

時系列データ解析 Time series analysis



2021 12/8

東京大学地震研究所 西田究

目次

第 1 章	はじめに	5
1.1	シグナルとノイズ	5
1.2	時系列 (time series) とは	7
1.3	時系列解析とは	7
1.4	道具立て	8
1.5	どのように特徴づけるか?	8
1.6	時系列データの例	9
1.7	Optional	12
第 2 章	時系列データの離散化	13
2.1	時系列データの分類	13
2.2	離散時間フーリエ変換・フーリエ級数展開	13
2.3	サンプリング定理	15
2.4	ナイキスト周波数	17
2.5	Demonstration of sampling theorem	17
第 3 章	フーリエ級数展開・過渡的信号のスペクトル解析	19
3.1	Fast Fourier Transform (FFT)	19
3.2	実データへの適応	19
第 4 章	Fast Fourier transform (FFT)	21
4.1	補足 1: 偶数番目の時系列データから計算したフーリエスペクトル U_n^0 の意味	21
4.2	補足 2: $\sin \cos$ の計算	22
4.3	FFT の実装例 (python)	22
第 5 章	定常信号の周波数解析 (1): power spectrum	23
5.1	目的: 持続的な信号をどう取り扱うか?	23
5.2	アンサンブル	24
5.3	定常信号とは	24
5.4	定常過程のスペクトル解析	24
5.5	実データへの適応	25
5.6	パワースペクトルの読み方	27
5.7	白色雑音 (white noise)	28
第 6 章	定常信号の周波数解析 (2) cross spectrum	31
6.1	2つの時系列データがどのくらい似ているかを調べる	31
6.2	相互相関関数とは	31



6.3	定常信号の場合	32
6.4	実データへの適応	34
6.5	応用例: 地震波干渉法	35
付録 A	Fourier convention	39

第1章

はじめに

1.1 シグナルとノイズ

この講義では、観測データから以下に情報を引き出すか、特に空間的に固定された点で物理量を観測した場合に、以下に情報を引き出すかについて解説していきます。まずその取っ掛かりとして、シグナルとノイズについて考えていきましょう。

観測データを見ている人たちは、普段はあまり意識せず、ノイズとシグナルという言葉を使います。地震学に限らず、測定されたデータを出発点にする場合には、実験であろうと化学分析であろうと、何気なく使っていると思います。そもそも、ノイズとシグナルとはどのようなことを意味するのでしょうか？

自然現象を観察するときには、既に暗にモデルを仮定しています。例えば地震学の場合多くは、断層運動としての地震に興味があります。長い間地震を使って地球内部の構造が調べられて来たためです。そのモデルに関係する現象をシグナルと呼び、それ以外の現象を一括りにノイズと呼んでいます。そのため、ある人にとってのノイズ、目の付け所によっては、他の人にとってのシグナルになることは十分にあり得ることなのです。

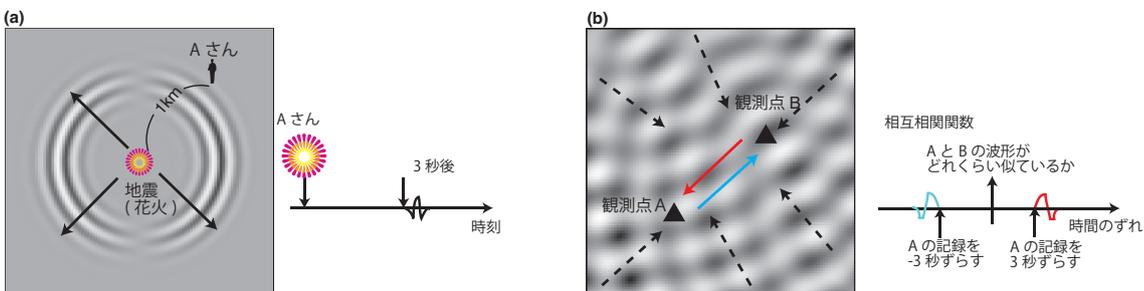


図 1.1 a) 地震が起きた後のある瞬間の地面の動き。震源から同心円状に伝播しています。(b) あらゆる方向から波が到来している場合。風が吹いた直後の水面のようです。

ここでは少し簡単な喩え話をしてみましょう。夏の夜に花火大会を見物していると、打ち上げと音とのタイミングにずれがあることに気付くはずですが。光はとても速く伝わる (30 万 km/s) ために瞬時に目に届きますが、音はゆっくりと伝わる (340m/s) ために耳に届くのには時間がかかるのです。例えば 3 秒ほど遅れて A さんに音が聞こえる場合には、打ち上げ場所は A さんから 1km ($340\text{m/s} \times 3\text{秒}$) ほど離れていることが分かります (図 1.1)。これは地震の位置 (震源) を地震計記録から決めるのと同じ原理です。

逆に打ち上げ場所までの距離があらかじめ分かっていたら、時間ずれの大きさから音の速さを調べることができます。このような方法は、地球内部の状態を知る上でも重要な役割を果たしてきました。地震波は固い物質中では速く伝わり、柔らかい物質中ではゆっくりと伝わる性質があります。そのため、地震が引き起こす地震波は固い場所を通ってくる場合には観測点に早く到達し、柔らかい場所を通ってくる場合には遅く到達します。この到着時間のずれから、地球の内部のどこが固くて、どこが柔らかいか調べることができます。

花火を昼間に打ち上げてしまっは楽しむことは出来ません。日中は光にあふれ、ドンという音以外にも常にザワ

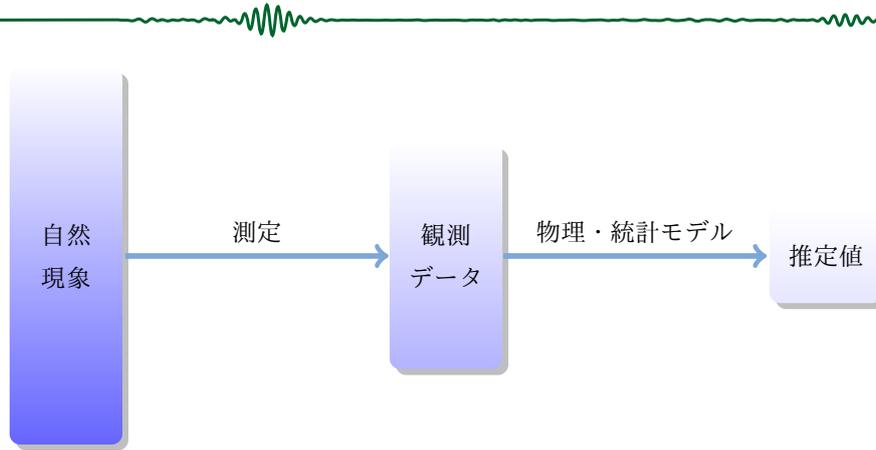


図 1.2 時系列データ解析の概念図。

ザワとした音にあふれています。地震波でも同じことが言えます。一方、私たちは普段これら身の回りのありふれた光や音から色々な情報を読み取っています。決してそれをノイズだと思って情報を捨てているわけではありません。同じように地震の情報を使わず身の回りのありふれた地面の揺れを調べることで、地球の中を調べることはできないのでしょうか？ 実は地球の中は常に波であふれています。地震が起きていない間も、地球は海の波に常に揺すられていて、あたかも貧乏揺すりのように揺れ続けています。人間には感じられない周期 5~20 秒のゆっくりとした振動(脈動と呼ばれています)が、365 日いつでもどこでも観測されています。これまで長い間、この振動は地震観測をする上でのノイズであると考えられてきました。常に色々な方向から到来しており、地震が引き起こした地震波を隠してしまうためです。これらの場合、地震の出す地震波がシグナルで脈動はノイズです。そのため歴史的にはこのノイズを避けるため、10 秒より短周期側の地動を記録する短周期地震計と長周期を記録する長周期地震計が別々に設置されていました。

例えば、ここ 10 年ほどで、色々な方向から常に到来しているという事実を逆手に取り、波の伝わり方から地球の内部構造がさかんに調べられるようになってきました。のようにランダムに波が伝わっていると、一見すると何の情報も得られなさそうです。ところが 2 つの観測点の波形がどの程度似ているか(相互相関関数)に着目すると、少し時間差をおいて波形が似ることが知られています。この時間のずれは、一方の観測点を通過した波がもう一方の観測点まで伝わる時間に相当します。

このように脈動は状況によってシグナルとして取り扱われることも、ノイズとして取り扱われることもあります。またもちろん、脈動は海洋波浪起源の地球科学的にも面白い現象であり、それ自体研究の対象にもなっています。脈動を研究する研究者にとって、脈動はシグナルであり、地震はノイズです。このように、どの現象に注目するか、どのように対象の現象をモデル化するかによって、ノイズとシグナルは入れ替わることがままあります^{註 1)}。

一般に我々はまず何らかの物理現象に注目します。そしてまず測定すべき物理量を設定し、測定します。ここではある一点での測定を考えましょう。次に測定された観測データから、物理現象を特徴づける値を推定することを考えます。決定論的な現象であれば、単純なモデルの当てはめなどが考えられます。現象自体が確率的な場合には、統計モデルを仮定し、統計量を推定することになります。この際案に仮定したモデルをシグナルと呼び、それ以外の現象を便宜上ノイズと呼びます。

本講義では、ある空間上に固定された点で測定された物理量の時間変化から、何らかの物理モデル・統計モデルに基づいた推定値を求める手続きについて学んでいきます。

註 1) ほかに人にはノイズ、私には宝の山—が私の研究方針の一つです。

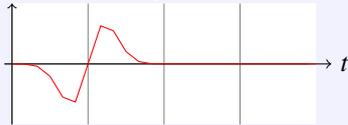
1.2 時系列 (time series) とは

時系列データとは、空間的に固定された点において、ある物理量が時間とともに変化する様子を記録したデータを指します。地球物理学での例としては、気圧変動、温度、地動(地面の動き)があります。

時系列データによって記録される現象は、大きく過渡的・決定論的現象と、確率過程で記述できる現象に分類できます。

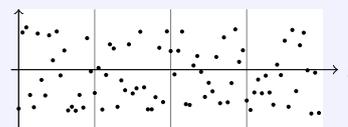
時系列データの分類

過渡的・決定論的現象: ただ一度起きた現象を対象とします。現象をモデル化でき、支配する物理パラメータを一意に決定できる状況を想定しています。例えば長周期の地震波形データが過渡的・決定論的信号に当たります。

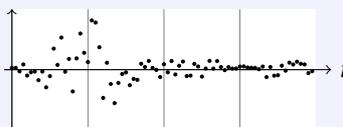


確率過程で記述できる現象: ランダムな現象を対象とし、現象は本質的に確率に支配されている系を考えます。この授業では、主に線形システムにランダムな入力がある場合を想定しています。例として波浪のようなランダムな波動現象があります。確率過程で記述できる現象は更に定常性で分類することができます。定常性とは、平均・分散といった統計量が時間的に不変である性質を表します。詳しくは5章・6章で解説していきます

定常信号



非定常信号



実際の現象を分類する際には、一筋縄でいかない場合も多く見られます。例えば、地震波形データも数 Hz よりも短周期では散乱波が卓越し、実質決定論的には議論ができなくなります。これは短波長不均質の構造を決定論的には決めることができず、統計的なパラメータのみを決定できるためです。

現実の時系列データは、いくつかの現象の重ね合わせで記述することができ、それぞれ違ったタイプの現象である事がほとんどです。時系列データ解析では、現象ごとにその特徴を掴み、うまくシグナルとノイズを分離し、その背後に隠れるモデルの推定を目指しています。

1.3 時系列解析とは

時系列解析は、具体的に (1) 記述 (description), (2) モデリング (modeling), (3) 予測 (prediction), (4) 信号抽出 (signal extraction) という手続きからなります。

時系列解析の手続き

- (1) 記述 (description) 状態を特徴づける量で時系列を簡潔に表現すること。共分散や自己相関関数などを図示することが有効です。周波数領域での記述も、信号を特徴づける上で有効です。言い換えると、少ないパラメータで特徴づけることは、情報量を圧縮することも意味しています。
- (2) モデリング (modeling) 背後にある物理過程を理解するために、時系列データに応じてモデル化をします。
- (3) 予測 (prediction) モデルを用いて、まだ得られてない将来を予測する。
- (4) 信号抽出 (signal extraction) 信号・ノイズを考える場合に、多くの場合時間・周波数領域で特徴的な構造を持つ。それぞれの構造はその物理的な特徴に起因する。単純な周波数領域でのフィルタリングは多くの場合に非常に有効である。フィルターについての詳細は、後半の授業でカバーする予定である。

この授業では、とくに地球物理学のデータ解析について例をもとに、時系列データ解析の基礎を学んでいきます。専門が地震学のため、特に地震計データの解析について多く取り上げていきます。

また、この授業では特に時系列データが線形システムの応答としてモデル化できる場合について学んでいきます。これは、線形システムに関する解析を行う場合に Fourier 解析が強力であり、その物理的解釈も用意であることがあげられます。また非線形問題を解析する場合でも、例えば移流項をランダムな外力項として取り扱うことによって、多くの理解が得られます。この授業は、時系列データ解析を、線形システムを理解する枠組みとして習得することを目的とします。

1.4 道具立て

Fourier 解析: 特に離散信号に対する Fourier 解析の理解が重要です (前半 4 回でカバー)。線形なシステムを考える場合には、とくに Fourier 解析が有効です。この授業では特に、離散信号に対して Fourier 解析を適応する方法について具体的に学んでいきます。

統計: ランダムな時系列を特徴づけるためには統計的な理解が重要。後半 2 回で自己相関・相互相関、その周波数解析である power spectrum, cross spectrum を解説していきます。とくに定常信号を以下に解析していくかについて学んでいきます。

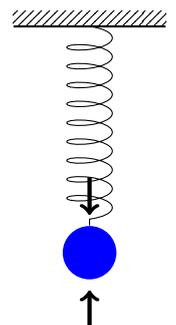
1.5 どのように特徴づけるか?

1.5.1 過渡的信号の場合

決定論的に波形を決められる状況を想定。信号をモデリングすることによって特徴づけることができます。例えば地震の場合は、震源の位置、発震時刻で特徴づけられる。もっと直接的には、地震波の到達時刻 (走時) で特徴づけることができます。

1.5.2 確率過程で記述できる現象の場合

ランダムな時系列に対しては、現象が確率過程で記述できると仮定します。例えば右図にあるようにバネ-おもり系に対してランダムな外力が働く場合の、おもりの位置を測定する場合を考えると、状況をイメージしやすいと思います。この授業では特に、線形システムに統計的にランダムな入力がある場合を想定しています。その場合、力源の統計量 (自己相関関数、共分散等) で特徴づける事ができます。



1.6 時系列データの例

まずは地震波形の例を見ていきましょう。この図は 2004 年スマトラ-アンダマン地震時の自信系記録です。図 1.3 上は約 1 日分のデータです。上 2 つはオリジナルのデータ、下 2 つは 1-7 mHz でバンドパスフィルター (詳しくは、後半の講義で解説する予定です) をかけた波形です。長周期のフィルターをかけると、孤立した波群が飛び飛びに見えると思います。これは地球を周回する地震波です。短周期ではそのような波はすぐに減衰してしましますが、長周期では減衰せずに周回している事がわかります。

図 1.3 下は更にローパスフィルタをかけた例です。横軸が約 1 週間であることに注意して下さい。上 2 つは 1mHz でローパスフィルタをかけているために地球潮汐による変形を記録しています。下 2 つは 0.1-1 mHz のバンドパスフィルターをかけているため、地震に伴って地球が弾性変形し続けている様子 (地球自由振動と呼ばれる現象です) が分かります。

ここで強調したいのは、現実のデータはは色々な現象の重ね合わせで有ることです。そして適切な周波数解析によってそれらの現象を切り分けることが可能となっています。

図 1.4 は西之島噴火時の空振 (長周期音波) を父島で捉えた記録です。音波は固体地球に変形を生じさせるため、地震計も空振を記録しています。2 つの記録がどの程度似ているのかを定量的に議論する場合には、相互相関解析が有効となります。時系列解析では、2 つの時系列を以下に比較するかも大切な話題です。6 章で具体的な手続きについて解説していきます。

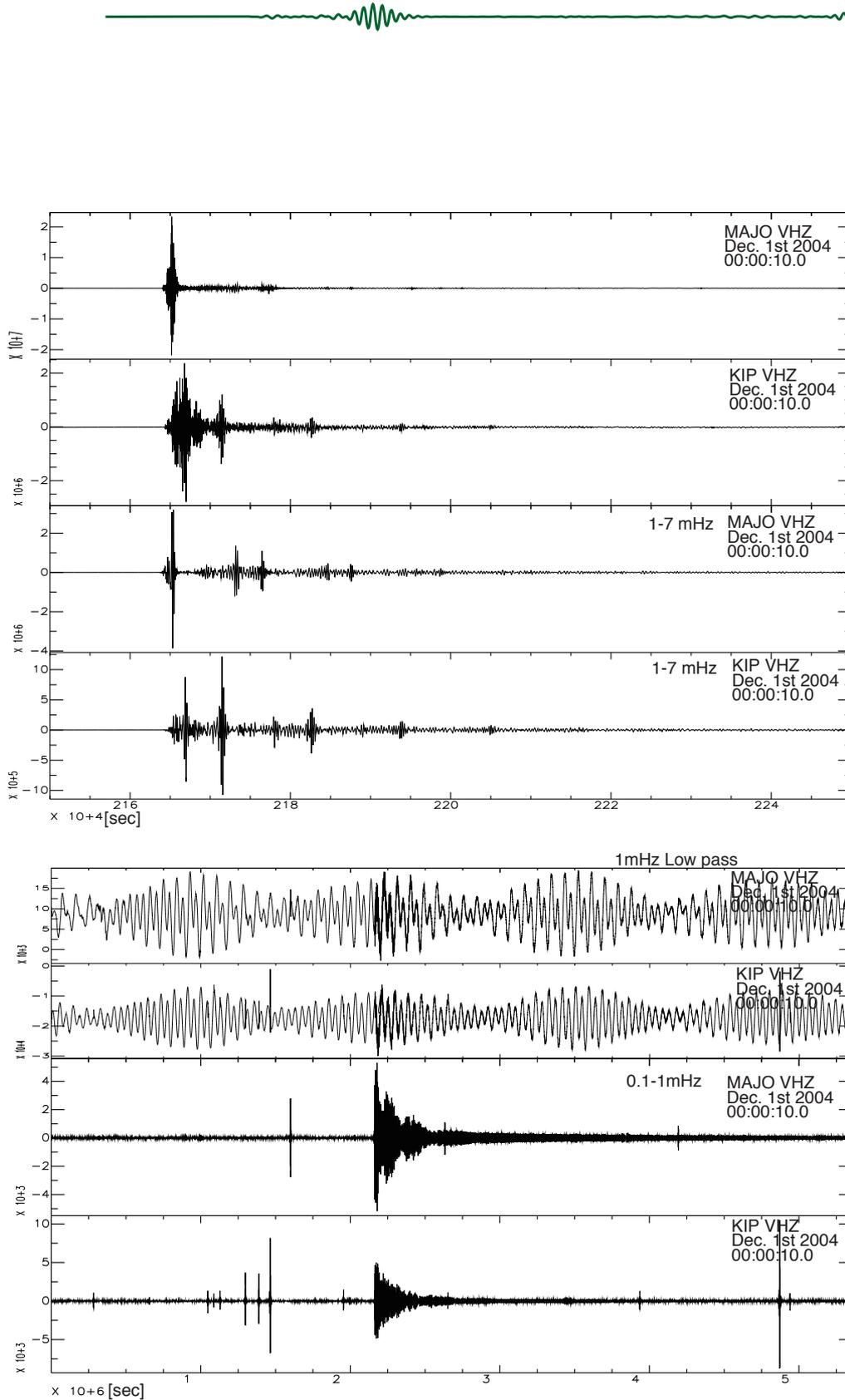


図 1.3 2010 年チリ地震時の地震波形記録。色々な周波数帯でバンドパスフィルタをかけて比べたもの。

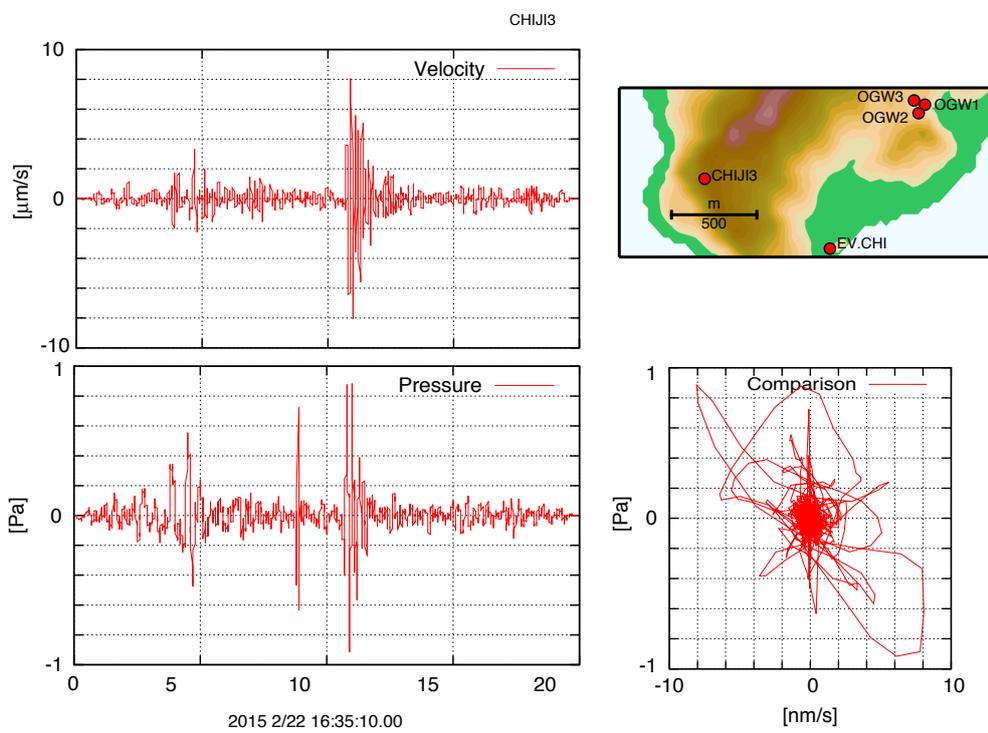


図 1.4 西之島 (CHIJI3) での空振を父島の観測点で記録した時系列データ。上は地動速度 (東西成分) を、下は圧力を示す。

1.7 Optional

今年は試験的に Jupyter notebook (<http://jupyter.org/>) を使って授業資料を作る予定。Jupyter Notebook とは、ノートブックと呼ばれる形式で作成したプログラムを実行し、実行結果を記録しながら、データの分析作業を進めるためのツールです。デフォルトでは python に対応しています。python3 で numpy, scipy, matplotlib を使って可視化した例を示す予定。

Optionally, I will try to show some examples using Jupyter notebook based on python3 (numpy + scipy + matplotlib).

1.7.1 How to install

See <http://jupyter.org/install.html>. Usually, for the installation, we use anaconda or pip. To run the notebook:

```
1 >jupyter notebook
```

Unzip Lecture1.zip, then run Eexample1.ipynb. You can plot a seismogram at a Japanese station when the great Sumatra earthquake in 2004.

```
1 import numpy as np
2 from pylab import *
3 from matplotlib.pyplot import *
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import scipy.signal
6
7 x0 = np.arange(0, 6, 0.01)
8 y0 = sin(x0*np.pi)
9 x1 = np.arange(0, 6, 0.5)
10 y1 = sin(x1*np.pi)
11
12 y2=np.load("./MAJ0.VHZ.npy")
13
14 xlim(200000, 500000)
15 plt.plot(y2)
```

第 2 章

時系列データの離散化

時系列データを考える場合に、現実の世界では^{註 1)}、時間・値ともに連続 (analog 信号) です。一方、この授業で扱う時系列データ解析は、コンピューターとともに発展してきました。コンピューターで取り扱うためには、時間・値ともに離散 (digital 信号) である必要があります。現実世界のアナログ信号を正しく解析するためには、どのようにデジタル信号に変換 (標本化: sampling) する必要があるのでしょうか？ この章では時系列データの離散化について学び、特にシャノンの標本化定理について学んでいきます。

2.1 時系列データの分類

任意の時間 t に対して値 $u(t)$ を定義できる場合、連続時間信号と呼びます。測定値が連続な値をとる信号をアナログ信号と呼び、測定値が離散化されているものを多値信号 (multi-level signal) と呼びます。

離散的な時間 $t_i (i = -\infty \dots \infty)$ でのみ測定値が観測されている場合、離散時間信号と呼びます。測定値が連続な値をとる信号を標本化信号 (sampled signal) と呼び、 Δt 参加されている信号をデジタル信号と呼びます。

ここで標本化信号 u_i を考えてみましょう。 Δt で等間隔にサンプルされているとします。この場合ナイキスト角周波数 ω_N は

$$\omega_N = \frac{\pi}{\Delta t}, \quad (2.1)$$

で定義されます。ナイキスト周波数より高い周波数の信号は標本化信号で表現出来ません。ナイキスト周波数より高い周波数を含む信号をサンプリング^{註 2)}しててしまうと、正しく信号を表現できず問題が生じます^{註 3)}。

離散化として、時間の離散化・測定値の離散化を考えるので、都合 4 つに分類されます。

2.2 離散時間フーリエ変換・フーリエ級数展開

2.2.1 フーリエ変換

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.2)$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.3)$$

^{註 1)} 厳密的には古典物理的描像としては

^{註 2)} ここではサンプリングとは $u(t_i)$ の瞬間的な値を測定することを意味します。

^{註 3)} aliasing と呼ばれる現象で次章で詳しく説明します

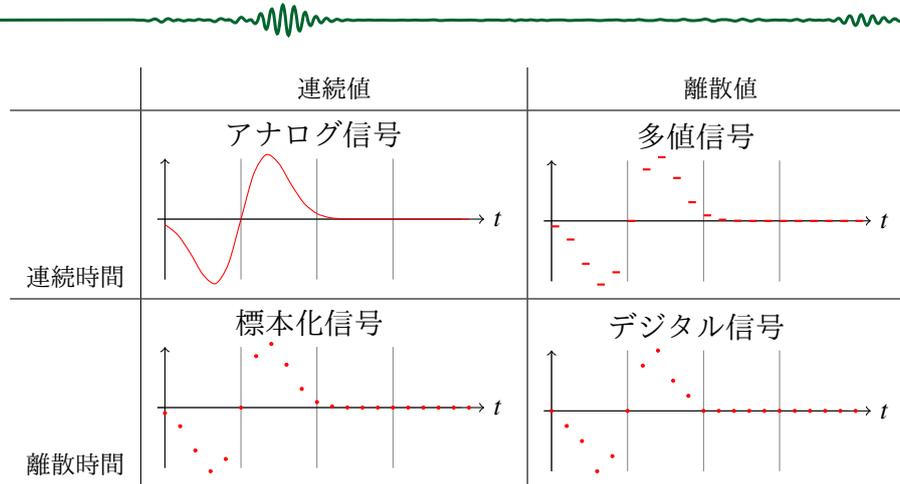


表 2.1 離散か連続化による信号の分類。

2.2.2 離散時間フーリエ変換 (DTFT)

離散フーリエ変換は

$$U^{DT}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{-i\omega t_k} \quad (2.4)$$

と書けます。 Δt はサンプリング間隔、角周波数 ω 、時刻 $t_k = \Delta t k$ です。

逆変換は

$$u(t) = \frac{1}{2\omega_N} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} U^{DT}(\omega) d\omega e^{i\omega t_k} \quad (2.5)$$

とかけます。

2.2.3 フーリエ級数展開

順変換は

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-i\frac{2\pi n t}{T}} dt \quad (2.6)$$

逆変換は

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n t}{T}} \quad (2.7)$$

2.2.4 離散フーリエ変換 (DFT)

離散フーリエ変換は

$$U_n^{DFT} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-2\pi i f_n t_k} = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-\frac{2\pi}{N} i k n}, \quad (2.8)$$

と書けます。 Δt はサンプリング間隔、周波数 $f_n = \Delta f n$ 、時刻 $t_k = \Delta t k$ 、 $\Delta f = 1/(\Delta t N)$ 、 N はデータの点数です。 $T = N\Delta t$ となります。

逆変換は

$$u_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n^{DFT} e^{2\pi i f_n t_k}, \quad (2.9)$$

とかけます。

2.3. サンプリング定理

問題

- $U^{DT}(\omega) = U^{DT}(\omega + 2\omega_N)$ という周期性を示せ。
- $\delta(t - t_0)$ を 離散時間フーリエ変換 (DTFT) で展開せよ。

2.2.5 Demonstration of DTFT

Before you run the notebook, you must activate the extension of widget once as:

```
1 >jupyter nbextension enable --py widgetsnbextension --sys-prefix
```

You can download a sample script from

Unzip Lecture2.zip, then run DTFT.ipynb. You can run an interactive demonstration of DTFT.

2.3 サンプリング定理

いま離散信号 u_k とその DTFT $U^{DT}(\omega)$ を考える。

$$U^{DT}(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_N \quad (2.10)$$

を満たす場合には、離散信号 u_k からサンプリング前のアナログ信号 $u(t)$ を完全に回復できることが保証されます。

この場合離散信号 u_k からアナログ信号 $u(t)$ を

$$u(t) = \sum_k u_k \frac{\sin[(t - k\Delta t)\omega_N]}{(t - k\Delta t)\omega_N} \quad (2.11)$$

再現することができます。

ポアソンの和公式

$$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t + 2m\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}, \quad (2.12)$$

Sampling 定理の証明では、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - Tk) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi nt/T} \quad (2.13)$$

という式が出てきます。この式は下記のポアソンの和公式と呼ばれる式と等価です。

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(2n\omega_N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta T) \quad (2.14)$$

DFT の場合は?

いま離散信号 $u_k, k = 0, \dots, N-1$ とその離散時間フーリエ変換 $U^D(\omega)$ を考えます。

$$U^D(\omega_n) = 0, \quad |\omega_n| > \omega_N \quad (2.15)$$

を満たすとします。全ページでは、離散時間フーリエ変換を考えることで、離散信号 u_k からサンプリング前のアナログ信号 $u(t)$ を完全に回復することをしました。離散フーリエ変換は、更に周期境界を課した特殊な場合として解釈することができます。具体的にはどういった表式になるのでしょうか？

上で示したように、離散信号の場合、信号 u_k からアナログ信号 $u(t)$ を

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \frac{\sin[(t - k\Delta t)\omega_N]}{(t - k\Delta t)\omega_N} \quad (2.16)$$

再現することができます。DFT の場合、更に周期境界条件が課されます。そのため

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \frac{\sin[(t - k\Delta t)\omega_N]}{(t - k\Delta t)\omega_N} \quad (2.17)$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \frac{\sin[(t - k\Delta t + k'\Delta t N)\omega_N]}{(t - k\Delta t + k'\Delta t N)\omega_N} \quad (2.18)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{k'=-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(t - k\Delta t + k'T)\omega_N]}{(t - k\Delta t + k'T)\omega_N} \right) u_k \quad (2.19)$$

と書き直す事ができます。ここで $T = N\Delta t$ とします。つまり

$$\phi_N(t) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(t + k'T)\omega_N]}{(t + k'T)\omega_N} \quad (2.20)$$

という sinc function の無限和 $\phi_N(t)$ で補間することができます。この関数をさらに

$$\phi_N(t) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(t + k'T)\omega_N]}{(t + k'T)\omega_N} = \sin(\omega_N t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{kN}}{(t + kT)\omega_N} \quad (2.21)$$

と書き換えることができます。

ここでやや天下りのですが、 N を偶数と奇数の場合で分けて考えてみましょう。 N が偶数の場合には

$$\phi_N(t) = \sin(\omega_N t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t + kT)\omega_N}. \quad (2.22)$$

上の式を評価するため、Fourier 級数展開

$$\cos \lambda x = \frac{\sin \lambda x}{\lambda \pi} + \frac{2 \sin \lambda x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda \cos nx}{\lambda^2 - n^2} \quad (2.23)$$

を考えます。この式に $x = \pi$ を代入し変数名を整理すると

$$\frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + n\pi} \quad (2.24)$$

を導くことができます2つのを比較することによって、

$$\phi_N(t) = \frac{\cot\left(\frac{\omega_N t}{N}\right)}{N} \sin \omega_N t \quad (2.25)$$

と書くことができます。

一方 N が奇数の場合には、

$$\phi_N(t) = \sin(\omega_N t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(t + kT)\omega_N}. \quad (2.26)$$

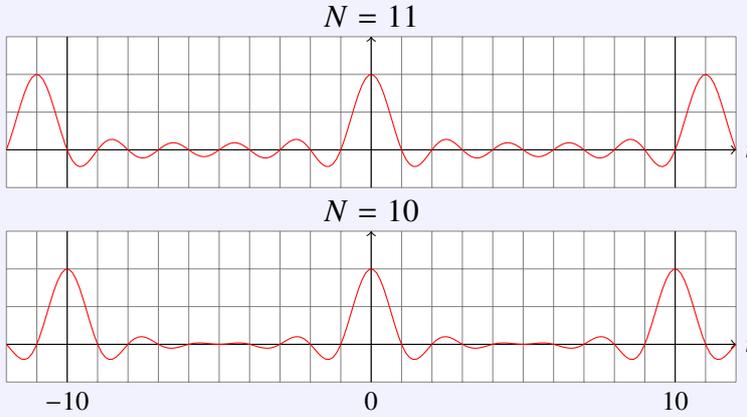
上の式を評価するため、再び式 2.24 を評価します。 $x = 0$ を代入し変数名を整理すると

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t + n\pi} \quad (2.27)$$

を導くことができます2つのを比較することによって、

$$\phi_N(t) = \frac{\sin \omega_N t}{N \sin \left(\frac{\omega_N t}{N} \right)} \quad (2.28)$$

と書くことができます。 N が偶数と奇数で表式が違うのは、 N が奇数の場合には ω_N が $2\pi(N+1)/2\delta f$ より $\Delta f/2$ 分だけ大きくなることに起因します。



2.4 ナイキスト周波数

2.5 Demonstration of sampling theorem

Before you run the notebook, you must activate the extension of widget once as:

```
1 >jupyter nbextension enable --py widgetsnbextension --sys-prefix
```

Unzip Lecture2.zip, then run Sampling.ipynb. You can run an interactive demonstration how "sampling theorem" recover a sampled data.

第3章

フーリエ級数展開・過渡的信号のスペクトル解析

3.1 Fast Fourier Transform (FFT)

離散フーリエ級数展開を実際に計算する場合に、フーリエ変換と違い暗に周期性を仮定することになります。そのためか述べるように、ウィンドウ関数をかける(端をつぶすので、*tapering*とも呼ばれます)など、注意が必要です。

実際の計算には Fast Fourier Transform (FFT) と呼ばれるアルゴリズムを使います。実装の仕方にもよりますが、点数が2のべき乗の時に効率的に計算することができます。FFT は色々な分野で使われているため、多くのライブラリが提供されています(例えば FFTW, FFTPACK 等)。ライブラリによってフーリエ変換の定義(規格化と \exp の符号)が違うので注意しましょう。パワースペクトルを時系列長 T に合わせて規格化する必要もあります。

3.2 実データへの適応

実際に観測・計測が行われる場合多くは離散化されたデジタルデータを取り扱います。有限な長さの実データ(離散データ)を実際にフーリエ解析する典型的な手順をみてみましょう。データ $u(t)$ は離散的なサンプリング間隔 Δt で計測されているとします。

3.2.1 トレンドの除去

時系列は多くの場合に変動に比べ平均が大きき場合が多く問題となります。平均やトレンドは長周期成分を含むため、フーリエ解析する際に高周波数側のパワースペクトルにしみ出し、本来のパワースペクトルをゆがめます。例えば地震学の場合には^{註1)}、潮汐による変動がスペクトル推定にバイアスをかける事が知られています。これは次に述べるウィンドウ関数でも低減しきれないこともしばしばです。そのためフーリエ解析する際には、まず平均・トレンドを取り除くことが常套手段となります^{註2)}。十分に長い時系列が存在する場合には、全体の時系列に対してハイパス・フィルタをかける事も有効です。

3.2.2 ウィンドウ関数

不連続な点がある関数をフーリエ変換すると、Gibbs の現象とよばれる現象をおこします。不連続点のみ、正しく推定できるのであれば問題ありませんが、不連続付近の振動が非常に広い周期帯に悪影響を及ぼしてしまいます。

DFT では暗に周期性を仮定しているために、いま考えている領域の両端を無理矢理つないでいる事になります。そ

註1) より具体的には、広帯域地震計で周期 100-1000 秒程度の地動を観測する場合。

註2)トレンドは最小二乗法で回帰直線を計算し、取り除くことが常套手段となっています。

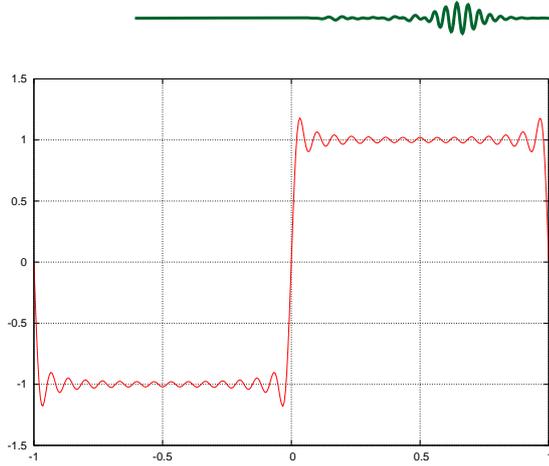


図 3.1 Gibbs の現象。打ち切り次数 35 次.

のために、そこで Gibbs の現象を起してしまいます。この悪影響を避けるために通常考えている領域の両端を緩やかにつぶす (tapering) 必要があります。

実例として、Welch ウィンドウと矩形ウィンドウの例を示します^{註 3)}。

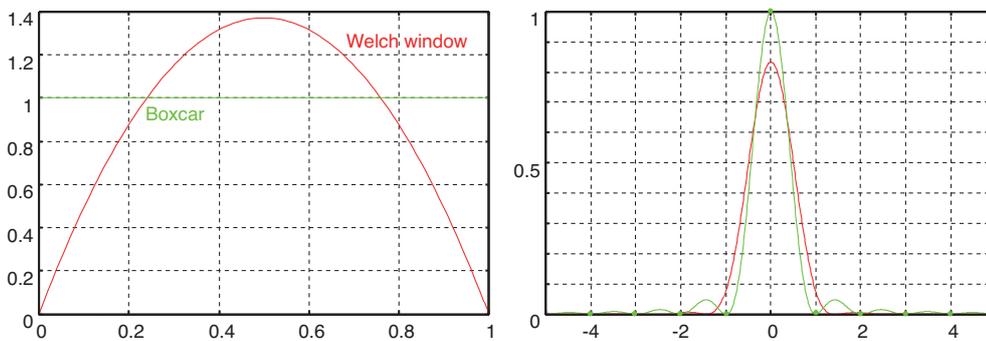
$$\text{矩形ウィンドウ, } w(t) = 1(0 < t \leq T) \quad (3.1)$$

$$\text{Welch ウィンドウ, } w(t) = \sqrt{\frac{15}{8}} \left[1 - \left(\frac{t - T/2}{T/2} \right)^2 \right] (0 < t \leq T) \quad (3.2)$$

そのフーリエ変換は

$$\text{矩形ウィンドウ, } \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \quad (3.3)$$

$$\text{Welch ウィンドウ, } w(t) = \frac{15}{2} T \left[\frac{1}{(\pi f T)^2} \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} - \cos(\pi f T) \right) \right] \quad (3.4)$$

図 3.2 矩形ウィンドウと Welch ウィンドウの例。ここで $T = 1$ とした。

図を見ると分かるように、矩形ウィンドウではサイドローブ (緑の線) が続きます。ウィンドウ関数をかけると、ピークの幅は広がりますが、サイドローブの影響が少なくなります。長く尾を引くサイドローブが Gibbs の現象と対応しています。

註 3) Hanning window ($w(t) = (1 - \cos(2\pi t/T))/2$) や Hamming window ($w(t) = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi t/T)$) がよく使われます

第 4 章

Fast Fourier transform (FFT)

$$U_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} u_{2k} W_N^{n(2k)} + \sum_{k=0}^{N/2-1} u_{2k+1} W_N^{n(2k+1)} \quad (4.1)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{N/2-1} u_{2k} W_{N/2}^{nk}}_{U_n^0} + W_N^n \underbrace{\sum_{k=0}^{N/2-1} u_{2k+1} W_{N/2}^{nk}}_{U_n^1} \quad (4.2)$$

$$U_n = U_n^0 + W_N^n U_n^1 \quad (4.3)$$

$$U_{n+N/2} = U_n^0 - W_N^n U_n^1, n = 0, \dots, N/2 - 1 \quad (4.4)$$

4.1 補足 1: 偶数番目の時系列データから計算したフーリエスペクトル U_n^0 の意味

U_n^0 は偶数番目の時系列データを抜き出して、DFT を用いて計算したフーリエスペクトルです。ここで大切なのは、時系列データに anti-aliasing filter をかけずにデータを間引いたため (U_n^0 のナイキスト角周波数は $\pi/(2\Delta t)$ であるため)、データ自体にはナイキスト周波数より高い周波数成分 ($2\omega_N$) を含んでいる点です。ここで sampling theorem を思い出すと、 U_n^0 とオリジナルのデータのフーリエスペクトルには、(厳密ではありませんが)

$$U^0(\omega_n) = \frac{\omega_N}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(\omega_n + 2\omega_N k) \quad (4.5)$$

という関係にあります。つまり U_n^0 は高周波成分 ($\omega_N \sim 2\omega_N$) も含んでいる (折りたたまれている) ことがわかります。

改めて式 4.3 を見直すと、低周波成分 ($0 \sim \omega_N$) U_n は偶数番目のデータを間引いて作った U_n^0 と奇数番目を間引いて作った U_n^1 の平均になっていることがわかるといえます。ここでは省略しますが、平均することによって折りたたまれた高周波成分がキャンセルする形になっています。一方、高周波成分 ($U_{n+N/2}$) は、引き算することによって、低周波成分がキャンセルし、高周波成分が抽出される構造になっています。式の意味が掴みづらいのは、間引いたデータから計算した DFT がナイキスト周波数より高い周波数成分を含んでおり、そのせいで間引いた sampling rate より高い周波数成分の情報を含んでいる点にあります。

4.2 補足 2: sin cos の計算

計算の速度を考えるとときには、加減が早く、次に乗算、除算はぐっと遅くなるのが重要です。三角関数 \sin, \cos は外部関数を呼び出すために更に遅くなります。三角関数は DFT に繰り返し表れるので問題となります。そこで $\sin(\Delta\omega i), \cos(\Delta\omega i)$ 、を高速に計算するために、加法定理を使って評価する方法を考えます。

加法定理を使って以下のような漸化式を導け、 $\cos \Delta\omega$ と $\sin \Delta\omega$ を一度評価すれば、あとは加減と乗算で計算できることがわかります。

$$\cos(\Delta\omega(i+1)) = \cos(\Delta\omega i) \cos \Delta\omega - \sin(\Delta\omega i) \sin \Delta\omega \quad (4.6)$$

$$\sin(\Delta\omega(i+1)) = \cos(\Delta\omega i) \sin \Delta\omega + \sin(\Delta\omega i) \cos \Delta\omega \quad (4.7)$$

周波数領域で時間シフトする機会はよくあるので、その際にこの関係式を使うと簡便に高速化することができます。

4.3 FFT の実装例 (python)

簡単な例として python での実装を以下にあげます。実用というよりは、どう動いているか動作の理解のためくらいだと思ってください。

```

1 def FFT(data):# The simplest version of FFT
2     N = len(data)
3     theta0 = 2*np.pi/N
4
5     if N == 1:
6         spctrm = data.copy()
7     else:
8         data0 = data[0:N:2]
9         data1 = data[1:N:2]
10        spctrm0 = FFT(data0)
11        spctrm1 = FFT(data1)
12        wp = [np.complex(np.cos(p*theta0), -np.sin(p*theta0)) for p in range(N//2)]
13        spctrm = np.hstack((spctrm0+spctrm1*wp, spctrm0-spctrm1*wp))
14    return spctrm

```

愚直な DFT のコードは以下のように書けます。

```

1 def DFT(data):
2     N = len(data)
3     spctrm = np.zeros(N, dtype=complex)
4     for i in range(N):
5         Δω = 2*np.pi/N*i
6         Δcs = np.cos(Δω)
7         Δsn = np.sin(Δω)
8         cs = 1
9         sn = 0
10        for j in range(N):
11            spctrm[i] += data[j]*np.complex(cs, -sn)
12            cs, sn = cs*Δcs - sn*Δsn, cs*Δsn + sn*Δcs
13    return spctrm

```

これくらい単純なコードでもそれなりの速度は出ます。精度や速度を考えたとき、既存の FFT のライブラリを使うことをお勧めします。C や C++ であれば FFTW, fortran であれば FFTPACK といったライブラリがよく使われます。

第 5 章

定常信号の周波数解析 (1): power spectrum

5.1 目的: 持続的な信号をどう取り扱うか?

ある 1 点で何か物理量を観測する場合、現象は大きく分けて (1) 過渡的 (transient) な現象と (2) 持続的 (persistent) な現象に分類することができます。過渡的な現象としては、地震がわかりやすいと思います。ここまでの授業では、主に過渡的な現象を取り扱ってきました。これまでの授業で取り扱ってきたように、過渡的な現象はフーリエ変換の枠組みで取り扱うことができます。

持続的な信号としては、気象・海洋現象が典型的です。例えば海洋波浪が引き起こす地面の振動 (脈動) を考えてみましょう。特に台風が通過するときには波高が高くなるため顕著な脈動が観測されます。図 5.1 にその一例として、

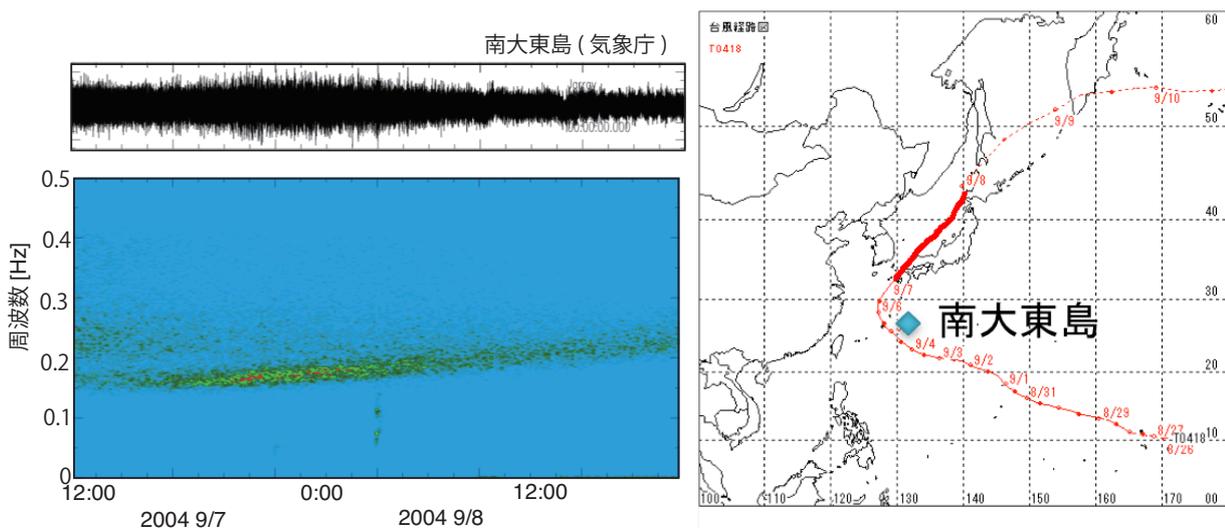


図 5.1 図左:南大東島での台風時の上下動記録から計算したランニングスペクトル。縦軸が周期を表し、横軸が時刻を表しています。図右:台風の進路を表します。濃い赤い線が、左図でプロットした期間に相当します。

2004 年の台風 18 号通過時の例を示します。 おおよそ一日半分の南大東島での地動き記録からランニングスペクトル^{註 1)}を計算しました。台風の勢力が弱まり、観測点から遠ざかるにつれて、振幅が弱くなっている様子がみとれます。また、卓越周期は勢力が弱まるに連れて短くなっている様子を見て取れます。図 5.1 に 1 本うっすらと縦の筋を確認できます。ランダムな時系列なため、位相はバラバラですが、顕著な周波数構造を見て取ることが出来ます。

本講義ではこのようなランダムな観測記録を、どうやって定量的に周波数解析をするかについて解説していきま

註 1) ランニング・スペクトルとは、パワースペクトルの時間変化を表した図です。周波数の時間変化を調べるための図です。具体的に計算するためには、(1) まず元データから時間をずらしながらデータを切り出し、(2) 切り出したデータごとにパワースペクトルを計算し、(3) 計算したパワースペクトルを時間方向に順番に並べます。

す註 2)。

まず、この 2 回の講義での目標を挙げます。

目的

- 持続的な信号をどう周波数解析するか理解する。
- 定常信号の周波数解析の具体的な手続きを身につける。
- パワースペクトル・クロススペクトルの図を読めるようになる。

5.2 アンサンブル

この授業で取り扱うのは、ランダムに変動している時系列です。ここでは条件を明確にするために、実験室での繰り返し測定を考えてみましょう。各測定ごとに測定量がランダムに揺らいでいて、その確率的振る舞いを調べていく事を考えます。

ここでは、ある物理量 u の時間変化を測定しているとします。繰り返し測定した、測定値の集合をアンサンブル (ensemble) とよびます。平均値 μ を

$$\mu(t) \equiv \langle f(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^k(t), \quad (5.1)$$

と定義でき、アンサンブル平均と呼びます。同様に自己相関関数 $\phi(t, \tau)$

$$\phi(t, \tau) \equiv \langle u(t)u(t + \tau) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^k(t)u^k(t + \tau), \quad (5.2)$$

を定義することができます。

5.3 定常信号とは

アンサンブル平均 $\mu(t)$ 、自己相関関数 $\phi(t, \tau)$ は一般に時間 t に依存します。 $\mu(t), \phi(t, \tau)$ が t に依存しない時、弱定常と呼びます。すべてのモーメントが時間 t に依存しない場合、強定常と呼びます。それ以外の現象を非定常な現象と呼びます。本講義では以降、定常な信号のみを取り扱ってきます。

5.4 定常過程のスペクトル解析

過渡的な現象 (地震や火山の噴火) ではなく、微動や脈動など統計的にランダムかつ定常と近似できる現象 $u(t)$ について考えます。また実験室の様に繰り返し実験できない^{註 3)} 状況を考えます。その場合には当然のことながらアンサンブルを定義できません。

註 2) 数学的には、信号をフーリエ解析するさいに、信号が 2 乗可積分である必要があります。持続的な信号は明らかに積分が発散するため、工夫が必要です。

註 3) 多くの地球物理学的観測はそうなります。理想的には、地球のような惑星を集めてそのアンサンブルを調べることができればより多くのことがわかるでしょう。

5.4.1 アンサンブル平均と時間平均

地球物理学的観測は実験室と違い多くの場合には、繰り返し測定することは不可能です。厳密な意味ではアンサンブル平均を取ることができません。そこでアンサンブル平均と時間平均が等しいと仮定して(エルゴート仮説^{註4)})

$$\phi(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(\tau)u(t + \tau)dt, \quad (5.3)$$

と計算できます^{註5)}。

5.4.2 自己相関関数をフーリエ解析

無限に続く定常シグナルは自乗可積分とならないために、フーリエ成分が発散してしまいます。そのためにフーリエ変換できません。しかし、自己相関関数であればフーリエ変換することができます。自己相関関数のフーリエ変換をパワースペクトル密度関数呼びます^{註6)}。Percival の公式によって、自己相関関数は平均自乗振幅と結び付けられます。パワースペクトル密度関数の単位は、(時間領域での単位)²/Hz となります^{註7)}。つまりパワースペクトルとは、ある平均自乗振幅がどのような周波数成分を持っているかを計算しているのです。以下もう少し詳しく見ていきましょう。

自己相関関数 $\phi(\tau)$ は、十分速く 0 に収束すると仮定して(自乗可積分)、自己相関関数のフーリエ変換としてパワースペクトル $\Phi(f)$ を定義します。

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau, f \geq 0. \quad (5.4)$$

このように定義した場合 Parseval の公式から $u(t)$ の平均自乗振幅 (mean squared amplitude) は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f)df, \quad (5.5)$$

と書けます。

パワースペクトルの定義として片側スペクトルと両側スペクトルがあります。明示されていないことも多く注意が必要です。

両側スペクトル $\Phi(f)$ の事を両側スペクトルと定義する。

片側スペクトル 実部しか持たないデータに関しては $p(f) = p(-f)$ となるので、慣習的に正の周波数のみ定義して、パワースペクトルの値を 2 倍する ($\bar{\Phi}(f) \equiv 2\Phi(f)$)。地球物理学の分野では片側スペクトルで計算する例が多い。

5.5 実データへの適応

実際に観測・計測が行われる場合多くは離散化されたデジタルデータを取り扱います。有限な長さの実データ(離散データ)を実際にフーリエ解析する典型的な手順をみてみましょう^{註8)}。データ $u(t)$ は離散的なサンプリング間隔 Δt で計測されているとします。

註4) エルゴート仮説は自明なことではなく、かなり強い仮定です。例えばあるクラスで繰り返し小テストを繰り返したとしましょう。その場合、クラス全体の平均を A 君の平均点で置き換えていることに相当します。個人差があるはずなので、かなり乱暴な仮定であることがわかると思います。

註5) この事を暗に仮定し、アンサンブル平均を表す記号 $\langle \cdot \rangle$ を時間平均に対して用いることも多いです。

註6) 単にパワースペクトルと呼ぶことも多いです。工学の分野では電力スペクトルの訳語を当てることがあります。

註7) 例えば加速度データのパワースペクトル密度は $(\text{m/s}^2)^2/\text{Hz} = \text{m}^2\text{s}^{-3}$ となります。慣れないと単位の面食らうかもしれません。

註8) 正確には Welch の方法と呼ばれる解析方針です。他の方針として、全体の時系列データをフーリエ変換し周波数領域で平均化するやり方もあります。どちらのやり方も、時間領域で自己相関関数 $\phi(\tau)$ が τ が大きくなるにつれて十分に速く収束することを意味します。

5.5.1 時系列データの分割

定常シグナルをフーリエ解析するさいに、自己相関関数は十分に速く収束すると仮定しました。自己相関関数 $\phi(\tau)$ が $|\tau| > T/2$ では十分に値が小さくその寄与が無視できるとします。この場合には、時間 T だけ時間が経てばそれ以前のとの相関がなくなり情報が独立しているとみなせます。そこで時系列データ全体を小さなデータ (長さ T) に分割します^{註 9}。

物理的によく理解されている系であれば T を事前に知ることができます^{註 10}。自己相関関数はデータ解析によって始めて分かります。そのため時系列長 T は事前には分からない事がほとんどです。その場合、事前に想定している物理・統計モデルから T をひとまず見積もります。その後 T を適宜変化させてその振る舞いを見ていきます。

5.5.2 トレンドの除去

時系列は多くの場合に変動に比べ平均が大きな場合が多く問題となります。平均やトレンドは長周期成分を含むため、フーリエ解析する際に高周波数側のパワースペクトルにしみ出し、本来のパワースペクトルをゆがめます。過渡的な信号同様トレンドや長周期の信号は除去します。

5.5.3 ウィンドウ関数

DFT では暗に周期性を仮定しているために、いま考えている領域の両端を無理矢理つないでいる事になります。この悪影響を避けるために、過渡的な信号同様に領域の両端を緩やかにつぶす (tapering) 必要があります。

ウィンドウ関数 $w(t)$ をかける事により、シグナルの振幅が変化するために補正する必要があります。統計的に定常な現象を見ているとすると $w(t)u(t)$ の分散は $u(t)$ の $\sqrt{\sum w(t)^2/N}$ 倍となるはず。その効果を補正する必要があります。

$$\bar{u}(k\Delta t) = \sqrt{\frac{T}{\Delta t \sum_{k=0}^{N-1} w_k^2}} u(k\Delta t) \quad (5.6)$$

ここで、時刻 $t_k = \Delta t k$ N はデータの点数です。 $T = N\Delta t$ となります。ここで離散フーリエ変換とフーリエ変換の整合性を考え

$$U_j = U(f_j) \equiv \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} u(t_k) e^{-i2\pi f_j t_k} = \delta U^{DFT}(f_j), \quad (5.7)$$

片側スペクトルの場合

$$\Phi(f_j) = \frac{2\langle \bar{U}_j \bar{U}_j^* \rangle}{T}, \quad (5.8)$$

と補正し、切り出した窓の数だけ平均化します。

^{註 9} 実際にはオーバーラップを持たせて切り出すことが常套手段となっています。これは、後で述べるように、ウィンドウ関数がかかるため端の情報が落ちるため、ずらす事によってその影響を低減するためです。

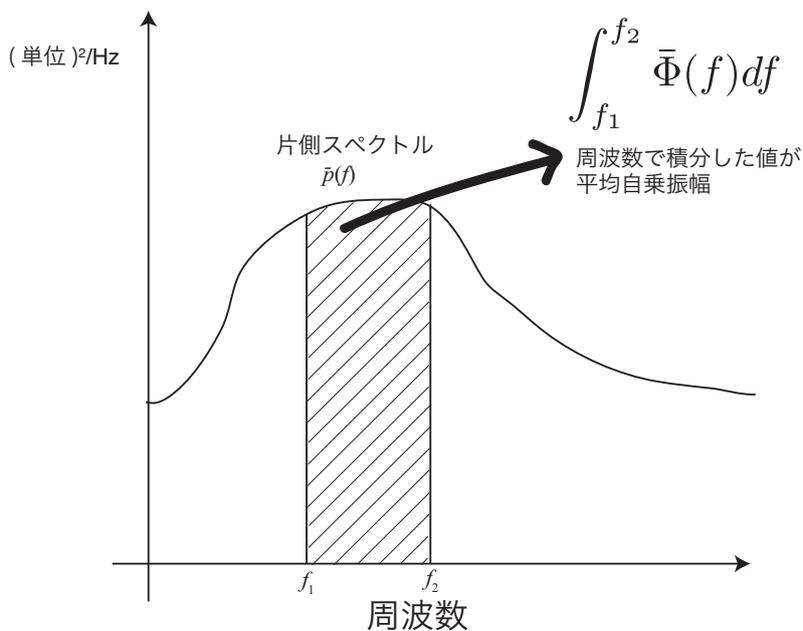
^{註 10} 例えば周期数 100 秒の固体地球の弾性振動を解析する場合を考えます。この場合には地震波は地球を数周することが分かっているため、 T は 1 日程度になります。

5.5.4 定常シグナルに対する解析手順

解析手順

1. 時系列データを細かい時系列に分ける
2. トレンドを除去:長周期成分の除去
3. tapering する:不連続が生じる事を防ぐ
4. 分割した時系列に対して DFT する
5. Window 関数 $w(t)$ の効果の補正. $\bar{U}_j = \sqrt{\frac{T}{\Delta t \sum_i w_i^2}} U_j$
6. 分割した時系列に対してパワースペクトルを計算
7. 推定誤差の低減のためパワースペクトルを平均化する

5.6 パワースペクトルの読み方



- 片側スペクトルの場合、パワースペクトル ($\bar{p}(f)$) は正の周波数のみで定義される。
- 縦軸・横軸ともにリニアの場合に、面積は平均自乗振幅に対応。
- 対数・対数プロットの場合には、面積と振幅が対応しなくなるので注意が必要^a。地球物理では観測量がべき分布するために対数プロットすることが多いので特に注意する必要がある。
- 縦軸の単位は (時間領域での単位)²/Hz となる。

^a フーリエ変換は微分演算子に対する固有演算子としての意味合いもある。そのため、線形のシステムに対するレスポンスを考える場合 (弾性振動の固有値問題等) に解釈しやすい。

問題 1

$\Phi = 1$ を対数・対数プロットした場合を考えてみよう。面積と平均自乗振幅の対応はどうか？

5.7 白色雑音 (white noise)

定常シグナル一般を理解することは難しいので、ここでは白色雑音に限って考えていきましょう。白色雑音とは、あらゆる周波数成分を等しく含んでいる不規則変動だと定義しよう^{註 11)}。そのために $\Phi(f) = \text{const}$ となります。

もう少し具体的に考えていきましょう。Figure 5.2 の左の図を見てください。いま時間間隔 Δt で離散化された時系列 $u(t)$ を考えます。各時刻で、ランダムにサイコロを振り (平均 0 分散 1 の正規分布に従うとします)。ここで自己相関関数 $\phi(\tau)$ を考えてみましょう。

$$\phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t+\tau)dt, \quad (5.9)$$

と本章では自己相関関数を定義しました。いま時刻 Δti と Δtj では全く相関がないため

$$\phi(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

となります。フーリエ変換すると、 $\Phi(f) = \delta t$ となります。パワースペクトル (片側スペクトル) は $2\delta t$ となります。

5.7.1 実データで計算

理論的な事は計算できました。では実際に数値データを作り計算してみたらどうなるでしょうか？ 乱数を使い白色雑音を生成し、フーリエ解析してみましょう。

まずは切り出したウィンドウ 1 つを考えてみましょう。周波数 f でのフーリエスペクトルを考えてみましょう。離散フーリエ変換とフーリエ変換の整合性をとると

$$U(f) = \Delta t \sum_{k=0}^N u(t_k) e^{-i2\pi f t_k} = \delta U^{DFT}(f), \quad (5.11)$$

となります。 $u(t_k)$ は乱数なので、 $U(f)$ も乱数になります。パワースペクトルは $|U(f)|^2$ で計算出来るため、一定の値を足らずランダムな値を取ります^{註 12)} Figure 5.2 右のグレーの点が実際に計算した点です。これは少し奇妙です。 $\Phi(f) = 1$ となるはずが一回 FFT するだけでは、2 と同じ桁という程度のことしか分かりません。何故でしょうか？

それは自己相関関数が統計的な量なためです。多くのアンサンブルに対して平均を (この場合は切り出した多くのウィンドウ) 取らないと意味のある値になりません。より具体的に言うと推定誤差が 100% となってしまいます。一見とても奇妙ですが、この振る舞いは時系列全体を一度にフーリエ変換しようとすることに起因します。時系列を長くすればするほど周波数解像度 $\Delta f = 1/T$ も細かくなってしまいうため、白色雑音の周波数スペクトルはいたるところで不連続となります^{註 13)}。

そこで何度も FFT をし平均をとってみましょう。段々と 2 に近づいていくことがわかんと思います^{註 14)}。このようにパワースペクトルとるはあくまで統計的な量なため、十分な数だけ平均化しないと推定誤差が大きくなりすぎてしまいます。例えば N 個のウィンドウを切り出して平均化した場合を考えてみましょう。時系列が正規分布に従う場合推定誤差は $1/\sqrt{N}$ となります。そのように誤差が N にしたがって小さくなっていく様子も、図から見て取れるはずで

註 11) 太陽光のアナロジーです。一般に白色はあらゆる周波数成分を含む事を、赤色は低周波に富む事、青色は等は周りに富むことを意味します。

註 12) 正確には χ^2 分布に従います。

註 13) 超関数として取り扱うことは可能で、白色雑音の自己相関関数は Dirac のデルタ関数となり、パワースペクトルはあらゆる周波数成分を等しく含む (定数) となります。

註 14) 確認ですが、今時間領域で分散 1 の時系列を考えています。Percival の公式からパワースペクトルの積分は 2×0.5 となり一致します。

5.7. 白色雑音 (WHITE NOISE)

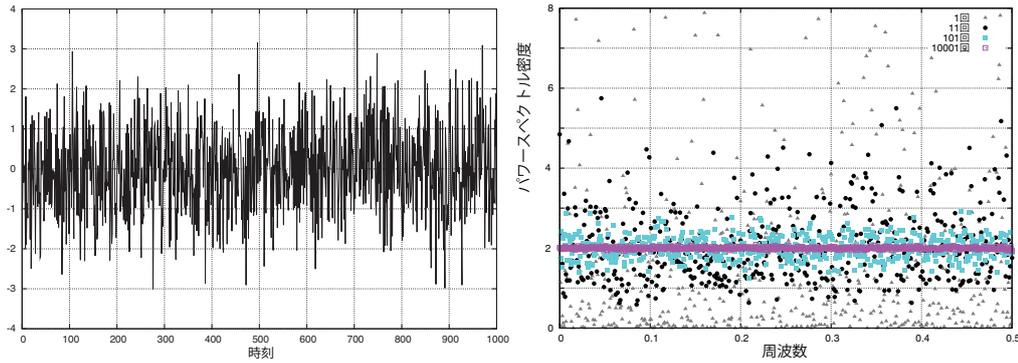


図 5.2 図左:白色雑音の時系列。図右:スペクトルをとりパワースペクトルを計算した結果。アンサンブル平均をとる数を増やす毎に、推定値は 1 に近づいていく。

問題 2

アナログのデータを離散化するには、離散化誤差が生じる。ここで時間間隔 Δt で物理量 y を測定している状況を考える。測定量 y を $\Delta y j$ で離散化したとすると (j は整数)、 $y - \Delta y j$ だけの離散化誤差が生じる。離散化誤差が $[-\Delta y/2, \Delta y/2]$ の一様乱数で近似できる仮定すると、離散化誤差のパワースペクトルの大きさがどの程度になるか見積もれ。またサンプリング間隔と量子化誤差の大きさについて議論せよ。

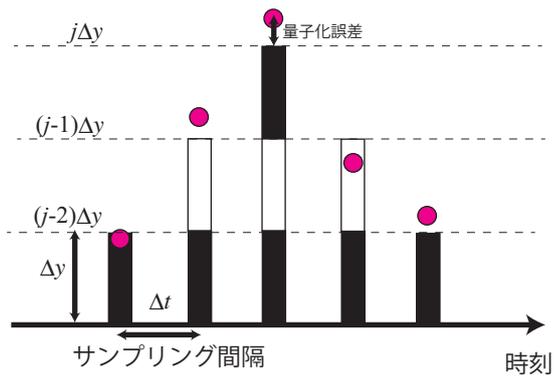


図 5.3 離散化の模式図。

第 6 章

定常信号の周波数解析 (2) cross spectrum

6.1 2つの時系列データがどのくらい似ているかを調べる

2つの時系列データを比較する場合には、相互相関関数を計算することは有効な解析手法です。相互相関関数を計算することにより、どの程度2つの時系列データは似ているのかを調べることができます。自己相関関数のフーリエ変換をパワースペクトルと呼ぶのと同様に、相互相関関数のフーリエ変換をクロス・スペクトルと呼びます。

現象は大きく分けて (1) 過渡的 (transient) な現象と (2) 持続的 (persistent) な現象に分類することができます。まず、過渡的な現象として地震波形の例を取り上げ、相互相関関数の意味を説明していきます。

持続的な信号として、はじめに繰り返し測定時の信号とノイズを取り上げます。定常信号に対して相互相関関数を定義し、そのフーリエ変換としてクロス・スペクトルを定義します。続いてコヒーレンシーとは何か解説していきます。最後に相互相関解析の応用例として、地震波干渉法について簡単に紹介します。

目的

- 相互相関関数を理解する
- 定常信号の周波数解析の具体的な手続きを身につける。
- クロススペクトル・コヒーレンシーの図を読めるようになる。

6.2 相互相関関数とは

ここでもまずは過渡的な現象について見ていきます。2つの時系列 $u_1(t), u_2(t)$ を考え、その相互相関関数 $\Psi(\tau)$ を

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)u_2(t + \tau)dt, \quad (6.1)$$

のように定義します。自己相関関数を $\phi_1(\tau)$ と $\phi_2(\tau)$

$$\begin{aligned} \phi_1(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)u_1(t)dt \\ \phi_2(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_2(t)u_2(t)dt, \end{aligned} \quad (6.2)$$

と定義します。相互相関関数の周波数領域での表現をクロス・スペクトル $\Psi(f)$ と呼び、それぞれのフーリエ変換 U_1, U_2 を用いて

$$\Psi(f) = U_1^*(f)U_2(f), \quad (6.3)$$

とかけます^{註 1)}。

例として地震波を考えてみましょう。図 6.1 左では、地震計 4 つならべ地震波の伝搬をしている状況を考えています。図右下は波が伝わっている様子を見て取れます。右上の図では観測点 1 と 2, 3, 4 との相互相関関数を表して

註 1) フーリエ変換の符号の定義によっては、 U_2 が複素共役となります。フーリエ変換の定義は常に頭の片隅に置いておくようにしましょう。

います。ピーク時間の遅延が走時差を表しています。2つの波形を似ているかを調べるためには、それぞれの大きさ $\phi_1(0), \phi_2(0)$ で

$$\frac{\psi(\tau)}{\sqrt{\phi_1(0)\phi_2(0)}}, \quad (6.4)$$

と規格化すると便利です。規格化した相互相関関数のピーク値が、波形がどの程度似ているかを表します。

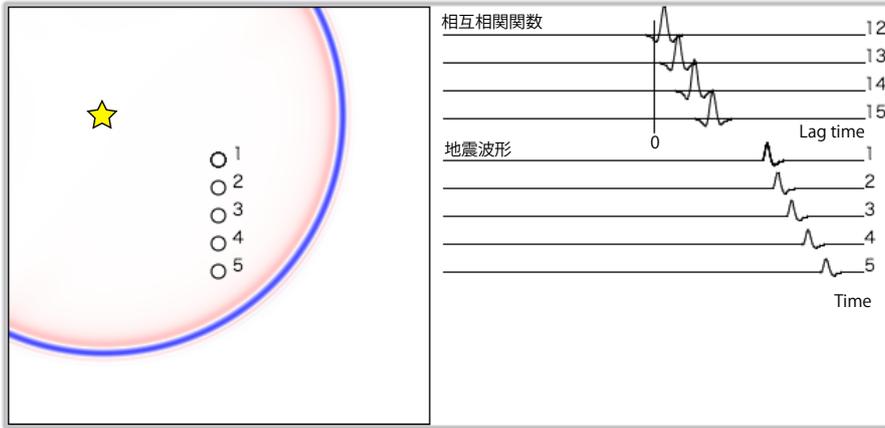


図 6.1 相互相関関数の模式図。左図はある瞬間の地動分布 (震源は星印で示しています)。右上の図はに観測点間の相互相関関数を、右下の図は観測点 1-5 での地動を示しています。)

問題

2つの矩形波 ($u_1(t), u_2(t)$) の相互相関関数 ($\psi(\tau)$) を計算してください。

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \end{cases} \quad (6.5)$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_0 \\ 1, & \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + 1 \\ 0, & \tau_0 + 1 < t \end{cases} \quad (6.6)$$

6.3 定常信号の場合

以下、過渡的な現象 (地震や火山の噴火) ではなく、微動や脈動など統計的にランダムかつ定常と近似できる現象 $u_1(t), u_2(t)$ について考えます。ここでは条件を明確にするために、実験室での繰り返し定常信号を測定している場合を考えてみましょう。ここでは、ある物理量 $u_1^k(t)$ と $u_2^k(t)$ を測定しているとします^{註 2)}。今定常信号を考えているので、前回の講義で説明したのようにアンサンブル平均 μ_1, μ_2 を

$$\begin{aligned} \mu_1 &\equiv \langle u_1(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_1^k(t), \\ \mu_2 &\equiv \langle u_2(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_2^k(t), \end{aligned} \quad (6.7)$$

註 2) 前回説明したように、繰り返し測定した測定値の集合をアンサンブル (ensemble) とよびます

と定義します。同様に相互相関関数 $\psi(\tau)$ を

$$\psi(t, \tau) \equiv \langle u_1(t)u_2(t + \tau) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_1^k(t)u_2^k(t + \tau), \quad (6.8)$$

と定義します。

地球物理学的観測は実験室と違い多くの場合には、繰り返し測定することは不可能です。厳密な意味ではアンサンブル平均を取ることができません。そこでほとんどの場合には、アンサンブル平均と時間平均が等しいと仮定して自己相関関数と同様に、

$$\psi(t, \tau) \doteq \psi(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_1(t)u_2(t + \tau)dt, \quad (6.9)$$

と計算します。

6.3.1 相互相関関数をフーリエ解析

無限に続く定常シグナルは自乗可積分とならないために、フーリエ成分が発散してしまいます。そのためにフーリエ変換できません。しかし、相互相関関数であればフーリエ変換することができます。相互相関関数のフーリエ変換をクロス・スペクトル密度関数呼びます^{註3)}。相互相関関数はパワースペクトル密度関数の単位と同様に、(時間領域での単位)²/Hz となりますつまりクロス・スペクトルとは、2つの時系列データがどの程度共通の周波数成分を持っているかを計算しているのです。以下もう少し詳しく見ていきましょう。

相互相関関数 $\psi(\tau)$ は、十分速く 0 に収束すると仮定して(自乗可積分)、相互相関関数のフーリエ変換としてパワースペクトル $\Psi(f)$ を定義します。

$$\Psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (6.10)$$

クロス・ベクトルの定義として片側スペクトルと両側スペクトルがあります。パワースペクトル違いクロス・スペクトルは、明示されていないことも多く注意が必要です。

関連してもう重量な量・コヒーレンシーをここで定義します。

$$Coh(f) \equiv \frac{|\Psi(f)|}{\sqrt{\Phi_1(f)\Phi_2(f)}}. \quad (6.11)$$

式を見るとわかるように、それぞれのパワースペクトルでクロススペクトルを規格化した量です。 Coh は2つの信号がどの程度似ているか測る量で、絶対値としては $-1 \leq Coh \leq 1$ となります。値は複素数なので、 $\Psi(f)$ の位相は2つの信号の位相特性のズレを表しています。

もう少し具体的に考えてみましょう。同じ物理量を同時に2つの測定装置で計測している状況を考えます。

$$\begin{aligned} u_1(t) &= s(t) + n_1(t) \\ u_2(t) &= s(t) + n_2(t). \end{aligned} \quad (6.12)$$

s, n_1, n_2 はそれぞれ無相関で平均は0だとします。相互相関関数は

$$\psi(t, \tau) = \langle u_1(t)u_2(t + \tau) \rangle = \langle s(t)s(t + \tau) \rangle \quad (6.13)$$

となりノイズとは関係しない形になります。コヒーレンシーは

$$Coh = \frac{\langle |S(f)|^2 \rangle}{\sqrt{(\langle |S(f)|^2 \rangle + \langle |N_1(f)|^2 \rangle)(\langle |S(f)|^2 \rangle + \langle |N_2(f)|^2 \rangle)}} \quad (6.14)$$

となります。ノイズが0の時には常に1に、ノイズが大きくなるにつれて小さくなっていく様子がわかると思います。2つの測定がどの程度似ているのか、どの程度位相がずれているのか判断するためにコヒーレンシーは非常に便利な量です^{註4)}。

註3) 単にクロススペクトルと呼ぶことも多いです。

註4) ここで重要になってくるのは、コヒーレンシーは統計的に処理して初めて意味の出てくる量です。例えば1サンプルに対してコヒーレン

6.4 実データへの適応

実際に観測・計測が行われる場合多くは離散化されたデジタルデータを取り扱います。有限な長さの実データ (離散データ) を実際にフーリエ解析する典型的な手順をみてみましょう^{註 5)}。データ $u(t)$ は離散的なサンプリング間隔 Δt で計測されているとします。

6.4.1 時系列データの分割

定常シグナルをフーリエ解析するさいに、自己相関関数は十分に速く収束すると仮定しました。相互相関関数 $\psi(\tau)$ が $|\tau| > T/2$ では十分に値が小さくその寄与が無視できるとします。この場合には、時間 T だけ時間が経てばそれ以前のとの相関がなくなり情報が独立しているとみなせます。そこで時系列データ全体を小さなデータ (長さ T) に分割します^{註 6)}。

物理的によく理解されている系であれば T を事前に知ることができます。例えば地震波到達の相対走時を測定する場合を考えてみましょう (図 6.1 参照)。当然のことながら切り出す時系列長 T が期待される走時差の 2 倍 (2τ) より短い場合には正しく測定できません。時系列長が T が $\tau/2$ 以上 τ 以下の場合には、相関関数ピークが負のラグタイムに回り込んでしまいます (wrap around と呼ばれる現象)。これは離散フーリエ変換で周期性を暗に仮定しているために、 $T/2$ より大きな走時差は負と判断されてしまうためです。まずは事前に想定している物理・統計モデルから T をひとまず見積もります。その後 T を適宜変化させてその振る舞いを見ていきます^{註 7)}。

6.4.2 離散フーリエ変換 (DFT)

まずは、トレンドの除去、ウィンドウ関数 $w(t)$ による処理を行います。ウィンドウ関数をかける事により、シグナルの振幅が変化するために補正する必要があります。統計的に定常な現象を見ているとすると $w(t)u(t)$ の分散は $u(t)$ の $\sqrt{\sum w(t)^2/N}$ 倍となるはず。その効果を補正する必要があります。

$$\bar{u}(k\Delta t) = \sqrt{\frac{T}{\Delta t \sum_{k=0}^{N-1} w_k^2}} u(k\Delta t) \quad (6.15)$$

ここで、時刻 $t_k = \Delta t k$ N はデータの点数です。 $T = N\Delta t$ となります。

その後、切り出した時系列を離散フーリエ変換 (DFT) します。離散フーリエ変換は

$$U(f_j) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-2\pi i f_j t_k}, \quad (6.16)$$

と書けます。 Δt はサンプリング間隔、周波数 $f_j = \Delta f(k-1)$, 時刻 $t_k = \Delta t k$, $\Delta f = 1/(\Delta t N)$, N はデータの点数です。 $T = N\Delta t$ となります。ナイキスト周波数 $f_n = 1/(2\Delta t)$ より短周期側の現象は正しく表現出来ません。

式の形を見ると分かるように離散フーリエ級数展開しているの、フーリエ変換と違い暗に周期性を仮定することになります。そのためいかに述べるように、ウィンドウ関数をかける (端をつぶすので、tapering と呼ばれます) など、注意が必要です。

シーを計算すると常に 1 となります。ただ 1 回の測定では、2 つの信号の位相がずれているだけなのか、違う信号なのかが区別できないためです。

註 5) 正確には Welch の方法と呼ばれる解析方針です。他の方針として、全体の時系列データをフーリエ変換し周波数領域で平均化するやり方もあります。どちらのやり方も、時間領域で自己相関関数 $\phi(\tau)$ が τ が大きくなるにつれて十分に速く収束することを意味します。

註 6) 実際にはオーバーラップを持たせて切り出すことが常套手段となっています。これは、後で述べるように、ウィンドウ関数をかけるため端の情報が落ちるため、ずらす事によってその影響を低減するためです。

註 7) wrap around を防ぐために時系列のゼロ埋めをする事もおおいが、ここで詳細は述べない。

また実際の計算には Fast Fourier Transform (FFT) と呼ばれるアルゴリズムを使います。実装の仕方にもよりますが、点数が2のべき乗の時に効率的に計算することができます。FFT は色々な分野で使われているため、多くのライブラリが提供されています (例えば FFTW, FFTPACK 等)。ライブラリによってフーリエ変換の定義 (規格化と \exp の符号) が違うので注意しましょう。クロス・スペクトルを時系列長 T に合わせて規格化する必要もあります。片側スペクトルの場合

$$\Psi(f_j) = \frac{2\langle \bar{U}_1^*(f_j)\bar{U}_2(f_j) \rangle}{T}, \quad (6.17)$$

のように、切り出した窓の数だけ平均化しクロススペクトルを計算します。

6.4.3 定常シグナルに対する解析手順

解析手順

1. 時系列データを細かい時系列に分ける
2. トレンドを除去:長周期成分の除去
3. tapering する:不連続が生じる事を防ぐ
4. 分割した時系列に対して DFT する
5. Window 関数 $w(t)$ の効果をそれぞれの時系列に対して補正. $\bar{U}_j = \sqrt{\frac{T}{\Delta t \sum_i w_i^2}} U_j w_j$
6. 分割した時系列に対してクロス・ペクトルを計算
7. クロス・ペクトルを平均を計算する

6.5 応用例: 地震波干渉法

クロス・スペクトルは基本的な統計量で、想定する物理的な状況によって意味合いが変わってきます。ここまで、(1) 相対走時の測定、(2) 信号に対する機器ノイズの影響を例として取り上げました。本章では応用として、地震波干渉法について紹介していきます。

6.5.1 地震波干渉法とは: ノイズをシグナルに

地球内部の状態を知る上で、地震学的な手法は重要な役割を果たしてきました。”地震”が引き起す地震波は、固い場所を通ってくる場合には観測点に早く到達し、柔らかい場所を通ってくる場合には遅く到達します。1980年代以降、この”到着時間のずれ”をCTスキャンに似た方法で調べ、地球の3次元的な内部構造が明らかにされてきました(地震波トモグラフィー)。

“地震”が起きていない時期には、地球は振動してないのでしょうか? 実は、地球は常に海の波によって揺られている事が知られています。脈動と呼ばれる周期5秒から20秒程度の地面の振動です。近年、大気や海の波が常時地球自由振動と呼ばれる周期数100秒のゆっくりとした振動を引き起こしていることも明らかになってきました。しかし脈動や常時地球自由振動は地震観測をする上での”ノイズ”であると長い間考えられてきました。脈動や常時地球自由振動は常に色々な方向から到来しているため、”地震”が引き起こした地震波を隠してしまうためです。本当に、”脈動や常時地球自由振動を使って、地球の内部構造を調べる事はできないのでしょうか?

2004年にShapiro達は、脈動と呼ばれる周期10秒程度の海洋波浪起源の地震波(脈動)を使い、カリフォルニアの地殻構造を推定する事に成功しました。地震波が色々な方向から常に到来しているという事実を逆手に取り、脈動の伝わり方から地球の内部構造を調べたのです。地震波干渉法と呼ばれる方法です。その後、同種の研究が盛んに行われるようになりました。最近では長周期の地震波(常時地球自由振動)を使い、局所的な構造だけではなく全球的な構造も求められるようになってきました。

地震波干渉法で基本になる観測量は、二つの観測点を選び地震波形の相互相関関数です。相互相関関数の波形は、あたかも一方の観測点に震源 (a virtual source) があり、もう一方の観測点で波形を記録していると解釈できます。図 6.2 を見てみましょう。この図は松代にある地震計と日本・アジア各地の観測点の相互相関関数を計算下図です。地震波が伝播している様子が見て取れると思います。データそのものを見ると全くランダムで一見なんの情報も含まないようには見えますが、相互相関関数解析をすることによって有用な情報を引き出すことが出来ることを示しています。

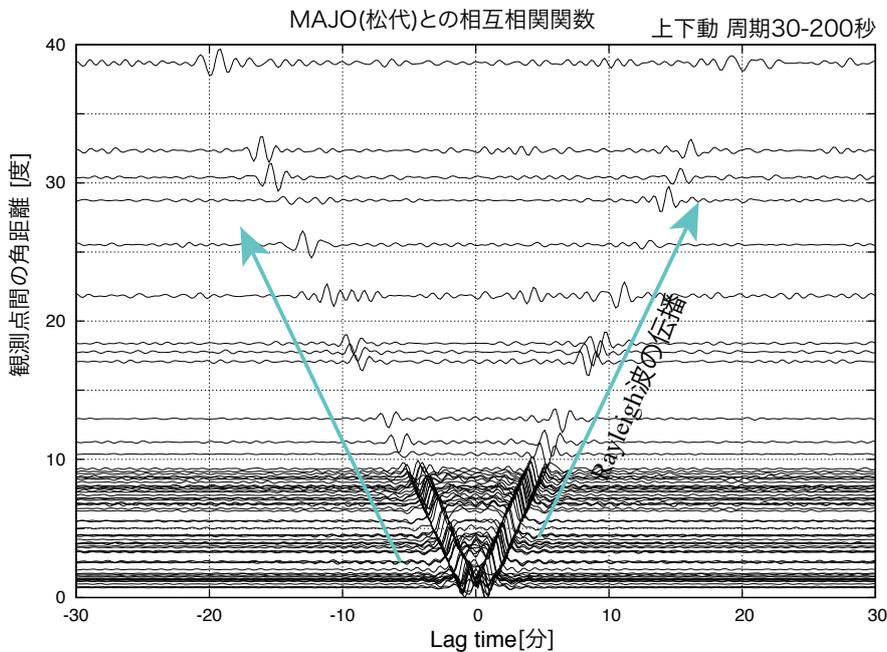


図 6.2 MAJO(松代) と他の観測点間の上下動記録の相互相関関数を観測点間の距離で並べた図。周期 20-200 秒のバンドパスフィルターをかけています。(レーリー波の伝播を見て取れます。遅延時間が正の波束を causal part とよび、負の波束を acausal part とよびます。)

この手法には大きく分けてメリットが二つあります。1つ目は地震が無い領域でも、仮想的にイベントを置くことが出来ることです。通常地震が無い領域では、地震波速度構造の詳しい地震波速度構造は分からないため、"地震"を必要としないのは大きなメリットです。

2つ目は"地震"を待つ必要がない点です。通常地震波トモグラフィ解析を行うためには、十分な地震データが蓄積されるのを待つ必要があります。地震波干渉法では、一定期間観測すれば十分な事は多い^{註 8)}。

"地震"を待つ必要が無いという性質は、地震波速度構造の時間変化を調べる上でも非常に有利に働きます。地震を使って、微少な地震波速度構造の時間変化を調べるためには、繰り返し同じ場所で地震が起こる(繰り返し地震と呼ばれる)のを待つ必要があります。しかしそのような都合の良い地震が起こることは非常に希です。あるペアの相互相関関数を計算し、その時間変化を見ることは、繰り返し同じ場所で起こっている地震の記録を解析する事に相当します。実際、火山や地震に伴う構造の時間変化が盛んに研究されるようになってきました(例えば Sens-Schönfelder Wegler, 2006, Wegler and Sens-Schönfelder, 2007, Brenguier et al., 2008a, Brenguier et al., 2008b)。

註 8) もちろん、十分な精度を確保するためには長期間の観測の方が有利ではある。

6.5.2 理論的背景

本節では2次元無限媒質中に2点観測点がある場合を想定します。単純だが、表面波を考える上ではかなり良い近似です。また理想的な条件の元では、相互相関関数と Green 関数を結びつけることができます。^{註9)}

ランダムな励起源が1カ所の場合 (A random persistent source)

ランダムな励起を考えるが、まず最も単純な場合として1カ所叩いている場合を考えます。 $\delta(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_s))f(t)$ に対する振動は、以下で求める撃力応答 (Green 関数と呼ばれる) との畳み込み積分で表現出来ます。 $f(t)$ はランダムな時系列で、統計的に定常であることを仮定します。

周波数領域での Green 関数を $\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}, \omega)$ を使い任意の点での波動場は

$$\tilde{u}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{G}^{2D}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, \omega)f(\omega), \quad (6.18)$$

と表現出来ます。

次に観測点1, 2間の相互相関関数 $\tilde{\phi}_{12}(\omega)$ を評価する。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{12} &= \langle \tilde{u}_1^*(\omega)\tilde{u}_2(\omega) \rangle \\ &= \tilde{G}^{2D*}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_s, \omega)\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_s, \omega)\langle \tilde{f}^*(\omega)\tilde{f}(\omega) \rangle \end{aligned} \quad (6.19)$$

多数のランダムな励起源がある場合 (Many random sources)

N カ所叩いている場合を考える。雨粒が水面を叩いている状況を思い浮かべると分かりやすいでしょう。

$$\tilde{u}(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{i=0}^N \tilde{G}^{2D}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \omega)f_i(\omega), \quad (6.20)$$

ここで \mathbf{r}_i は i 番目の励起源の位置を表します。

i 番目の励起源 ($i = 0, \dots, N$) を $\delta(\mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_s))\tilde{f}_i(\omega)$ とする。 $\tilde{f}_i(\omega)$ は白色である事 (統計的に定常、かつ周波数スペクトルが周波数によらず一定。) かつ、互いに無相関であると仮定すると

$$\langle \tilde{f}_i^*(\omega)\tilde{f}_j(\omega) \rangle = \delta_{ij}f_0^2, \quad (6.21)$$

とかけます。

上記の関係式を使い相互相関を計算すると、

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{12} &= \sum_{i,j} \tilde{G}^{2D*}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i, \omega)\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j, \omega)\langle \tilde{f}_i^*(\omega)\tilde{f}_j(\omega) \rangle \\ &= \sum_{i,j} \tilde{G}^{2D*}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i, \omega)\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j, \omega)\delta_{ij}f_0^2 \\ &= \sum_i \tilde{G}^{2D*}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i, \omega)\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_i, \omega)f_0^2 \end{aligned} \quad (6.22)$$

励起源の数が十分に大きいと、励起源が観測点を囲んでいる場合には上式の和は線積分で置き換えられ、

$$\tilde{\phi}_{12} = f_0^2 \int_{l_s} \tilde{G}^{2D*}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_s, \omega)\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_s, \omega)dl_s, \quad (6.23)$$

と書けます。グリーン関数の畳み込み積分を空間で積分している形になっている。この式が地震波干渉法における基本式です。

積分の評価: 相互相関関数と Green 関数の関係 この積分を評価するために、図 6.3 の半径 r_s 上に励起源が並んでいる配置を考える。励起源の位置は原点からの距離 r_s と角度 ϕ_s で表現できます。

^{註9)} 相互相関関数を計算することにより観測点間の波動伝播が抽出されるデモを作成しました。<http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/knishida/Seismology/wave2Drandom2.html>

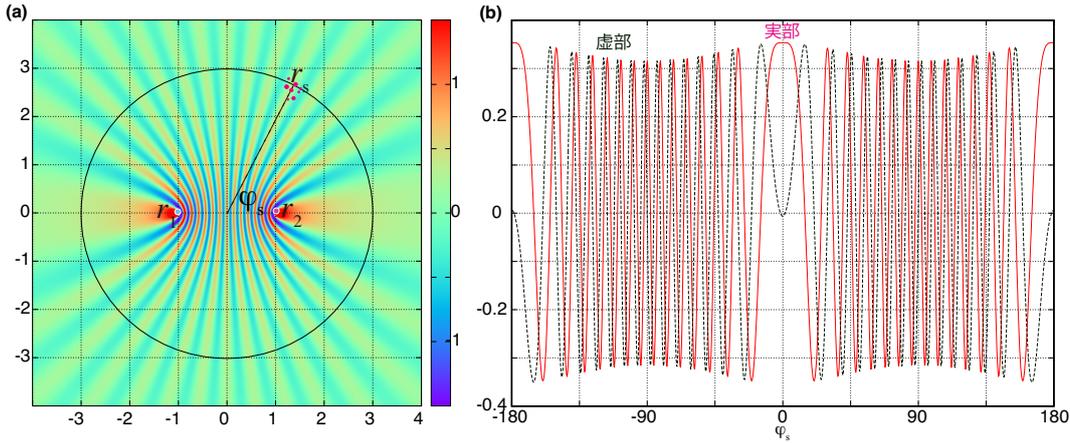


図 6.3 (a) r_s を固定し ϕ_s に対し被積分関数をプロットした図。(b) は $r_s = 3$ の円 (図 6.3(a) 参照) に沿った値をプロットした図。

単純化のため Green 関数が $e^{ikr-\pi/4}/\sqrt{kr}$ に比例すると近似します。この近似は距離 r が波長に比べて長いときには妥当な近似です^{註 10)}。そうすると

$$\tilde{\phi}_{12} \propto \int_{l_s} \frac{e^{ik(r_{2s}-r_{1s})}}{k\sqrt{r_{1s}r_{2s}}} dl_s \quad (6.24)$$

r_{1s}, r_{2s} は観測点 $1\mathbf{r}_1$, 観測点 $2\mathbf{r}_2$ と励起源 \mathbf{r}_s の間の距離。式にあるように、点震源 \mathbf{r}_s から放射される波の観測点 1 と 2 とでの位相差は、距離の差を波長で割った値で表す。等位相差の曲線は観測点を焦点とする双曲線となります。そうすると、二観測点を通るパスに沿っては位相の変化は緩やかとなり (停留点, stationary point)、その他の領域では激しく振動します (図 6.3)。ランダムな励起の問題を考える場合、二観測点間を通るパスに沿った励起源の寄与 (stationary zone と呼ばれる) が大きくなり、その他の領域の励起源の影響は打ち消されます (停留値法, 例えば蓬田 2007 参照)。また虚部は ϕ_s に対して反対称となっているため、励起源の分布が一様の場合には打ち消される^{註 11)}。

以下少し視点を変えて、もう少し直感的な説明を試みます。図 6.3 赤点で書いたようにランダムな励起源がある限られた領域に分布しているとき、十分に遠くで観測する場合多重極 (mono pole, dipole, quadrapole 等) の重ね合わせで表現できる (多重局展開と呼ばれます)。 ψ_s が図にあるように 70° 程度の場合を考えます。この場合、2 観測点の間に節が入る確率はランダムです。そのために、 r_s から出た波が 2 つの観測点で同位相である確率と逆位相である確率は等しい。一方 ϕ_s が 0 か π の時には (stationary zone の場合)、励起源から見て 2 つの観測点の方向は同じため常に r_s から出る波は同位相となります。つまり stationary zone に励起源がある場合のみ、相互相関波形に寄与します。

問題

地震波干渉法のデモ (<http://www.eri.u-tokyo.ac.jp/knishida/Seismology/wave2Drandom2.html>) を実行して、相互相関関数が観測点間の波動を伝播を抽出する様子を観察してください。特に収束に注目すること。

註 10) Green 関数は具体的には

$$G^{2D}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{H(t - \frac{r}{c})}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}}$$

周波数領域では、

$$\tilde{G}^{2D}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(\omega r/c) \propto \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{ikr-\pi/4}$$

とかけます。ここで波数 k は $k \equiv \omega/c$ と定義され、 $H_0^{(2)}$ 第 2 種ハンケル関数である、 $H()$ は Heviside の階段関数です。

註 11) 被積分関数が激しく振動する性質は重要です。なぜなら、一様に励起源が分布していない場合にも、stationary zone の寄与が卓越することが期待されるためです。励起源の分布に対して、相互相関関数の波形がロバストである性質は、データ解析上重要な点です。

付録 A

Fourier convention

For time series $u(t)$, the Fourier transform \mathcal{F} and inverse Fourier \mathcal{F}^{-1} are defined as,

Definition of Fourier transform

Forward transform (U in frequency, \bar{U} in angular frequency) is defined as,

$$\bar{U}(\omega) \equiv \mathcal{F}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (\text{A.1})$$

$$U(f) \equiv \mathcal{F}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i2\pi f t} dt, \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Condition: } \int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt < \infty. \quad (\text{A.3})$$

The backward Fourier transform is defined by

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}(\bar{U}) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad (\text{A.4})$$

$$= \mathcal{F}^{-1}(U) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} U(f)e^{i2\pi f t} df, \quad (\text{A.5})$$

Here U represents Fourier components of time series $u(t)$. Here we note that $U(f) = \bar{U}(2\pi f)$.

Summary of the relations

- If $u(t)$ is a real function,

$$U(f) = U^*(-f),$$

- The Percival's theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |U(f)|^2 df,$$

- Fourier transform of convolution:

$$\mathcal{F}(u * v) = UV,$$

- Cross spectrum

$$C(u, v; f) = \mathcal{F}(\psi) = U^*V$$

- The Wiener- Khinchin theorem

$$p(f) = \mathcal{F}(\phi) = |U|^2.$$

Here, we define convolution as,

$$u(t) * v(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(t - t')v(t')dt',$$



and, an auto-correlation ϕ is defined as,

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t + \tau)d\tau.$$

A cross-correlation function ψ is defined,

$$\psi(u, v; t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t + \tau)d\tau.$$