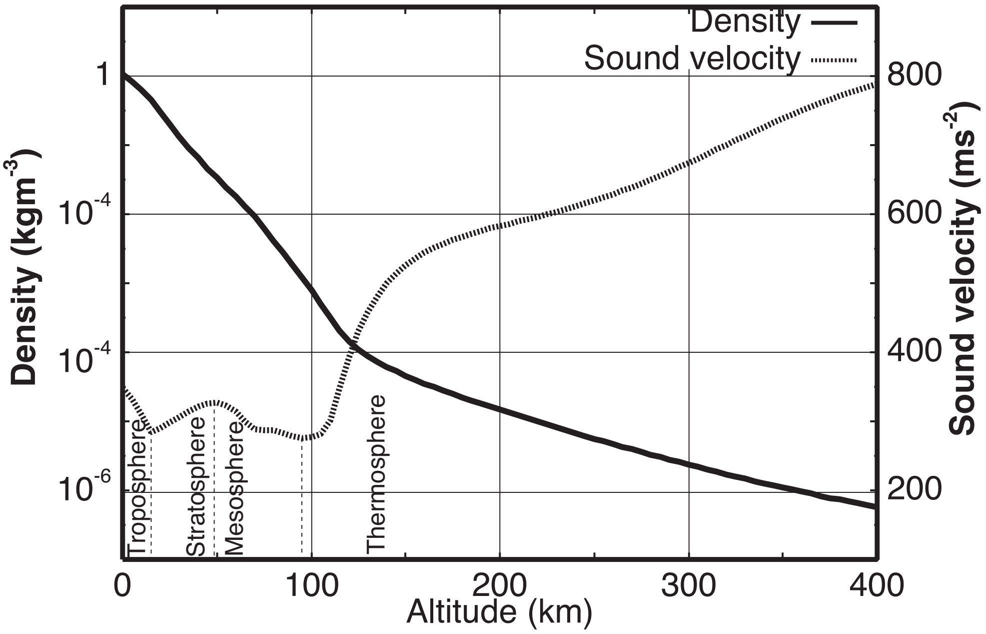


図 9.7　大気の音速と密度構造。CIRA86[2] の赤道域の 6 月のモデルを表示。

Figure 9.8 COSPAR INTERNATIONAL REFERENCE ATMOSPHERE: 1986 (CIRA86) model (Figure 9.7) に基づいて計算した $\omega_+/2\pi$ の高度分布を示しています。図 9.8 と図 9.7 を比較すると、v と $omega_+$ の関係がわかります。この関係から mHz 帯の音波は、中間圏の低音速領域に入ると反射されことが分かります。この現象を”inverted refraction” と呼びます。このため、基本音波モードと 1 次高次モードは、地表から 100 km 程度までの高さ範囲にトラップされることが分かります。音波モードのトラップは、中間圏における低音速領域の反射 (”inverted refraction”) によって起こります。2 次高次モード以降じゃ、高度 100 km より上方に伝播し散逸するために、ほとんどトラップされません。 地表から反射層までの距離によって垂直波長が決まります。鉛直は長は水平波長よりはるかに短いため、トラップされた波の水平方向の群速度は非常に遅く (鉛直方向に多重反射しながらゆっくりと水平方向に伝播するため)（10 m/s のオーダー）伝播します。

波数・周波数スペクトル

図 9.6 のように、波動伝播を考える上で波数周波数領域で考える事は常套手段です。特に分散性が強い場合には時間領域では波形が複雑になり、解釈が難しい場合が多くなります。数学的には、時間・距離の領域で考えるのも、波数・周波数領域で考えるのもほぼ等価なことです。この資料の中でも、いろいろなプロット方法が出てきます。見慣れないとなかなか難しいと思いますが、分野によって定番のプロット方法が存在するので、少し訓練すれば図のみどころがわかってくると思います。

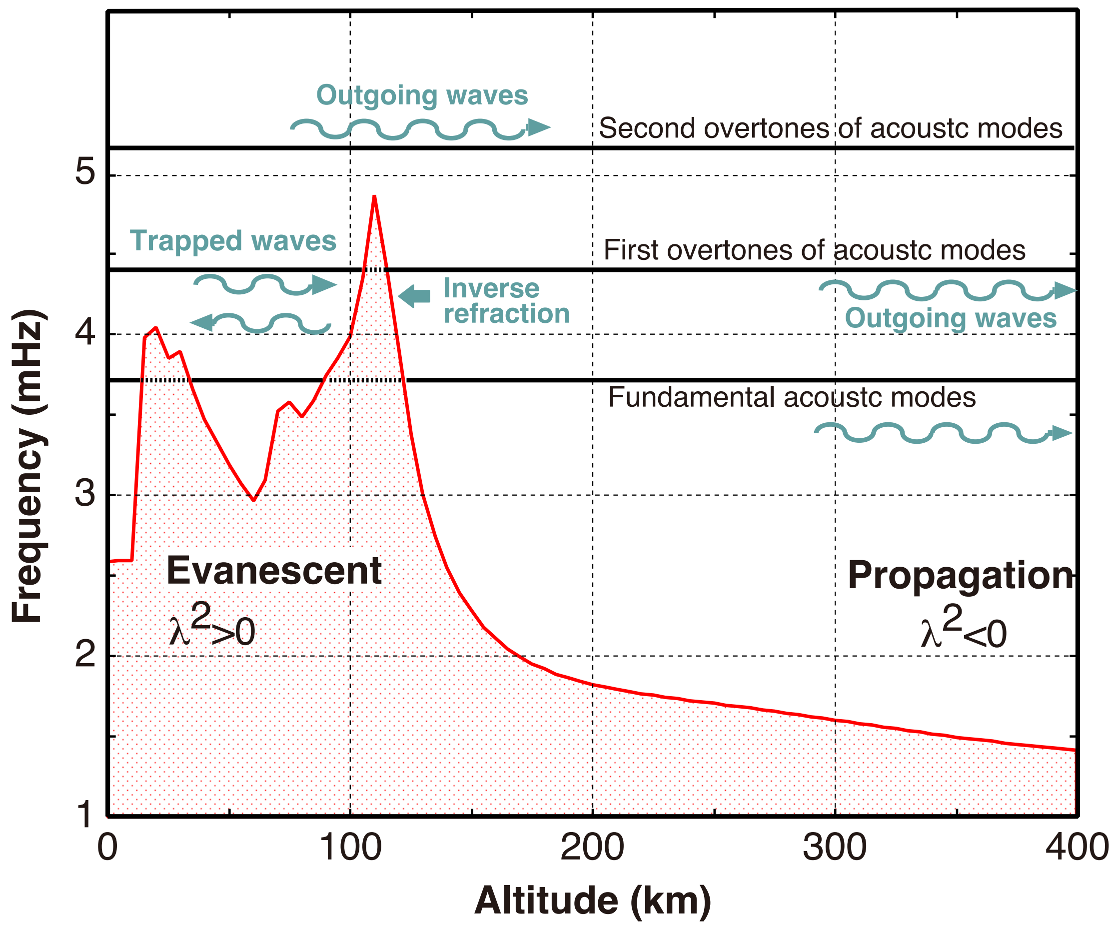


図 9.8　特徴周波数 $\omega_+/2\pi$ の高度分布。計算には、COSPAR INTERNATIONAL REFERENCE ATMOSPHERE: 1986 (CIRA86) model の 6 月の値に基づいて計算した水平波数に対応する、球面調和関数の l が 29 である場合について計算した。

9.3 参考文献

[1] T. Beer. *Atomspheric waves*. Adam Hilger, London, 1974.

[2] CIRA86: Part II Middle Atmosphere Models. *Adv. Space Res.*, Vol. 10, , 1990.

[3] T.G. Cowling. The non-radial oscillations of polytropic stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, Vol. 101, pp. 369–373, 1941.

[4] F.A. Dahlen and J. Tromp. *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, Princeton, 1998.

[5] Adrian E Gill. *Atmosphere-ocean dynamics*, Vol. 30. Academic press, 1982.

[6] E. E. Gossard and W.H. Hooke. *Waves in The Atmosphere*. Elsevier Amsterdam, 1975.

[7] N Murayama. Pressure waves produced by the nuclear explosion on october 30, 1961-preliminary report. *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II*, Vol. 40, No. 4, pp. 222–231, 1962.

[8] K. Nishida, N. Kobayashi, and Y. Fukao. Background Lamb waves in the Earth's atmosphere. *Geophysical Journal International*, Vol. 196, No. 1, pp. 312–316, November 2014.

[9] Masanori Saito. *DISPER80; a subroutine package for calculation of seismic normal-mode solutions*, pp. 293–319. Acad. Press. San Diego, 1988.

[10] 斎藤正徳. 地震波動論. 東京大学出版会, 2009.

地震波干渉法

第 10 章

10.1 はじめに

地球内部の構造を知るには、地震波の伝わり方が重要な手がかりとなります。これまで、地震の引き起こした地面の震動を観測する事によって、地震波速度構造がイメージングされてきました。2000 年代に入り、地震以外の現象が引き起こすランダムな地面の揺れを調べる事で、地球の内部構造を調べる手法 () が一般的[注 1)]となってきました。この章では、これまで学んだ知識を持とに、の原理について解説していきます。

本解説ではランダムな波動場として、海洋波浪が引き起こす脈動について取り上げます (4.8 章参照)。ランダムな波動場としては、地震のコーダ波 (多重散乱した地震波。詳しくは Sato Fehler and Maeda 2012[(11)] 参照) も重要です。コーダ波を使ったも広く研究されています (例えば Campillo and Paul, 2003)[(2)] が、今回は時間の都合上詳細は述べません。興味がある場合は、前に上げた review 論文や教科書を参照してください。

10.2 地震波干渉法の発展

のアイデアは 1950 年代までさかのぼります。Aki (1957)[(1)] による空間自己相関法 (SPAC 法) のアイデアはの先駆けです。Ocean acoustics の分野では Cox (1973),[(4)] exploration seismology の分野では Claerbout (1968)[(3)] の先駆的が仕事があります。Aki のア

注 1) 最近多くのレビュー論文 (例えば Snieder and Larose (2013)[(15)] や教科書 (例えば、Schuster, (2009)[(21)] Sato, Fehler and Maeda (2012),[(11)] Nakata et al (2019)[(8)] 等をを参照)。
地震波干渉法は、地球だけではなく実験室スケール (e.g., Lobkis and Weaver, 2001)[(6)]、建築構造物 (e.g., Snieder and Wapenaar, 2010),[(14)] 日震学 (e.g., Gizon et al., 2010)[(5)]、海洋音響学 (e.g., Roux and Kuperman, 2004)[(10)] など色々な現象に適応されています。

イデアはしばらくの間注目されませんでした[注 2)]。しかし発表から 26 年後の 1983 年に元北海道大学岡田広らを中心とする研究グループが Aki の手法に注目し (岡田・坂尻, 1983)[(22)]、主に表層付近の地盤特性を調べるための手法 (微動探査, microtremor survey) として盛んに研究されるようになりました。その後微動探査は地表付近のごく浅い構造を推定する際には、標準的と手法なりました。

地震学の分野でが注目されるようになったきっかけの論文は Campillo and Paul, [2003][(2)] です。この論文ではメキシコで発生した地震波を解析しました。地震波記録のなかでも、十分に散乱したコーダ波部分の相互相関を計算することによって、表面波の伝播を抽出できることを示しました。2005 年に Shapiro らは [(13)]、脈動が色々な方向から常に到来しているという事実を逆手に取り、その波の伝わり方からカリフォルニアの地殻構造を推定する事に成功しました。ambient noise tomography と呼ばれる手法です。この研究に続き、北米、日本、中国、ヨーロッパなど、数多くの地域で同種の研究が行われるようになりました。

で基本になる観測量は、2 つの観測点を選び地震波形のです。の波形は、あたかも一方の観測点に震源 (a virtual source) があり、 もう一方の観測点で波形を記録していると解釈できます。ここで図 10.1 を見て見ましょう。松代にある観測点と他の観測点のを示しています。この手法には大きく分けてメリットが 2 つあります。

1 つ目は地震が無い領域でも、仮想的にイベントを置くことが出来ることです。通常地震が無い領域では、地震波速度構造の詳しい地震波速度構造は分からないため、地震を必要としないのは大きなメリットであす。図 10.1 も確かに、あたかも松代が震源であるかのようなの伝播を見て取れます。

2 つ目は地震を待つ必要がない点であす。通常地震波トモグラフィ解析を行うためには、十分な地震データが蓄積されるのを待つ必要があります。では、一定期間観測すれば十分な質のデータを確保することができます[注 3)]。地震を待つ必要が無いという性質は、地震波速度構造の時間変化を調べる上で非常に有利です。地震を使って、微少な地震波速度構造の時間変化を調べるためには、繰り返し同じ場所で地震が起こる (繰り返し地震と呼ばれる) 事を待つ必要があります。しかし、そのような都合の良い地震が起こることは非常に希です。あるペアのを計算し、その時間変化を見ることは、繰り返し同じ場所で起こっている地震の記録を解析する事に相当します。実際、火山や地震に伴う構造の時間変化が盛んに研究されるようになってきたました (例えば Sens-Schönfelder Wegler, 2006[(12)]).

[注 2)] 安芸さんの仕事は博士論文としてまとめられています。自伝によると、ウィナーのサイバネティクス (筑摩文庫，岩波文庫) から着想を得たそうです。博士論文として、理論、観測機器の設計作成、観測、構造の推定まで独力で行いました。コンピュータが普及する前の時代なので、相互相関係数の計算もアナログ回路の設計からしたそうです。当時、東大理学部のグランドで観測を行ったそうで、最後自分でグラウンドを掘って、構造推定の結果を確かめたそうです。

[注 3)] 周波数帯にもよりますが、大雑把な感覚でいうと、0.05-0.5 Hz であれば数ヶ月、それより高周波数だと数日で十分なことが多いです。もちろん、十分な精度を確保するためには長期間の観測の方が有利となります。

ここでは、理論的背景を説明し、の原理について解説していきます。ここの解析事例は、冒頭で挙げた review 論文を参考にしてください。

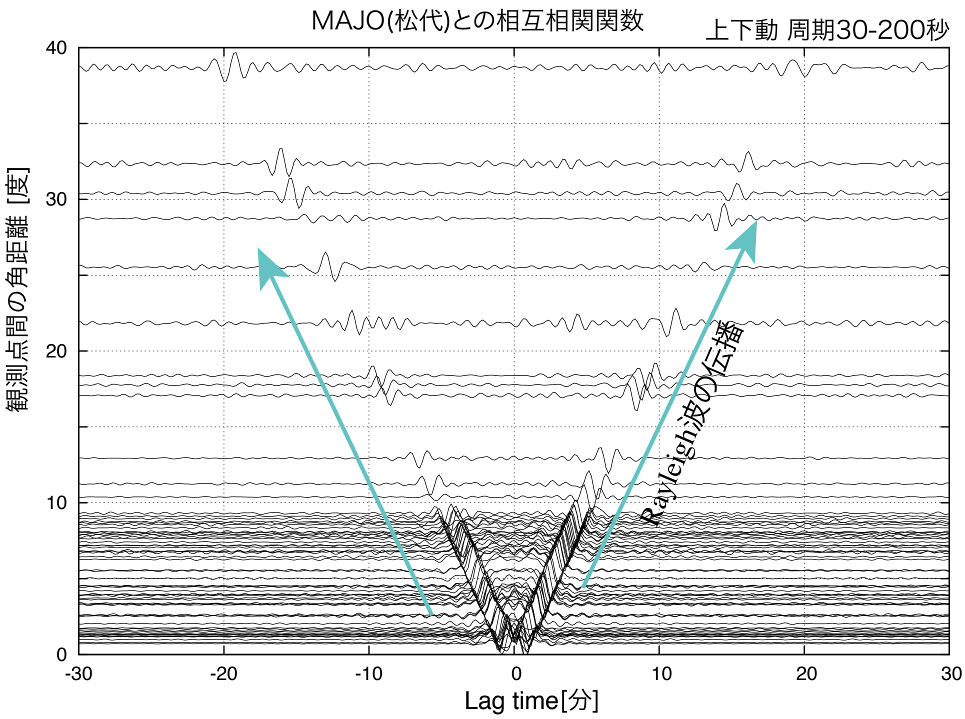


図 10.1　MAJO(松代) と他の観測点間の上下動記録の相互相関関数を観測点間の距離で並べた図。周期 20-200 秒のバンドパスフィルターをかけています。レーリー波の伝播を見て取れます。遅延時間が正の波束を causal part とよび，負の波束を acausal part とよびます。)

Rough Earth Club and Smooth Earth Club

SI brings a reunion of different research fields: ocean acoustic (Cox, 1973), seismic exploration (Claebout, 1968), and seismology (Aki 1957). Surprisingly the ideas were proposed independently and simultaneously.

Even in the seismological community, there were different cultures: the rough Earth club and smooth Earth club. Keiiti Aki defined them in his letter to V. I. Keilis-Borok, as

> . . . To a geodynamicist, the earth’s property is smoothly varying within bodies bounded by large-scale interfaces. Most seismologists also belong to this “smooth earth club” because once you start with an initial model of smooth earth, your data usually do not require the addition of small-scale heterogeneity to your initial model. As summarized well in a recent book by Sato and Fehler (1998), the acceptance of coda waves in the data set is needed for the acceptance of small-scale seismic heterogeneity of the lithosphere. There is an increasing number of seismologists who accept it,

> forming the “rough earth club.” I believe that you are also a member of the rough earth club, judging from the emphasis on the hierarchical heterogeneity of the lithosphere. . .

(“Seismology of Earthquake and Volcanic Prediction”, Lecture notes, Aki 2003). Seismic wavefield above 1 Hz was a territory of the “rough Earth club,” whereas that below 0.1 Hz was a territory of the “smooth Earth club.” The members of the rough Earth club are familiar with stochastic treatments of the seismic wavefield. The recent development of SI means a reunion between the “rough Earth club” and the “smooth Earth club.”

The dominant frequency of microseisms at around 0.2 Hz corresponds to the gap between ”*rough Earth club*” and ”*smooth Earth club*”. SI enables us to utilize coherent signals from random seismic wavefields with an assumption of stochastic stationary excitation. Although surface wave tomography was a tool of the ”smooth Earth club,” SI broke the gap. Scattering due to strong lateral heterogeneities in the crust and the sediment was a big barrier for ”*smooth Earth club*.” When we apply SI, the scatterer is important because it enhances the randomness. SI plays a complementary role in the ”smooth Earth club.” This role of SI is true of other communities, such as seismic exploration, acoustic, physical oceanography, and so on.

In this lecture, the next chapter explains the excitation mechanism of microseisms by ocean swell. The next chapter explains the basic principle of SI with a demonstration using a WEB application. Then the last chapter explains some applications, which are done by our group mainly.

10.3 地震波干渉法の理論的背景: 閉じた系の場合

の理論を理解するため単純な場合を考えてみましょう。[注 4)]。

まず最初に、相互相関関数の定義をおさらいします。ウェブアプリを作ったので (http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/knishida/Seismology/wave2Drandom2.html) 適宜実行しながら読むと分かりやすいと思います。

10.3.1 相互相関関数

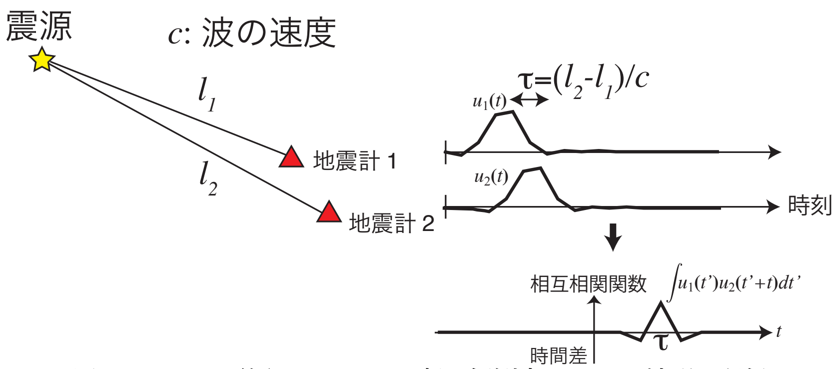


図 10.2　ある震源でイベントが起き観測点 1 と 2 で波形が記録された時に、そのは到達走時差を表す。

過渡的な現象 (地震や火山の噴火) を考える。図 10.2 のようにある位置で地震が起きたことを考えます。観測点 1 と 2 の地震計記録に対して ϕ_{12} を

$$\phi_{12}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_1(\tau) u_2(t+\tau) d\tau. \tag{10.1}$$

のように定義します。は $|t|$ が大きくなると十分速く 0 に収束すると仮定するとそのフーリエ変換 $\Phi_{12}(\omega)$ を

$$\Phi_{12}(\omega) = \langle U_1^*(\omega) U_2(\omega) \rangle \tag{10.2}$$

と定義出来ます[注 5)]。その場合、観測点 2 は観測点 1 より τ 秒だけ遅れて波が到達する (図 10.2 右)。その場合は $t=\tau$ にピークをもつ。つまり、のピークの時刻を読むことに

注 4) 理論的な取り扱いを大局的に理解するには、Snieder et al. (2010)[16] がお勧め。

注 5) 正確には、定常過程を考える場合には、長時間の積分をアンサンブル平均で近似しています。定常的に波動場が励起されていると仮定しているので、$u_i(t)$ は自乗可積分とはならないので、通常の意味でフーリエ変換は出来ません。より厳密に理解したい場合は時系列解析の参考書などを参照してください。

よって、地震波到達時刻の差 (走時差) を読むことができます。実際精密に震源位置を決定するために、による精密な走時差の測定は良く利用されます。

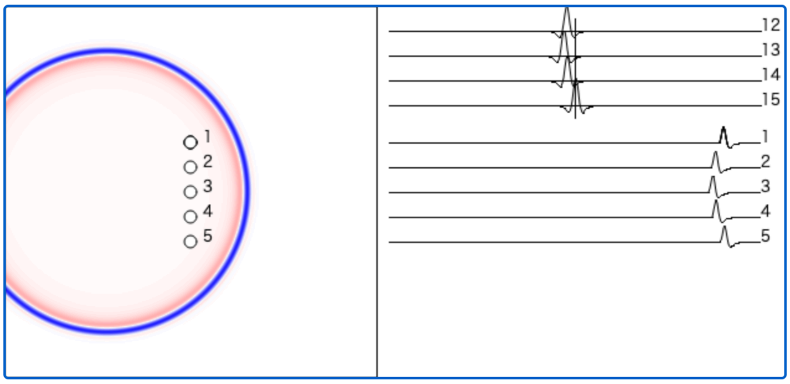


図 10.3　点震源を置きシミュレーションした結果の例。右下の図は、観測点 1 から 5 で観測された波形を表し、右上はその相互相関関数を表す。

ウェブアプリでは、クリックすると震源を任意の場所に置くことが出来、s を押すとシミュレーションが始まります。右下に観測点 1-5 での波形を、右上にその (例えば 14 は 1 と 4 の) が表示されます。のピークの時刻を読み取ることによって走時差を測定することが出来ます。色々試してみてください。

以後は過渡的な現象 (地震や火山の噴火) ではなく、微動や脈動など統計的にランダムかつ定常と近似できる現象について考えていきます。

10.3.2 閉じた系の場合

を理論的に考える上で、normal mode のアプローチは抽象的ですが本質を捉えており、のアイデアを理解しやすいという利点があります (例えば Lobkis and Weaver, 2001[(6)])。そこで、まずは normal mode のアプローチで考えていきます。

弾性体が有限な大きさを持つ仮定は、地球が有限サイズを持つことを考えると、自然な仮定である事が分かります。ここでは簡単のため 1 次元周期境界の問題を考えますが、normal mode の議論をそのまま 2 次元、3 次元へと適応することができます。

繰り返し試行

仮想的に、実験室で繰り返し実験している状況を考えます。$t = 0$ より前では弾性体は静止しており、時刻 $t = 0$ で弦に対してランダムな力を $f^k(t, x)$ の力を加えます。力を加えた後に、弦の振幅を測定するという実験を考えます。このような操作を k_0 回繰り返し

ます。[注 6)]。

ランダムな力による励起の問題を normal mode のアプローチで考えていきます。$t = 0$ に $\delta(t)f(x)$ という力がかかっている場合を考えます。この場合に運動方程式は

$$\rho\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2} = \kappa\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2} + f(x)\delta(t) \tag{10.3}$$

となります。

を使って外力 f に対する変位の応答を考えていきましょう。8 章式 8.15 から、$t \geq 0$ での Green 関数は固有関数 u_n と固有周波数 ω_n を使って

$$G(x, x'; t) = \sum_n \frac{u_n(x)u_n(x')}{\omega_n}\sin\omega t, \tag{10.4}$$

と書くことができます。k 回目の試行での外力 f^k に対する弦の励起振幅 $u^k(x,t)$ $(t \geq 0)$ を求めるためには、外力 f を Green 関数で畳み込むと

$$u^k(x,t) = \sum_n \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}u_n(x)\int u_n(x')f^k(x')dx', \tag{10.5}$$

となります。ここで $A_n^k \equiv \int u_n(x')f^k(x')dx'$ と定義すると

$$u^k(x,t) = \sum_n A_n^k u_n(x)\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}, \tag{10.6}$$

という形で変位応答を書くことができます。

白色雑音 (white noise)

ここではランダムに加えられた外力 f について考えていきます。今外力は、あらゆる波数成分を等しく含んでいる不規則変動だと定義しましょう。このような性質を持つことを白色雑音とよ呼びます[注 7)]。そのためにそのパワースペクトル $\Phi(f)$ は一定 const となります。

もう少し具体的に考えていきましょう。Figure 10.4 の左の図を見てください。いま空間間隔 Δt で離散化された外力 $f^k(i\Delta t)$ を考えます。各時刻 $i\Delta$ t で、ランダムにサイコロを振り (平均 0 分散 1 の正規分布に従うとします)。ここで自己相関関数 $\phi($ t , t$')$ を考えてみましょう。

$$\phi(t,t') = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f^k(t')f^k(t' + \text{t}\ ) \tag{10.7}$$

注 6) 厳密に言うと、アンサンブル平均をとって期待値をとることと、最初に定義したような時間積分による相互相関は一致するとは限りません (エルゴート性)。

注 7) 太陽光のアナロジーです。一般に白色はあらゆる周波数成分を含む事を、赤色は低周波に富む事、青色は等は周に富むことを意味します。

と自己相関関数を定義します。いま 2 点間の位置が $\Delta t\ /2$ だけ離れたら、外力に相関では全く相関がないことを仮定します。そうすると ϕ は $t - t'$ だけの関数となり、$\xi \equiv t - t'$ とすると

$$\phi(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| \le \Delta t \\ 0 & else \end{cases} \tag{10.8}$$

となります。$\phi(\xi)$ フーリエ級数展開すると、$\Phi(\omega_n) = \Delta t$ となります。ここで ω_n は角波数 $2n\pi/L$ です。パワースペクトル (片側スペクトル) は $2\Delta t$ となります (図 10.4)。

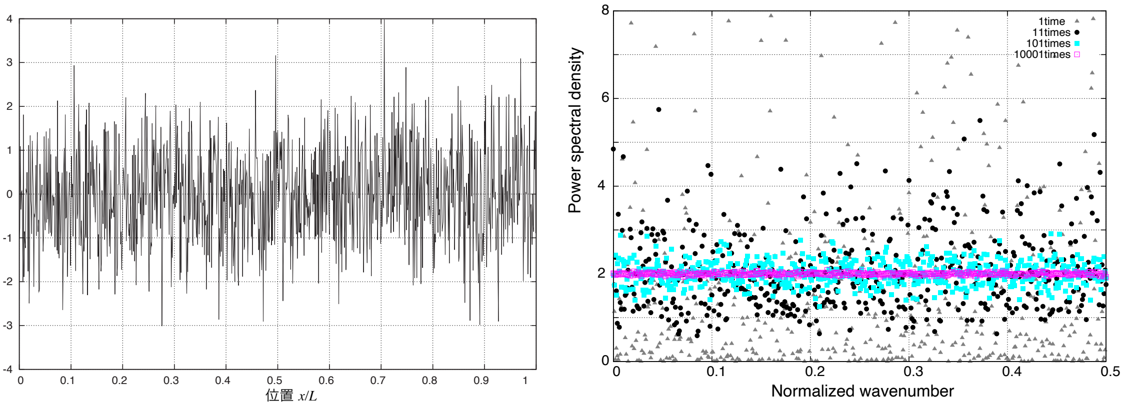


図 10.4　図左: 白色雑音の特徴を持つ外力 $f^k(x)$。図右: スペクトルをとりパワースペクトルを計算した結果。アンサンブル平均をとる数を増やす毎に、推定値は 1 に近づいていく。

理論的な事は計算できました。では実際に数値データを作り計算してみたらどうなるでしょうか？ 乱数を使い白色雑音を生成し、フーリエ解析してみましょう。

まずは切り出したウィンドウ 1 つを考えてみましょう。波数 k_n でのフーリエスペクトルを考えてみましょう[注 8)]。$f(x_k)$ は乱数なので、そのフーリエ成分 $F(k)$ も乱数になります。パワースペクトルは $|\ U(k)\ |^2$ で計算出来るため、一定の値を足らずランダムな値を取ります[注 9)]図 10.4 右のグレーの点が実際に計算した点です。これは少し奇妙です。$\Phi(f) = 1$ となるはずが 1 回離散フーリエ変換するだけでは、2 と同じ桁という程度のことしか分かりません。何故でしょうか？

それは自己相関関数が統計的な量なためです。多くのアンサンブルに対して平均を (ここでは k がアンサンブルの要素に対応付けた番号です) 取らないと意味のある値になりま

注 8) 実際に計算するには空間的に離散化する必要があり離散フーリエ変換する必要があります。離散フーリエ変換とフーリエ級数展開の整合性をとると

$$F(k_n) = \Delta x \sum_{j=0}^{N} f(x_j) e^{-i2\pi k_n x_j} = \delta F^{DFT}(k_n), \tag{10.9}$$

となります。

注 9) 正確には χ^2 分布に従います。

せん。より具体的に言うと推定誤差が 100% となってしまいます。一見とても奇妙ですが、この振る舞いは統計的に 1 サンプルのみを評価していることに起因します。

そこで何度もフーリエ級数展開をしてアンサンブル平均をとってみましょう。段々と 2 に近づいていくことがわかると思います[注 10)]。このようにパワースペクトルとるはあくまで統計的な量なため、十分な数だけ平均化しないと推定誤差が大きくなりすぎてしまいます。例えば N 回サンプリングして平均化した場合を考えてみましょう。時系列が正規分布に従う場合推定誤差は $1/\sqrt{N}$ となります。このように誤差が N にしたがって小さくなっていく様子も、図から見て取れます。

エネルギーの分配

外力のした仕事がどのようにエネルギー分配されているか考えていきましょう。速度は

$$\frac{\partial u^k(x,t)}{\partial t} = \sum_n A_n^k u_n(x)\cos(\omega_n t), \tag{10.10}$$

モードあたりの運動エネルギー T_n は ρu_n をかけて空間積分すればよく

$$T_n = \frac{1}{2}(A_n^k)^2\cos^2(\omega_n t) \tag{10.11}$$

となることが分かります。一方弾性エネルギー V_n は歪の固有関数 $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ を両辺にかけて空間積分すると評価でき

$$T_n = \frac{1}{2}(A_n^k)^2\sin^2(\omega_n t) \tag{10.12}$$

全エネルギー $T+V$ は

$$T+V = (A_n^k)^2 \tag{10.13}$$

で評価できることが分かります。つまり白色の特徴をもつ外力 f で叩くと、各モードにエネルギーの期待値 $\langle (A_n^k)^2\rangle_k$ は一定となります。この条件が満たされるとき、エネルギーが当分配 (equipartition of energy) されていると呼ぶことにします。

相互相関関数

ここで $u^k(x_1)$ と $u^k(x_2)$ の $\phi^k(x_1,x_2;\tau)$ を考え、を

$$\phi^k(x_1,x_2;\tau) \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u^k(x_1,t)u^k(x_2,t+\tau)dt, \tag{10.14}$$

と定義します。

k_0 回試行した後そのアンサンブル平均 $\phi(x_1,x_2;t)$ を

$$\phi(x_1,x_2;\tau) \equiv \left\langle \phi^k(x_1,x_2;\tau)\right\rangle_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\phi^k(x_1,x_2;\tau) \tag{10.15}$$

注 10) 確認ですが、今時間領域で分散 1 の時系列を考えています。Percival の公式からパワースペクトルの積分は 2×0.5 となり一致します。

とします。ここで今後は簡単化のため $\langle\rangle_k$ は k に関するアンサンブル平均を表すことにします。

いま白色な特徴を持つランダムな力で叩いているため、各モードのエネルギー (弾性エネルギーと運動エネルギーの和 $T+V$) が等しく分配され、それぞれの変動 (振幅 A_n) が無相関です。A_n の相互相関の期待値は以下のように書くことが出来ます。

$$\langle A_m A_n \rangle \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_m^k A_n^k = \delta_{mn}\mathcal{E}. \tag{10.16}$$

となります。

簡単な計算の後

$$\begin{aligned}\phi(x_1, x_2; \tau) &\equiv \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left\langle u(x_1; t) u(x_; t+\tau) \right\rangle dt \\ &= \sum_n \frac{\mathcal{E}}{2\omega_n^2} u_n(x_1) u_n(x_2) \cos(\omega\tau) \end{aligned} \tag{10.17}$$

と書けます。の微分とを結びつける式を導出した。また、この式を式変形し相互相関の微分の形、

$$\frac{d}{d\tau}\phi(x_1, x_2; \tau) = -\frac{\mathcal{E}}{2}(G(x_1, x_2; \tau) - G(x_2, x_1; -\tau)), \tag{10.18}$$

に変形でき、オープンな系の場合と比較することが出来る[注 11)]。

現実のと比較する場合、一番大きな問題点は、エネルギー当分配の仮定です。球対称地球のを考える場合、地球内部を含め外力が白色の特徴を持つならば、水平方向 (angular order l と azimuthal order m) にはエネルギーの当分配を考えることができます。しかし、励起源が地表付近に集中している状況では、半径方向 (radial order n) にはエネルギーは等分配されません。特に $n=0$ の基本モードが卓越することとなります

また閉じた系で考えているため、減衰を考慮に入れないと、持続的な外力 (海洋波浪など) を考えた場合には振幅が発散してしまう[注 12)]問題があります。この簡単な見積では、繰り返し実験するという (非現実的な) 状況設定なので定常状態を考えていないために発散の問題は起こりません。厳密な議論のためには減衰の効果を考慮する必要があります。

問題 9.1

の具体的な表式を計算し、式 (10.18) を導け。

注 11) normal mode の章で述べたように Green 関数は

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \tau) = \sum_k \frac{u_k(\boldsymbol{x}) u_k(\boldsymbol{x}')}{\omega_k} \sin \omega_k t H(t), \tag{10.19}$$

と書ける。

注 12) オープンな系であれば、境界から外向きのエネルギフラックスと、励起源による仕事の釣り合いを考えることができます。

10.3.3 オープンな系の場合

本節では 2 次元無限媒質中に 2 点観測点がある場合を想定します。単純ですが、表面波を考える上ではかなり良い近似です。また理想的な条件の元では、とを結びつけることができます。[注 13)]

まずは閉じた系の問題設定を素直に拡張し、2 次元平面を考え、$t = 0$ のタイミングでランダムに叩く状況を考えます。を使って考察すると無数に励起源がある状況は、観測点を囲う閉曲線に沿って励起源を分布させることと等価である事が分かります。を考えるときにいくつか違った仮定を用いるのですが、その等価性と違いを理解する事がこの節の目的です。

多数のランダムな励起源がある場合

雨粒が水面を叩いている状況を思い浮かべてみましょう。雨粒のように、まずは 2 次元平面上に無数に励起源が分布している状況を考えてみましょう。ここでも $t = 0$ でランダムな外力が働く状況を、繰り返し観測している事を考えます。

i 番目の励起源 $(i = 0, \cdots, N)$ の力を $\delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_s)\delta(t) f_i^k$ とします。k 番目の試行での変位 $u^k(x,t)$ は

$$u^k(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} g^{2D}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i; t) f_i^k, \tag{10.20}$$

と書けます。ここで $\boldsymbol{r}_i$ は i 番目の励起源の位置を表します。

ここで見通しをよくするために時間に関してフーリエ成分を考えます[注 14)]。

$$U^k(\boldsymbol{r}, \omega) = \sum_{i=0}^{\infty} G^{2D}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i; \omega) f_i^k, \tag{10.21}$$

ここで $t = 0$ 以降に原点ではどのような振幅が観測されるかを考えていきましょう。時刻 t_0 での振幅を考えてみましょう。今 2 次元均質媒質の Green 関数を考えているために、原点から $r = ct_0$ だけ離れた点で励起された波が到着することになります。すなわち半径 r の同心円上に位置する外力が励起した波が一斉に原点に到達することになります。今外力の間隔は平均的に Δx だとします。そうすると半径方向に Δx の幅を考えると、おおよそ $2\pi r/\Delta x$ 個の外力が分布していることになります (図 10.5 左)。振幅の距離減衰はおおよそ $r^{1/2}$ ですので、原点での自乗振幅はおおよそ $2\pi r/\Delta x (r^{1/2})^2 = 2\pi/\Delta x$ となり距離に依存しなくなります。つまり原点には $t > 0$ ずっと同程度の振幅の波が到来し続けることとなります (図 10.5 右)。

注 13) を計算することにより観測点間の波動伝播が抽出されるデモを作成しました。実行しながら読むと理解が深まるかもしれません。http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/knishida/Seismology/wave2Drandom2.html

注 14) 大文字でフーリエ成分を表すことにします。

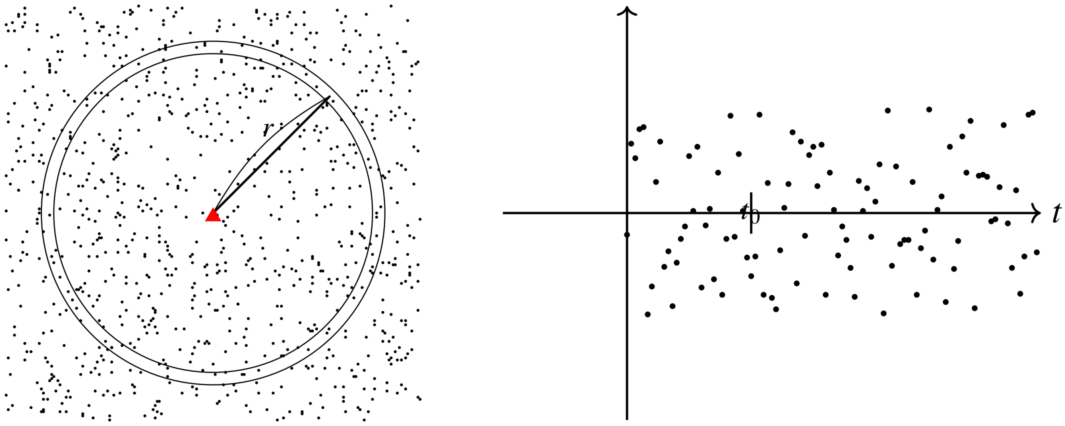


図 10.5　平面内に一様にランダムな励起源が分布している場合の模式図。

ここで、を思い出しましょう。今円内での変位を観測していることとします。この場合に、半径 r の円外に分布する外力によって励起された波は、円上の応力と変位が分かれば、円内の変位分布は完全に再現することができます。つまり、円外の外力の寄与は円上に分布させた外力で置き換えることができます。ただここで気をつけなくてはいけないのは、外力を加えたのは $t = 0$ のタイミングのみですが、円上に仮想的に考える励起源は時間的には $t > 0$ のあいだ励起が続くという点です。今 $t = 0$ で円内の外力も考えていますが、無限に長い時間を考えた場合にその寄与は無限に大きくなるために、円内の外力の効果は無視することができます。つまり、円上のみに外力が分布する場合 (ただし時間的には持続的) と等価であることが分かります。

の web 上のデモ http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/knishida/Seismology/wave2Drandom2.html はこの条件でシミュレーションしています (図 10.6)。

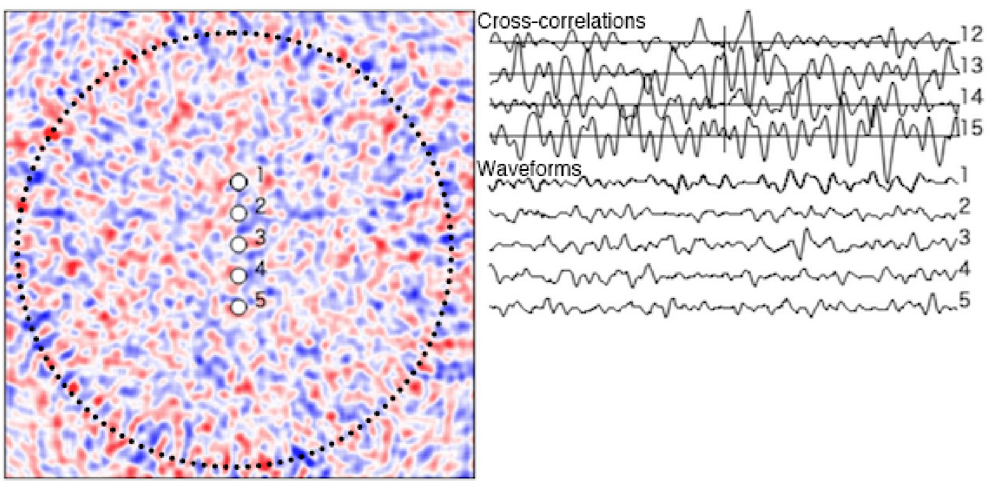


図 10.6　円上にランダムな外力が分布している場合の波動場の例。励起は時間的に持続的である場合を考えています。

ここでは簡単のため、再び時間平均がアンサンブル平均と同じであると仮定します。つ

まり円周上に $F_i^k(\omega)$ の外力が分布しているとします。このような外力による地震波の励起を N 回行って、そのアンサンブル平均を考える状況を考えます。外力 F_i、他の励起源 F_j と互いに無相関であり、F が白色であると仮定すると

$$\langle F_i^{k*} F_j^k \rangle_k = \delta_{ij} F_0^2, \tag{10.22}$$

と書けます[注 15)]。このことからクロス・スペクトル (のフーリエ変換)Φ_{12} は

$$\begin{aligned}\Phi_{12}(\omega) \equiv \langle \Phi_{12}^k \rangle_k &= \sum_{i,j} g^{2D*}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_i, \omega) G^{2D}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_j, \omega) \langle f_i^k(\omega) f_j^k(\omega) \rangle_k \\ &= \sum_i G^{2D*}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_i, \omega) G^{2D}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_i, \omega) F_0^2 \end{aligned} \tag{10.23}$$

と書くことが出来ます。

励起源の数が十分に大きいと、励起源が観測点を囲んでいる場合には上式の和は線積分で置き換えられ、

$$\Phi_{12} = f_0^2 \int_{l_s} G^{2D*}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_s, \omega) G^{2D}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_s, \omega) dl_s, \tag{10.24}$$

と書ける。グリーン関数の畳み込み積分を空間で積分している形になっています。この式がにおける基本式です。

積分の評価: 相互相関関数と Green 関数の関係

この積分を評価するために、図 10.7 のような励起源の配置を考えます。励起源の位置は原点からの距離 r_s と角度 ϕ_s で表現します。

単純化のためが $e^{ikr-\pi/4}/\sqrt{kr}$ に比例すると近似します。この近似は距離 r が波長に比べて長いときには妥当な近似です[注 16)]。そうすると

$$\Phi_{12} \propto \int_{l_s} \frac{e^{ik(r_{2s}-r_{1s})}}{k\sqrt{r_{1s} r_{2s}}} dl_s, \tag{10.25}$$

r_{1s}, r_{2s} は図 10.7 にあるように観測点 1$\boldsymbol{r}_1$, 観測点 2$\boldsymbol{r}_2$ と励起源 $\boldsymbol{r}_s$ の間の距離です。式にあるように、点震源 $\boldsymbol{r}_s$ から放射される波の観測点 1 と 2 とでの位相差は、距離の差を波長で割った値できまります。等位相差の曲線は観測点を焦点とする双曲線となります。そ

注 15) $langle\rangle_k$ は k に関してアンサンブル平均を取った事を表すことにします

注 16) Green 関数は具体的には

$$G^{2D}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{H\left(t - \frac{r}{c}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}},$$

周波数領域では、

$$G^{2D}(\boldsymbol{r}, \omega) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(\omega r/c) \propto \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{ikr-\pi/4},$$

と書けます。ここで波数 k は $k \equiv \omega/c$ と定義され、$H_0^{(2)}$ 第 2 種ハンケル関数である, $H()$ は Heviside の階段関数です。

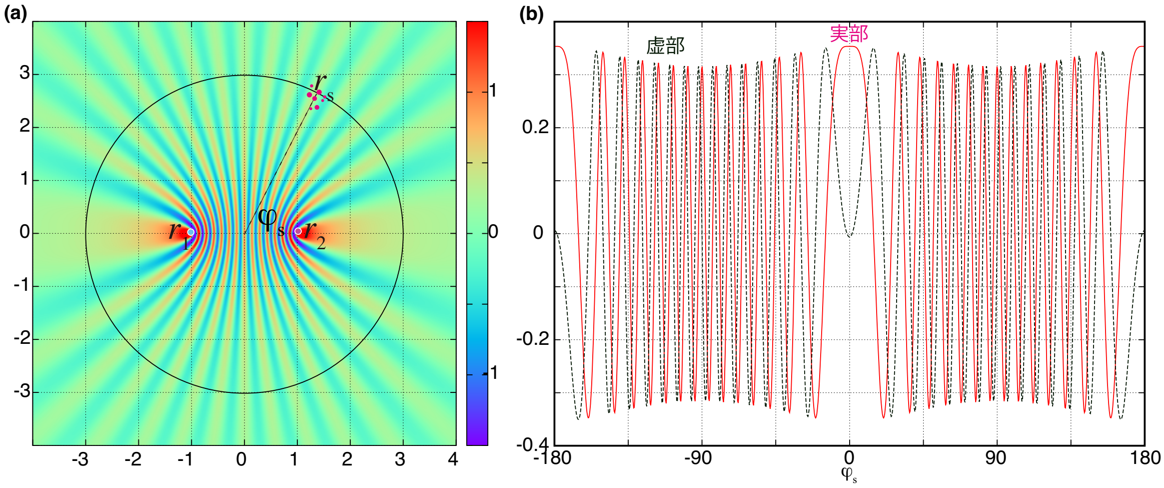


図 10.7　(a) r_s を固定し ϕ_s に対し被積分関数をプロットした図。(b) は $r_s = 3$ の円 (図 10.7(a) 参照) に沿った値をプロットした図。

うすると、2 観測点を通るパスに沿っては位相の変化は緩やかとなり (停留点, stationary point)、その他の領域では激しく振動します (図 10.7)。ランダムな励起の問題を考える場合、二観測点間を通るパスに沿った励起源の寄与 (stationary zone と呼ばれる) が大きくなり、その他の領域の励起源の影響は打ち消されます (停留値法, 例えば蓬田 2007 参照)。また虚部は ϕ_s に対して反対称となっているため、励起源の分布が一様の場合には打ち消される[注 17)]。

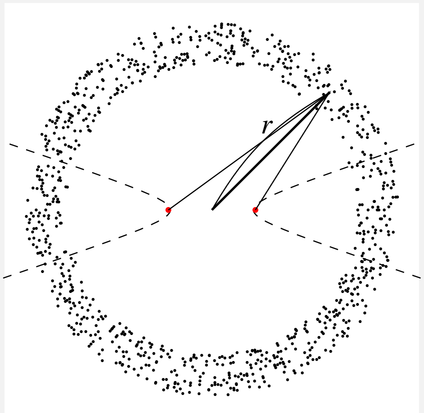
以下少し視点を変えて、もう少し直感的な説明を試みます。図 10.7 赤点で書いたようにランダムな励起源がある限られた領域に分布しているとき、十分に遠くで観測する場合多重極 (mono pole, dipole, quadrapole 等) の重ね合わせで表現できます (多重局展開と呼ばれる)。ψ_s が図にあるように 70° 程度の場合を考えます。この場合、2 観測点の間に節が入る確率はランダムです。そのために、r_s からでた波が 2 つの観測点で同位相である確率と逆位相である確率は等しくなります。一方 ϕ_s が 0 か π の時には (stationary zone の場合)、励起源から見て 2 つの観測点の方向は同じため常に r_s から出る波は同位相となります。つまり stationary zone に励起源がある場合のみ、相互相関波形に寄与します。

注 17) 被積分関数が激しく振動する性質は重要です。なぜなら、一様に励起源が分布していない場合にも、stationary zone の寄与が卓越することが期待されるためです。励起源の分布に対して、の波形がロバストである性質は、データ解析上重要な点です。

問題 9.2

以上周波数領域で評価たが、相互相関波形の形を理解するために時間領域で考える。ここでは数のような状況をかんがえる。周波数領域で $G^{2D*}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_s, \omega) * G^{2D}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_s, \omega)$ と書いた項は時間領域 (フーリエ逆変換すると) グリーン関数の畳み込み積分で表現できる。

1. 図でしめした位置で外力を加えたとき、を計算せよ。
2. 図で示した円周上に体力が分布していることを考える。(1) で計算したを角度方向に平均し、を評価せよ。ここで、図中双曲線の内側にある外力の寄与が多きことに注意せよ。
3. がピーク値を取る時刻と、観測手間の距離の関係を考察せよ。



以上大雑把に積分の寄与を見積もりました。ここで Wapenaar and Fokkema (2006)[19] に従い u が l_s 上で

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -iku \tag{10.26}$$

という放射境界条件を満たすとして、もう少し考察していきます。Rayleigh の相反定理と合わせて考えると

$$\Phi_{12} = f_0^2 \int_{l_s} G^{2D*}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_s, \omega) G^{2D}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_s, \omega) dl_s, \tag{10.27}$$

$$\sim f_0^2 \frac{\rho c}{2i\omega} \left(G^{2D*}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1, \omega) - G^{2D}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \omega) \right) \tag{10.28}$$

と、とを結び付けられれます[注 18)]。の微分が、Green 関数に比例する形式になっています[注 19)]。

注 18) 詳細は Wapenaar and Fokkema (2006)[19] 参照

注 19) Aki (1957) の spatial autocorrelation method (SPAC 法) では、遠方から平面波がランダムに入射している事を仮定して議論しています。大枠としては、この章の議論に近いが詳細は異なります。例えば 2 次元の場合 SPAC 法に準拠すると (Nakahara 2006 参照)[7]、のがとなります。これは遠方から入射する波が、Green 関数と平面波 $\exp\{i(\omega t - \boldsymbol{k}\dot{x})\}$ と違うことに起因します。

ここで重要なのは、ここでは減衰を考慮していないという点と、放射境界条件をとっているために地表反射等の自由境界表面を考慮できないという点です。現実の状況設定を考えると、注目している領域を囲む形で地中にも励起源が分布していないと Green 関数とは解釈できません。そのため現実のは、(大雑把に言って地震記録) に比べ、実体波の振幅が小さくなります。実体波特に地表反射を上手く抽出できないという問題点は、コーダは (例えば Tonegawa et al., 2009)[17] ある程度回避することができます。

問題 9.3

の web 上のデモ http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/knishida/Seismology/wave2Drandom2.html を実行して、波が伝播するとこを確認し、理論との対応を考察すること。

10.3.4 現実的な定常状態: 減衰のある場合

系に対する入力 (励起源による仕事) と減衰によるエネルギーの散逸の釣り合いを考えることで、定常振幅を見積もってみましょう。ここでは単純化のために一次元の問題を考えます。運動方程式は、変位 u, 密度 ρ, 応力 σ, 外力 F を使って

$$-\rho\omega^2 U(x,\omega) = \frac{\partial \sigma(x,\omega)}{\partial x} + F(x,\omega) \tag{10.29}$$

とかけます。

応力 $\sigma(x,\omega)$ は歪み $\epsilon = \partial U/\partial x$ を使って

$$\sigma(x,\omega) = \kappa(\omega)\epsilon(x,\omega) \tag{10.30}$$

と書けるとします。ここで κ は複素弾性定数とし、減衰を含めて考えます。式 10.30 を式 10.29 に代入すると、

$$\rho\omega^2 U(x,\omega) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(\omega)\frac{\partial U(x,\omega)}{\partial x}\right) + F(x,\omega) \tag{10.31}$$

となります。

周期境界条件の場合の問題を考えます。変位 $u(t,x)$ が周期境界条件、$u(t,x) = u(t,x+L)$ を満たすとします。

$$-\rho\omega^2 U(x,\omega) = \kappa(\omega)\frac{\partial^2 u(x,\omega)}{\partial x^2} + F(x,\omega) \tag{10.32}$$

ここで $F(x,\omega)$ は forcing term です。

U と F を固有関数 $u_n(x)$ で展開すると

$$U(x,\omega) = \sum_n a_n(\omega)u_n(x)$$
$$F(x,\omega) = \sum_n f_n(\omega)u_n(x). \tag{10.33}$$

となります。そうすると複素固有値を $-k_n$ とすると

$$-\omega^2 a_n = -\kappa(\omega)k_n^2 a_n(\omega) + F_n(\omega) \tag{10.34}$$

とります。ここで簡単化のため複素固有周波数 $\omega_n^2 \equiv \kappa k_n/\rho$ を定義します。以上まとめると、

$$a_n(\omega) = -\frac{f_n(\omega)}{\omega^2 - \omega_n^2} \tag{10.35}$$

となります。

ここで、cross spectrum $\langle U^*(\omega,x_1), U(\omega,x_2)\rangle$ を考えます。

$$\langle U^*(\omega,x_1), U(\omega,x_2)\rangle = \sum_{n,n'} \langle a_n^* a_{n'}\rangle u_n^*(x_1)u_{n'}(x_2). \tag{10.36}$$

この式を評価するために $\langle a_n^* a_{n'}\rangle$ を評価します。ここで forcing がホワイトだと仮定すると、

$$\langle F_n^* F_{n'}\rangle = F_0^2\delta_{n,n'} \tag{10.37}$$

と書けます。すなわち、

$$\langle U_n^* U_{n'}\rangle = \frac{F_0^2}{(\omega^2-\omega_n^2)(\omega^2-\omega_n^{*2})}\delta_{n,n'} \tag{10.38}$$

と書き直せ、クロススペクトル $\Phi(\omega,x_1,x_2) = \langle U^*(\omega,x_1), U(\omega,x_2)\rangle$ は

$$\Phi(x_1,x_2,\omega,) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_0^2}{(\omega^2-\omega_n^2)(\omega^2-\omega_n^{*2})} u_n(x_1)u_n^*(x_2) \tag{10.39}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_0^2}{2\,\mathrm{Im}[\omega_n^2]} \left(\frac{1}{\omega^2-\omega_n^2} - \frac{1}{\omega^2-\omega_n^{*2}}\right) u_n(x_1)u_n^*(x_2) \tag{10.40}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_0^2 Q_n}{2(\omega_n)^2} \left(\frac{1}{\omega^2-\omega_n^2} - \frac{1}{\omega^2-\omega_n^{*2}}\right) u_n(x_1)u_n^*(x_2) \tag{10.41}$$

と書き直せます。ここで $\omega_n \sim \mathrm{Re}\{\omega_n\} + i\,\mathrm{Re}\{\omega_n\}/(2Q_n)$ としました。ざっと式を見ると k_l に対して $\pm\omega_n$ の値で極大をとります。つまり x が正の方向に伝搬する波束 (causal part) と、負の方向に伝播する波束 (causal part) を表しています。

エネルギーがどのように分配しているか見ていきましょう。単位長さあたりの運動エネルギーは $\omega^2\rho\Phi(x,x,\omega)$ となるため、全エネルギーは

$$\int \omega^2\rho\Phi(x,x,\omega)dx \sim \sum_n \frac{F_0^2 Q_n}{\omega_n} \tag{10.42}$$

と見積もることが出来ます。つまり外力が白色雑音出会った場合にも、モードあたりのエネルギーは周波数に反比例し、Q_n に比例します。つまり $F_0^2 \sim \omega_n/Q_n$ となって初めてエネルギーは等分配されます。このため現実の地球はエネルギーは等分配されているわけではなく、その点を考慮する必要があります。

式 10.38 でモード間の相関が無いという点が本質的です。励起源の空間分布が不均質な場合にはモード間の相関が出てしまい、の評価は難しくなります。現象論的には、多くの場合モード間に相関が無いという仮定は第 0 次近似としては成り立っているように見えます。そこからの補正をどうするか、現在盛んに研究されています。

より 3 次元弾性体に対する見積もりは Nishida (2011) などを参照のこと。

まとめ: Green 関数と相互相関の比較

1. の理論は大きく分けて、オープンな系で外部を包むように内部を照らす状況設定と、閉じた系にたいし釣り合いを考える立場がある。色々なバックグラウンド (物理探査、グローバル地震学、強震動) の研究者がいるために、問題の取り扱い方が分野によって微妙に異なる。例えば equipartition という単語一つとっても文脈によって定義が統一されていないので注意が必要 (Snieder et al. 2010)[16]。
2. 表面波のみ議論するときはとの比較が可能。ある程度励起にむらがあっても、観測点間の情報を抽出することが可能。
3. 実体波の相対振幅は、よりの方が小さいと期待される。
4. とくに相互相関により地表反射波を抽出することは難しい。

まとめ: 脈動の相互相関解析の強みと弱み

1. ∘ 伝搬距離が短いパスの情報を使える。
2. ∘ 0.05 Hz よりも短周期でも、散乱や 減衰の効果を受けづらい。
3. × 励起源の分布に偏りがあると、見かけの走時異常が生じる可能性がある。

まとめ: Ambient noise tomography の強みと弱み

1. ∘ パスが震源分布に依存せず、 パス密度に偏りが少ない。
2. ∘ アレー観測の場合には、良い初期モデル (局所的 1 次元構造) を推定することが可能。
3. × 励起源の分布に偏りがあると、見かけの走時異常が生じる可能性がある。特に方位異方性の推定や、減衰構造の推定に際して深刻。

ToDO: バネおもりモデルを使った地震は干渉法とブラウン運動の関係

10.4 モニタリング

地球内部で起こる現象のダイナミクスを考える上で、速度構造の時間変化を捉える事は非常に重要です。火山噴火や地震に伴い応力やひずみの状態が変化し、それに伴って速度構造や異方性の変化することが期待されるためです。

実際に地下構造の時間変化を求めようとする場合、コントロールソースを用いて繰り返し地震波トモグラフィを繰り返す事が想的です。しかし多くの場合現実的ではありません。一方自然地震を使う場合、震源の不確定性や震源分布の偏りなどに起因する不確定性が速度構造の不確定性を引き起こします。そのため、たとえ時間変化が見かけ上見えたとしても、それはただのノイズなのか本当の速度変化なのかはっきりとしません。

それに対し、地下構造の時間変化を検出する場合には非常に有効な方法です。なぜなら、期間を区切ってを計算することによって、仮想的に繰り返し地震を観測出来るためです。最も単純な例を考えてみましょう。地表宇野 2 点で地震観測をし、その記録のの変化を見続けます。この場合には、その 2 点間の局在化された構造変化を時々刻々モニターすることができます。ここでは詳細については述べませんが、先駆的な研究として、 Sens-Schönfelder Wegler (2006) (インドネシアの Merapi 火山) や Wegler and Sens-Schönfelder (2007) (中越地震の解析) がある。

10.5 実際のデータ適応時の問題点

10.5.1 入射波振幅の方位依存性

入射波振幅の方位依存性を考えるために、Cox の式 [4]

$$\sum_{m=0}^{\infty} i^m J_m\left(\frac{\omega r}{c(\omega)}\right)\left[a_m(\omega)\cos(m\zeta)+b_m(\omega)\sin(m\zeta)\right] \tag{10.43}$$

を考えます。

この場合に走時異常は

$$\begin{aligned}\delta t &= \frac{B''(0)}{2t\omega^2 B(0)}\text{for the causal part}\\ &= \frac{B''(180)}{2t\omega^2 B(180)}\text{for the acausal part}\end{aligned} \tag{10.44}$$

と書くことが出来ます (Weaver et al., 2009)[20]。この式を使って、入射波の非等方性を補正する事が可能です。

10.5.2 有限波長カーネル

を適応する場合には、通常の地震と同じ sensitivity kernel を考慮すれば良いのか自明ではありません [18]。励起源が等方均質の場合に、表面波の sensitivity kernel は地震と同じである事は分かっていますが [9]、励起源にむらがある場合には厳密には補正が必要です。

10.6 参考文献

[1] Keiiti Aki. Space and time spectra of stationary stochastic waves, with special reference to microseisms. *Bull. Earthq. Res. Inst.*, Vol. 35, pp. 415–457, 1957.

[2] Michel Campillo and Anne Paul. Long-range correlations in the diffuse seismic coda. *Science*, Vol. 299, No. 5606, pp. 547–549, January 2003.

[3] Jon F Claerbout. SYNTHESIS OF a LAYERED MEDIUM FROM ITS ACOUSTIC TRANSMISSION RESPONSE. *Geophysics*, Vol. 33, No. 2, pp. 264–269, April 1968.

[4] Henry Cox. Spatial correlation in arbitrary noise fields with application to ambient sea noise. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 54, No. 5, pp. 1289–1301, 1973.

[5] Laurent Gizon, Aaron C Birch, and Henk C Spruit. Local helioseismology: Three-Dimensional imaging of the solar interior. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, Vol. 48, No. 1, pp. 289–338, August 2010.

[6] Oleg I Lobkis and Richard L Weaver. On the emergence of the green's function in the correlations of a diffuse field. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 110, No. 6, p. 3011, 2001.

[7] Hisashi Nakahara. A systematic study of theoretical relations between spatial correlation and green's function in one-, two- and three-dimensional random scalar wavefields. *Geophys. J. Int.*, Vol. 165, No. 3, pp. 1097–1105, December 2006.

[8] Nori Nakata, Lucia Gualtieri, and Andreas Fichtner. *Seismic Ambient Noise*. Cambridge University Press, March 2019.

[9] Kiwamu Nishida. Two-dimensional sensitivity kernels for cross-correlation functions of background surface waves. *C. R. Geosci.*, Vol. 343, No. 8-9, pp. 584–590, September 2011.

[10] Philippe Roux and W A Kuperman. Extracting coherent wave fronts from acoustic ambient noise in the ocean. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 116, No. 4, pp. 1995–2003, October 2004.

[11] H Sato, M C Fehler, and T Maeda. *Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth*. Springer, 2012.

[12] C Sens-Schönfelder and U Wegler. Passive image interferometry and seasonal variations

of seismic velocities at merapi volcano, indonesia. *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 33, No. 21, p. L21302, November 2006.

[13] Nikolai M Shapiro, Michel Campillo, Laurent Stehly, and Michael H Ritzwoller. High-resolution surface-wave tomography from ambient seismic noise. *Science*, Vol. 307, No. 5715, pp. 1615–1618, March 2005.

[14] R Snieder. Extracting the building response using seismic interferometry: Theory and application to the millikan library in pasadena, california. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, Vol. 96, No. 2, pp. 586–598, April 2006.

[15] Roel Snieder and Eric Larose. Extracting earth's elastic wave response from noise measurements. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, Vol. 41, No. 1, pp. 183–206, May 2013.

[16] Roel Snieder and Kees Wapenaar. Imaging with ambient noise. *Phys. Today*, Vol. 63, No. 9, pp. 44–49, September 2010.

[17] Takashi Tonegawa, Kiwamu Nishida, Toshiki Watanabe, and Katsuhiko Shiomi. Seismic interferometry of teleseicmic S -wave coda for retrieval of body waves: an application to the philippine sea slab underneath the japanese islands. *Geophys. J. Int.*, Vol. 178, No. 3, pp. 1574–1586, September 2009.

[18] Jeroen Tromp, Yang Luo, Shravan Hanasoge, and Daniel Peter. Noise cross-correlation sensitivity kernels. *Geophys. J. Int.*, Vol. 183, No. 2, pp. 791–819, November 2010.

[19] Kees Wapenaar and Jacob Fokkema. Green's function representations for seismic interferometry. *Geophysics*, Vol. 71, No. 4, p. SI33, 2006.

[20] Richard Weaver, Berenice Froment, and Michel Campillo. On the correlation of non-isotropically distributed ballistic scalar diffuse waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 126, No. 4, p. 1817, October 2009.

[21] B.F. シュッツ. 物理学における幾何学的方法. 物理学叢書. 吉岡書店, 1987.

[22] 広岡田, 直巳坂尻. やや長周期微動による地下構造の推定. 北海道大学地球物理学研究報告, Vol. 42, pp. 119–143, October 1983.

索引

第 10 章